УДК 517.5

С. А. Теляковский (Мат. ин-т РАН, Москва, Россия)

О СВОЙСТВАХ БЛОКОВ ЧЛЕНОВ РЯДА $\sum \frac{1}{k} \sin kx$

We investigate the decomposability of the series $\sum \frac{1}{k} \sin kx$ into blocks such that the sum of the series formed of the moduli of these blocks belongs to the spaces $L^p[0,\pi]$ or the spaces $L^p[0,\pi]$ with weight $x^{-\gamma}$, $\gamma < 1$.

Досліджено, на які блоки можна розбити ряд $\sum \frac{1}{k} \sin kx$, щоб сума ряду із модулів цих блоків належала просторам $L^p[0,\pi]$ або просторам $L^p[0,\pi]$ з вагою $x^{-\gamma}$, $\gamma < 1$.

1. Введение. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \tag{1}$$

часто используется при исследовании тригонометрических рядов и в теории приближения функций. Во многих случаях ряд (1) играет роль модельного при изучении функций ограниченной вариации.

Настоящая работа посвящена свойствам рядов из модулей блоков членов ряда (1).

Рассмотрим строго возрастающую последовательность Λ натуральных чисел $1 = n_1 < < n_2 < \ldots$, для которой сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j},$$

и составим с помощью этой последовательности ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right|. \tag{2}$$

В силу известной оценки

$$\left| \sum_{k=s}^{S} \frac{\sin kx}{k} \right| \le \frac{\pi}{sx}, \quad s \le S \le \infty, \quad 0 < x \le \pi, \tag{3}$$

ряд (2) сходится при всех x, и его сумма, которую обозначим $g_\Lambda(x)$, является непрерывной на $(0,\pi]$ функцией.

В [1] получены условия на последовательность Λ, достаточные для ограниченности функции $g_\Lambda(x)$. В последовавших затем работах эти условия были ослаблены и найдены достаточные условия на последовательность Λ, являющиеся в некоторых случаях и необходимыми для того, чтобы функция $g_\Lambda(x)$ принадлежала пространствам L^1, L^2 или являлась ограниченной, т. е. принадлежала L^∞.

Пункт 2 посвящен интегрируемости функции $g_\Lambda(x)$, приведен обзор известных результатов и получено новое утверждение о принадлежности $g_\Lambda(x)$ пространствам $L^p[0,\pi]$ при $p = 3, 4, \ldots$. В п. 3 изучается задача интегрируемости функции $g_\Lambda(x)$ с весом $x^{-\gamma}$.

Формулировки утверждений будут содержать не только числа n_j, но и построенные с их помощью числа $m_j := \min(n_j, n_{j+1} - n_j + 1)$. Заметим, что $m_j \geq 2$ при $j \geq 2$.

2. Интегрируемость функции g_Λ. В [2] установлено, что для ограниченности функции $g_\Lambda(x)$ необходимо и достаточно существование такого числа M, что при всех $i = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j} m_i \leq M.$$

Из результатов работ [3, 4] следует, что для того чтобы функция $g_\Lambda(x)$ принадлежала $L^1[0, \pi]$, необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} \log m_j. \tag{4}$$

Достаточность доказана в [3], а необходимость — в [4]. В [4] показано также, что ряд (4) сходится в том и только в том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_{j+1}} \log(n_{j+1} - n_j + 1).$$

Заметим, что необходимость сходимости ряда (4) для принадлежности $g_\Lambda(x)$ пространству $L^1[0, \pi]$ легко вывести из теоремы 3 работы [5] (в [5] это не было отмечено).

В самом деле, согласно этой теореме, если $g_\Lambda(x) \in L^1[0, \pi]$, то сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{k(k - n_j + 1)}.$$

Но в случае, когда $m_j = n_{j+1} - n_j + 1$, имеем $n_{j+1} < 2n_j$ и

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{k(k - n_j + 1)} > \frac{1}{2n_j - 1} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{k - n_j + 1} > \frac{1}{2n_j - 1} \log m_j.$$

А если $m_j = n_j$ и $n_j < n_{j+1} - n_j + 1$, то $n_{j+1} \geq 2n_j$, поэтому

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{k(k - n_j + 1)} \geq \sum_{k=n_j}^{2n_j-1} \frac{1}{k(k - n_j + 1)} \geq \frac{1}{2n_j - 1} \log m_j.$$

Таким образом, данное утверждение доказано.

В [6] показано, что если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} \sqrt{m_j},$$

то $g_\Lambda(x) \in L^2[0, \pi]$.

Покажем, что подобное достаточное условие принадлежности функции $g_\Lambda(x)$ пространствам $L^p[0, \pi]$ имеет место при целых $p = 3, 4, \ldots$.

Теорема 1. *При каждом целом* $p = 2, 3, \ldots$ *функция* $g_\Lambda(x)$ *принадлежит пространству* $L^p[0,\pi]$, *если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} m_j^{1-1/p}. \tag{5}$$

Доказательство. Как и в [6], где эта теорема доказана для $p = 2$, будем использовать оценку

$$u_j(x) := \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| \le \frac{A}{n_j} \min\left(\frac{1}{x}, m_j\right), \quad 0 < x \le \pi, \tag{6}$$

где A — некоторая абсолютная постоянная, вытекающую из (3) и равномерной ограниченности частных сумм ряда (1).

Установим равномерную относительно N ограниченность интегралов

$$\int_0^\pi \left(\sum_{j=1}^{N} u_j(x) \right)^p dx = \int_0^\pi \sum_{j_1=1}^{N} u_{j_1}(x) \ldots \sum_{j_p=1}^{N} u_{j_p}(x) dx =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_p=1}^{N} \int_0^\pi u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx.$$

Разобьем $[0,\pi]$ на отрезки $[0,\alpha]$ и $[\alpha,\pi]$. С помощью (6) получим

$$\int_0^\alpha u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx \le A^p \int_0^\alpha \frac{m_{j_1}}{n_{j_1}} \ldots \frac{m_{j_p}}{n_{j_p}}\, dx = A^p \frac{m_{j_1}}{n_{j_1}} \ldots \frac{m_{j_p}}{n_{j_p}} \alpha$$

и

$$\int_\alpha^\pi u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx \le \frac{A^p}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \int_\alpha^\pi \frac{dx}{x^p} < \frac{A^p}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \frac{\alpha^{1-p}}{(p-1)}.$$

Поэтому, положив

$$\alpha = \left(m_{j_1} \ldots m_{j_p}\right)^{-1/p}, \tag{7}$$

придем к оценке

$$\int_0^\pi \left(\sum_{j=1}^{N} u_j(x) \right)^p dx \le 2\, A^p \sum_{j_1=1}^{N} \ldots \sum_{j_p=1}^{N} \frac{1}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \left(m_{j_1} \ldots m_{j_p}\right)^{1-1/p} \le 2A^p \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} m_j^{1-1/p} \right)^p.$$

Таким образом, в силу сходимости ряда (5) интегралы

$$\int_0^\pi \left(\sum_{j=1}^{N} u_j(x) \right)^p dx$$

ограничены величиной, не зависящей от N, и, значит, согласно теореме Б. Леви функция $g_\Lambda(x)$ принадлежит $L^p[0,\pi]$.

Теорема доказана.

Вопросы о принадлежности функции $g_\Lambda(x)$ пространствам $L^p[0,\pi]$ при нецелых $p>1$ и о необходимых условиях при целых $p\geq 2$ остаются открытыми.

3. Интегрируемость функции g_Λ с весом. Задачи об интегрируемости функции $g_\Lambda(x)$ с весом $x^{-\gamma}$ будем рассматривать при естественном условии $\gamma<1$.

Теорема 2. *Если для $\gamma\in(0,1)$ сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}m_j^{\gamma},$$

то сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{x^{\gamma}}g_\Lambda(x)\,dx. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{x^{\gamma}}g_\Lambda(x)\,dx=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{x^{\gamma}}u_j(x)\,dx. \tag{9}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, разбиваем $[0,\pi]$ при каждом j на отрезки $[0,\alpha_j]$ и $[\alpha_j,\pi]$ и, используя оценку (6), находим

$$\int\limits_0^{\alpha_j}\frac{1}{x^{\gamma}}u_j(x)\,dx\leq A\int\limits_0^{\alpha_j}\frac{1}{x^{\gamma}}\frac{m_j}{n_j}\,dx=\frac{A}{1-\gamma}\frac{m_j}{n_j}\alpha_j^{1-\gamma}$$

и

$$\int\limits_{\alpha_j}^{\pi}\frac{1}{x^{\gamma}}u_j(x)\,dx\leq A\int\limits_{\alpha_j}^{\pi}\frac{1}{x^{\gamma}}\frac{1}{n_jx}\,dx<\frac{A}{\gamma n_j}\alpha_j^{-\gamma}.$$

При $\alpha_j=m_j^{-1}$ из (9) следует оценка

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{x^{\gamma}}g_\Lambda(x)\,dx\leq A(\gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}m_j^{\gamma},$$

в которой множитель $A(\gamma)$ зависит только от γ.

Теорема доказана.

Если $p>1$ и p' — сопряженное с p число, то согласно неравенству Гельдера интеграл (8) сходится, если $g_\Lambda(x)\in L^p[0,\pi]$ и $\gamma p'<1$. Последнее условие означает, что

$$\gamma<1-\frac{1}{p}. \tag{10}$$

Таким образом, из теоремы 1 следует, что если при $p = 2, 3, \ldots$ сходится ряд (5), то интеграл (8) сходится при условии (10), а теорема 2 показывает, что если сходится ряд (5), то интеграл (8) сходится и при

$$\gamma = 1 - \frac{1}{p}.$$

Дополним теперь теорему 1, рассмотрев вопрос о сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} g_\Lambda^p(x)\, dx \tag{11}$$

при $\gamma < 1$.

Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 1, при $p = 2, 3, \ldots$ имеем

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} \left(\sum_{j=1}^N u_j(x) \right)^p dx = \sum_{j_1=1}^N \ldots \sum_{j_p=1}^N \int\limits_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx.$$

Используя оценку (6), при $\gamma > 1 - p$ для $\alpha \in (0, \pi)$ находим

$$\int\limits_0^\alpha \frac{1}{x^\gamma} u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx \le$$

$$\le A^p \int\limits_0^\alpha \frac{1}{x^\gamma} \frac{m_{j_1}}{n_{j_1}} \ldots \frac{m_{j_p}}{n_{j_p}}\, dx = A^p \frac{m_{j_1}}{n_{j_1}} \ldots \frac{m_{j_p}}{n_{j_p}} \frac{1}{1-\gamma} \alpha^{1-\gamma} \tag{12}$$

и

$$\int\limits_\alpha^\pi \frac{1}{x^\gamma} u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx \le$$

$$\le \frac{A^p}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \int\limits_\alpha^\pi \frac{dx}{x^{\gamma+p}} < \frac{A^p}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \frac{1}{(\gamma + p - 1)} \alpha^{1-\gamma-p}. \tag{13}$$

Из этих оценок при α, заданном формулой (7), получаем

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} \left(\sum_{j=1}^N u_j(x) \right)^p dx \le A(p, \gamma) \sum_{j_1=1}^N \ldots \sum_{j_p=1}^N \frac{1}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} (m_{j_1} \ldots m_{j_p})^{1-\frac{1}{p}(1-\gamma)},$$

где $A(p, \gamma)$ зависит только от p и γ.

Следовательно,

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} \left(\sum_{j=1}^N u_j(x) \right)^p \le A(p, \gamma) \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{n_j} m_j^{1-\frac{1}{p}(1-\gamma)} \right)^p.$$

Опираясь, как и в доказательстве теоремы 1, на теорему Б. Леви, видим, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *При целых* $p = 2, 3, \ldots$ *и* γ, *удовлетворяющих условию* $1 - p < \gamma < 1$, *интеграл* (11) *сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} m_j^{1 - \frac{1}{p}(1-\gamma)}.$$

В доказательстве теоремы 3 условие $\gamma > 1 - p$ было использовано по существу. Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = 1 - p$.

Теорема 4. *При целых* $p = 2, 3, \ldots$ *и* $\gamma = 1 - p$ *интеграл* (11) *сходится, если сходится ряд* (4).

Доказательство. Выше отмечалось, что при $p = 1$ такое утверждение доказано в [3].

При $\gamma = 1 - p$ оценка (12) принимает вид

$$\int\limits_0^{\alpha} \frac{1}{x^{1-p}} u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx \le A^p \frac{m_{j_1}}{n_{j_1}} \ldots \frac{m_{j_p}}{n_{j_p}} \frac{1}{p} \alpha^p,$$

а вместо (13) получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\pi} \frac{1}{x^{1-p}} u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx \le \frac{A^p}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \int\limits_{\alpha}^{\pi} \frac{dx}{x} = \frac{A^p}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \log \frac{\pi}{\alpha}.$$

Выбрав α согласно (7), находим

$$\log \frac{\pi}{\alpha} = \log \pi + \frac{1}{p} \log \left(m_{j_1} \ldots m_{j_p} \right).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^{1-p}} u_{j_1}(x) \ldots u_{j_p}(x)\, dx \le \frac{A^p}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \left(\frac{1}{p} + \log \pi + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \log m_{j_i} \right).$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^{1-p}} g_{\Lambda}^p(x)\, dx \le C A^p \sum_{j_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_p=1}^{\infty} \frac{1}{n_{j_1} \ldots n_{j_p}} \sum_{i=1}^{p} \log m_{j_i} = C A^p \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} \right)^{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log m_j}{n_j},$$

где C — некоторая абсолютная постоянная.

Теорема доказана.

1. *Теляковский С. А.* О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Труды Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 378 – 386.
2. *Белов А. С., Теляковский С. А.* Усиление теорем Дирихле – Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Мат. сб. – 2007. – **198**, № 6. – С. 25 – 40.
3. *Telyakovskii S. A.* Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1–2. – P. 215 – 218.
4. *Trigub R. M.* A note on the paper of Telyakovskii “Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation” // East J. Approxim. – 2007. – **13**, № 1. – P. 1 – 6.
5. *Белов А. С.* О сумме модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами // Вестн. Иванов. гос. ун-та. Биология, Химия, Физика, Математика. – 2006. – Вып. 3. – С. 107 – 121.
6. *Теляковский С. А.* Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации. II // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2005. – **11**, № 2. – С. 168 – 174.

Получено 13.12.11