УДК 512.6

М. Ю. Раєвська, Я. П. Сисак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ З МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЮ ГРУПОЮ МІЛЛЕРА – МОРЕНО

A near-ring R with identity is local if the set L of all its noninvertible elements is a subgroup of the additive group R^+. We study the local near-rings of order 2^n whose multiplicative group R^* is a Miller – Moreno group, i.e., a non-abelian group all proper subgroups of which are abelian. In particular, it is proved that if L is a subgroup of index 2^m in R^+, then either m is a prime for which $2^m - 1$ is a Mersenna prime or $m = 1$. In the first case $n = 2m$, the subgroup L is elementary abelian, the exponent of R^+ does not exceed 4, and R^* is of order $2^m(2^m - 1)$). In the second case either $n < 7$ or the subgroup L is abelian and R^* is a nonmetacyclic group of order 2^{n-1} and of exponent at most 2^{n-4}.

Почти-кольцо R с единицей локально, если множество L всех его необратимых элементов является подгруппой аддитивной группы R^+. Изучаются локальные почти-кольца порядка 2^n, мультипликативная группа R^* которых является группой Миллера – Морено, т. е. неабелевой группой, все собственные подгруппы которой абелевы. Доказано, в частности, что если L — подгруппа индекса 2^m в R^+, то либо m — простое число, для которого $2^m - 1$ является простым числом Мерсенна, либо $m = 1$. В первом случае $n = 2m$, подгруппа L элементарная абелева, экспонента группы R^+ не превышает 4 и порядок группы R^* равен $2^m(2^m - 1)$. Во втором случае либо $n < 7$, либо подгруппа L абелева, а R^* — неметациклическая группа порядка 2^{n-1} и экспоненты не выше 2^{n-4}.

1. Вступ. Майже-кільця — це множини з двома бінарними операціями, додаванням та множенням, що задовольняють всі аксіоми асоціативного кільця, за винятком комутативності додавання та одного (в даному випадку правого) дистрибутивного закону. Типовим прикладом майже-кільця є множина Map(G) всіх відображень деякої групи G в себе відносно операцій їх додавання, яке індукується операцією групи, та множення, що є композицією відображень. В той час як теорія асоціативних кілець — це по суті вивчення лінійних відображень на абелевих групах, майже-кільця можна розглядати як нелінійний аналог теорії кілець, який вивчає загальний випадок довільних відображень на групах.

Нагадаємо, що кільце R з одиницею, множина L всіх необоротних елементів якого утворює ідеал в R, а отже фактор-кільце R/L є тілом, називається локальним кільцем. Як легко переконатися, в означенні локального кільця достатньо насправді припускати, що L є тільки підгрупою адитивної групи кільця R. Замінивши в ньому слово „кільце" на „майже-кільце", отримаємо означення локальних майже-кілець, вивчення яких уперше було ініційовано К. Мексоном [11]. Майже-поля — це локальні майже-кільця, множина всіх необоротних елементів яких складається з одного нуля. Зокрема, кожне тіло є майже-полем. Перші приклади скінченних майже-полів, які не є полями, а отже, мультиплікативна група яких є неабелевою, були побудовані Л. Діксоном ще на початку минулого століття в роботі [6], присвяченій питанню незалежності аксіом поля. В подальшому майже-поля вивчались головним чином через їх застосування в геометрії, інформацію про які можна почерпнути з 20-ї глави книги М. Холла [2], де міститься також класифікація мультиплікативних груп скінченних майже-полів, яка була отримана К. Цассенхаузом в [16].

Очевидно, що майже-поле з абелевою мультиплікативною групою є полем. Локальні майже-кільця, мультиплікативна група яких є абелевою і які не є кільцями, вивчались О. Городником [8]. Ним, зокрема, доведено, що множина всіх необоротних елементів такого майже-кільця утворює абелеву підгрупу індексу 2 в його адитивній групі. Наступним природним кроком є дослідження локальних майже-кілець, мультиплікативна група яких є мінімальною неабелевою або, в іншій термінології, групою Міллера – Морено. Випадок, коли адитивна група такого майже-кільця є p-групою з $p \neq 2,$ розглядався в [1]. Крім того, в [3] описано локальні майже-кільця з мультиплікативною групою діедра, а в [14] — з мультиплікативною групою, що є узагальненою групою кватерніонів. У даній статті вивчаються локальні майже-кільця порядку 2^n з мультиплікативною групою Міллера – Морено.

Скрізь нижче $|A|$ — число елементів множини $A,$ $\Phi(A)$ — підгрупа Фраттіні групи $A,$ $Z(A)$ — центр групи A та $|A : B|$ — індекс підгрупи B в групі $A.$

2. Попередні результати. Нагадаємо спочатку основні означення, що стосуються майже-кілець та пов'язаних з ними груп.

Означення 1. *Множина R з двома бінарними операціями $+$ та $\cdot$ називається* (*лівим*) *майже-кільцем, якщо*:

1) $(R, +) = R^+$ *— група з нейтральним елементом* $0,$

2) $(R, \cdot)$ *— напівгрупа,*

3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *для всіх* $x, y, z \in R.$

З умови 3 означення випливає, що для кожної підгрупи M групи R^+ та кожного елемента $x \in R$ множина $xM = \{x \cdot y | y \in M\}$ є підгрупою в R^+ і, зокрема, $x \cdot 0 = 0.$ Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0 \cdot x = 0,$ та *майже-кільцем з одиницею* $i,$ якщо напівгрупа $(R, \cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом $i.$

Лема 1. *Нехай R — майже-кільце з одиницею i. Тоді в групі автоморфізмів $\mathrm{Aut}R^+$ існує підгрупа $A,$ яка ізоморфна мультиплікативній групі R^* та задовольняє умову $i^A = \{i^a \mid a \in A\} = R^*.$*

Доведення. За умовою 3 означення для кожного $s \in R$ відображення $\hat{s} \colon r \mapsto s^{-1}r$ з $r \in \in R$ є автоморфізмом групи $R^+.$ Крім того, відповідність $s \mapsto \hat{s}$ визначає мономорфізм групи R^* в групу $\mathrm{Aut}\, R^+,$ оскільки для довільних $s, t \in R^*$ маємо $r^{\hat{st}} = (st)^{-1}r = t^{-1}(s^{-1}r) = = t^{-1}(r^{\hat{s}}) = (r^{\hat{s}})^{\hat{t}}$ та з рівності $i^{\hat{s}} = i$ випливає $s = i.$ Отже, якщо A — образ групи R^* відносно відображення $\hat{}$, то $i^A = \{i^{\hat{s}} = s^{-1} \mid s \in R^*\} = R^*,$ що і доводить лему.

Підгрупу $A,$ визначену в лемі 1, будемо називати *групою автоморфізмів групи $R^+,$ асоційованою з групою R^**.

Як і для кілець, гомоморфізми майже-кілець — це гомоморфізми їх адитивних груп та мультиплікативних напівгруп одночасно. Зокрема, якщо α — гомоморфізм майже-кільця $R,$ то його ядро $\mathrm{Ker}\,\alpha$ — нормальна підгрупа в $R^+,$ яка називається *ідеалом* майже кільця $R.$ Легко перевірити, що *нормальна підгрупа I із R^+ є ідеалом в R тоді і тільки тоді, коли для всіх $r, s \in R$ та $x \in I$ справедливо $rx \in I$ та $(r + x)s - rs \in I$*. Підгрупа M із R^+ називається *R^*-інваріантною*, якщо $rM \leq M$ для кожного $r \in R^*,$ та *(R, R)-підгрупою*, якщо $xMy \subseteq M$ для довільних $x, y \in R.$

Означення 2. *Майже-кільце R з одиницею називається локальним, якщо множина $L = R\setminus R^*$ всіх необоротних елементів із R утворює підгрупу адитивної групи R^+, та майже-полем, якщо $L = 0$.*

Як відомо [16], адитивна група скінченного майже-поля елементарна абелева. Очевидно також, що якщо підгрупа L є ідеалом локального майже-кільця R, то R/L є майже-полем. Наступна лема, яка випливає з [3] (див. леми 3.2, 3.5, 3.9 та наслідок 3.8), характеризує основні властивості скінченних локальних майже-кілець.

Лема 2. *Нехай R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — підгрупа в R^+ всіх необоротних елементів із R. Тоді R^+ — p-група для деякого простого p, експонентою якої є адитивний порядок одиниці i, та справджуються наступні твердження*:

1) *L — ідеал в R та (R,R)-підгрупа в R^+*;

2) *кожна власна R^*-інваріантна підгрупа із R^+ міститься в L*;

3) *множина $i+L$ утворює нормальну силовську p-підгрупу мультиплікативної групи R^**;

4) *фактор-група $R^*/i+L$ ізоморфна мультиплікативній групі майже-поля R/L.*

Зазначимо, що локальні майже-кільця з циклічною підгрупою L розглядалися в [1], де встановлено, зокрема, що адитивна група такого майже-кільця R або циклічна порядку p^n з $n \geq 1$, або є елементарною абелевою групою порядку p^2. Звідси та з [5] випливає, що в першому випадку R є локальним кільцем, ізоморфним кільцю лишків $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, а в другому, згідно з [12], існує в точності p неізоморфних майже-кілець R з $|L| = p$, з яких $p-1$ є нуль-симетричними. Що стосується майже-полів порядку p^2, то їх класифікація випливає з [16].

Нагадаємо також, що скінченна група називається групою Міллера – Морено, якщо вона неабелева, а всі її власні підгрупи є абелевими. Будова таких груп є відомою і повністю описується наступною теоремою (див. [13]).

Теорема 1. *Скінченні групи Міллера – Морено вичерпуються групами наступних типів*:

1) *групою кватерніонів Q_8*;

2) *групою $G = \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$ порядку p^{m+n} з $a^{p^m} = b^{p^n} = 1$ та $b^{-1}ab = a^{1+p^{m-1}}$, де $m \geq 2$ та $n \geq 1$*;

3) *групою $G = (\langle a\rangle \times \langle c\rangle) \rtimes \langle b\rangle$ порядку p^{m+n+1} з $a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = 1$, $b^{-1}ab = ac$ та $b^{-1}cb = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m+n > 2$ при $p = 2$*;

4) *групою $G = P \rtimes \langle b\rangle$ порядку $p^r q^s$ з елементарною абелевою підгрупою P порядку p^r, на якій елемент b індукує незвідний автоморфізм простого порядку q, причому $b^{q^s} = 1$ та $\langle b^q\rangle = Z(G)$, де p, q — різні прості та r, s — натуральні числа.*

3. Групи автоморфізмів, асоційовані з мультиплікативними 2-групами локальних майже-кілець. Нехай R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — група всіх необоротних елементів із R. Тоді за лемою 2 адитивна група R^+ є p-групою з нормальною підгрупою L, елементарною абелевою фактор-групою R^+/L та експонентою, що дорівнює порядку елемента i. Якщо A — група автоморфізмів групи R^+, асоційована з мультиплікативною групою R^*, то за лемою 1 $R^+ = i^A \cup L$. Тому вивчення локальних майже-кілець в значній мірі зводиться до вивчення скінченних p-груп K з нормальною підгрупою L, група автоморфізмів $\mathrm{Aut}\, K$ яких містить таку підгрупу A порядку $|K| - |L|$, що $K = i^A \cup L$ для деякого елемента i максимального порядку в K.

В даному пункті ми розглянемо випадок, коли K є 2-групою з підгрупою L індексу 2, в якому група автоморфізмів A є групою порядку $|K| - |L| = |L|$, тобто також 2-групою. Наступні дві леми — це реалізація вказаної схеми для груп порядків 64 та 128 за допомогою обчислень, виконаних з використанням системи комп'ютерної алгебри GAP, версія 4.4.12.

Лема 3. *Нехай K — нециклічна група порядку 64, група автоморфізмів $\mathrm{Aut}\, K$ якої містить підгрупу A порядку 32. Якщо в групі K існують елемент i максимального порядку та підгрупа L індексу 2 такі, що $K = i^A \cup L$, то підгрупа A є неметациклічною.*

Лема 4. *Нехай K — група порядку 128 та A — силовська 2-підгрупа її групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}\, K$. Якщо в K існують елемент i максимального порядку та підгрупа L індексу 2 такі, що $K = i^A \cup L$, то A не містить підгруп Міллера–Морено порядку 64 та експоненти 16.*

Спираючись на лему 3, як базу індукції, отримуємо таке твердження.

Лема 5. *Нехай K — нециклічна група порядку 2^n, група автоморфізмів $\mathrm{Aut}\, K$ якої містить метациклічну підгрупу A порядку 2^{n-1}. Якщо в групі K існують елемент i максимального порядку та підгрупа L індексу 2 такі, що $K = i^A \cup L$, то $n \leq 5$.*

Доведення. Оскільки $2^n = |K| \leq |i^A| + 2^{n-1}$ та $|i^A| \leq 2^{n-1}$, то $|i^A| = 2^{n-1}$ і тому $C_A(i) = 1$ та $i^A = iL$. Звідси $L = K \backslash i^A$, так що L є A-інваріантною нормальною підгрупою в K. Оскільки підгрупа Фраттіні $\Phi(K)$ є власною підгрупою в L та характеристичною в K, а отже A-інваріантною, то існує A-інваріантна підгрупа M індексу 2 в L, яка містить $\Phi(K)$ та нормальна в K. Тоді $iM \subseteq iL = i^A$, і тому існує така підмножина B із A, що $iM = i^B$. Покажемо, що насправді B є підгрупою індексу 2 в A.

Дійсно, якщо $a, b \in B$, то $i^a = ix$ та $i^b = iy$ для деяких $x, y \in M$. Тоді $i^{ab} = i^b x^b = i(yx^b) \in iM$, і тому $ab \in B$. Аналогічно, $i = i^{a^{-1}} x^{a^{-1}}$, звідки $i^{a^{-1}} = i(x^{-1})^{a^{-1}} \in iM$, тобто $a^{-1} \in B$. Отже, B — підгрупа в A, а тому з рівностей $C_A(i) = 1$ та $iM = i^B$ випливає $|B| = |M| = 2^{n-2}$, що і потрібно було показати.

Покладемо тепер $N = \langle i \rangle M$. Оскільки фактор-група $K/\Phi(K)$, а отже і K/M, елементарна абелева, то $i^2 \in M$ і тому M — підгрупа індексу 2 в N. Звідси $N = iM \cup M = i^B \cup M$ і, таким чином, N — група порядку 2^{n-1}, група автоморфізмів $\mathrm{Aut}\, N$ якої містить метациклічну підгрупу B порядку 2^{n-2} та задовольняє умови леми. Отже, якщо існує група порядку 2^n з $n > 5$, що задовольняє умови леми, то існує і група порядку 2^{n-1}, яка теж задовольняє аналогічні умови. Оскільки за лемою 3 груп порядку $64 = 2^6$ з такими умовами не існує, то звідси випливає, що $n \leq 5$.

Лему 5 доведено.

Наступне твердження доведено в [9].

Лема 6. *Нехай G — скінченна p-група та N — її нормальна підгрупа, що міститься в підгрупі Фраттіні $\Phi(G)$ групи G. Якщо центр $Z(N)$ циклічний, то підгрупа N є циклічною.*

Леми 4 та 6 покладено в основу останнього твердження цього пункту.

Лема 7. *Нехай K — група порядку 2^{n+1}, група автоморфізмів $\operatorname{Aut} N$ якої містить неметациклічну підгрупу Міллера – Морено A порядку 2^n та експоненти 2^{n-2}. Якщо в групі K існують елемент i максимального порядку та нециклічна підгрупа L індексу 2 такі, що $K = i^A \cup L$, то $n \leq 5$.*

Доведення. Згідно з теоремою 1 $A = (\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, де $a^{2^{n-2}} = b^2 = c^2 = 1$ та $b^{-1}ab = ac$. Крім того, L — A-інваріантна нормальна підгрупа в K порядку 2^n та $i^A = iL$, як показано в доведенні леми 5. Тому $L = i^{-1}i^A = [i, A]$ — нормальна підгрупа напівпрямого добутку $G = K \rtimes A$, що міститься в його комутанті G', а отже і в підгрупі Фраттіні $\Phi(G)$. Звідси за лемою 6 випливає, що центр $Z(L)$ є нециклічним, і тому існує нормальна в G елементарна абелева підгрупа E порядку 4, що міститься в $Z(L)$.

Припустимо, що $n > 5$, і розглянемо централізатор $C_{\langle a \rangle}(L)$ підгрупи L в $\langle a \rangle$. Якщо $C_{\langle a \rangle}(L) = 1$, то a індукує в L автоморфізм порядку 2^{n-2}, і тому за лемою 9 роботи [4] фактор-група L/E є або діедральною групою, або узагальненою групою кватерніонів. Зокрема, її центр $Z(L/E)$ — циклічна підгрупа порядку 2. З іншого боку, L/E — нормальна підгрупа фактор-групи G/E, що міститься в її підгрупі Фраттіні $\Phi(G/E)$, а тому за лемою 6 її центр є циклічним лише у випадку, коли L/E циклічна. Отримана суперечність означає, що $C_{\langle a \rangle}(L) \neq 1$, звідки $[a^{2^{n-3}}, L] = 1$. З цієї ж причини $[i^{-1}a^{2^{n-3}}i, L] = 1$.

Нехай V — підгрупа в G, породжена елементами $a^{2^{n-3}}$ та $i^{-1}a^{2^{n-3}}i$. Тоді $V = \langle a^{2^{n-3}} \rangle \times \langle i^{-1}a^{2^{n-3}}i \rangle$ — нормальна в G елементарна абелева підгрупа порядку 4, оскільки $i^2 \in L$. Крім того, $K \cap V = \langle x \rangle$, де $x = i^{-1}i^{a^{2^{n-3}}}$, — нормальна в G підгрупа порядку 2. Розглянемо фактор-групу $\bar{G} = G/V$, в якій покладемо $\bar{K} = KV/V$, $\bar{i} = iV$, $\bar{L} = LV/V$ та $\bar{A} = AV/V$. Тоді $\bar{K} = \bar{i}^{\bar{A}} \cup \bar{L}$ та $C_{\bar{A}}(\bar{K}) = 1$. Очевидно також, що $\bar{K} \simeq K/\langle x \rangle$ та $\bar{A} \simeq A/\langle a^{2^{n-3}} \rangle$. Тому $\bar{K}$ — група порядку 2^n з групою автоморфізмів $\bar{A}$, що є неметациклічною групою Міллера – Морено порядку 2^{n-1} та експоненти 2^{n-3}, для яких виконуються умови леми. Оскільки за лемою 4 групи порядку $128 = 2^7$, що задовольняють такі умови, не існують, то звідси випливає, що $n \leq 5$.

Лему 7 доведено.

4. Локальні майже-кільця, мультиплікативна група яких є 2-групою. Скрізь у цьому пункті R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — підгрупа в R^+ всіх його необоротних елементів.

Лема 8. *Нехай R — локальне майже-кільце, мультиплікативна група R^* якого є 2-групою. Тоді R^+ — 2-група, L — підгрупа індексу 2 в R^+ та $R^* = i + L$.*

Доведення. Оскільки за лемою 2 R^+ є групою порядку p^n з простим числом p та $n \geq 1$, то $|L| = p^m$ для деякого $1 \leq m < n$, звідки $p^n - p^m = |R^*| = 2^k$ для деякого $k \geq 1$. Очевидно, остання рівність має місце лише при $p = 2$ та $k = m = n - 1$, а тому R^+ — група порядку 2^n, L — її підгрупа індексу 2 та $R^* = i + L$.

Лема 9. *Нехай R — локальне майже-кільце, мультиплікативна група R^* якого є метациклічною 2-групою. Якщо адитивна група R^+ нециклічна, то $|R| = 2^n$ з $n \leq 5$.*

Доведення. За лемою 8 R^+ — група порядку 2^n для деякого $n \geq 1$, L — підгрупа індексу 2 в R^+ та $R^* = i + L$. Нехай A — підгрупа в $\mathrm{Aut}\, R^+$, асоційована з групою R^*. Тоді $R^+ = i^A \cup L$ за лемою 1, $|A| = 2^{n-1}$ та i є елементом максимального порядку в групі R^+. Отже, якщо група R^+ нециклічна, то за лемою 5 $n \leq 5$.

Лема 10. *Нехай R — локальне майже-кільце та M — підгрупа його адитивної групи R^+. Якщо множина $i + M$ міститься в мультиплікативній групі R^* та централізується в ній елементом $-i$, то підгрупа M є абелевою.*

Доведення. Дійсно, для довільного $x \in M$ маємо $-i+(-i)x = (-i)(i+x) = (i+x)(-i) = -x - i$, звідки $(-i)x = i - x - i$. Зокрема, $(-i)(x + y) = i - (x + y) - i$ для довільних $x,\ y \in M$. З іншого боку, внаслідок лівої дистрибутивності $(-i)(x + y) = (-i)x + (-i)y = (i - x - i) + (i - y - i) = i - x - y - i = i - (y + x) - i$. Отже, $x + y = y + x$, тобто підгрупа M є абелевою.

Лема 11. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку 2^{n+1}, мультиплікативна група R^* якого є неметациклічною 2-групою Міллера – Морено. Якщо підгрупа L неабелева, то R^* — група порядку 2^n та експоненти 2^{n-2}.*

Доведення. За лемою 8 L — підгрупа порядку 2^n та $i+L = R^*$. Отже, якщо L неабелева, то за лемою 10 $-i$ — нецентральний елемент в групі R^*. Оскільки остання є неметациклічною групою Міллера – Морено порядку 2^n та $(-i)^2 = i$, то за теоремою 1 $R^* = (\langle a\rangle \times \langle c\rangle) \rtimes \langle -i\rangle$ з $a^{2^{n-2}} = c^2 = i$ і, таким чином, R^* є групою експоненти 2^{n-2}.

Лема 12. *Якщо R — локальне майже-кільце порядку 2^{n+1}, мультиплікативна група R^* якого є неметациклічною 2-групою Міллера – Морено експоненти 2^{n-2}, то $n \leq 5$.*

Доведення. Нехай A — підгрупа в $\mathrm{Aut}\, R^+$, асоційована з групою R^*. Тоді за лемою 1 $R^+ = i^A \cup L$. Крім того, за лемою 8 L — підгрупа індексу 2 в R^+ та $R^* = i + L$. Отже, A — неметациклічна група Міллера – Морено порядку 2^n та експоненти 2^{n-2}. Оскільки i — елемент максимального порядку в R^+, то за лемою 7 $n \leq 5$.

5. Основні теореми. Як і в попередньому пункті, далі R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — підгрупа в R^+ всіх його необоротних елементів.

Теорема 2. *Нехай R — локальне майже-кільце, мультиплікативна група R^* якого є 2-групою Міллера – Морено. Тоді справджуються наступні твердження*:

1) *$|R| = 2^n$ з $n \geq 4$, L — підгрупа індексу 2 в R^+ та $R^* = i + L$ — група порядку 2^{n-1}*;

2) *якщо $n \geq 6$, то група R^* неметациклічна*;

3) *якщо $n \geq 7$, то підгрупа L абелева, а експонента групи R^* не перевищує 2^{n-4}.*

Доведення. Дійсно, перше твердження випливає з леми 8, друге — з леми 9 і третє — з леми 12.

Згідно з лемою 2, L тоді і тільки тоді є підгрупою індексу $|R\colon L| > 2$ в R^+, коли мультиплікативна група R^* не є 2-групою. Наступна лема характеризує будову майже-кільця R у цьому випадку.

Лема 13. *Якщо R — локальне майже-кільце порядку 2^n з $|R\colon L| > 2$ та мультиплікативною групою Міллера – Морено, то $n = 2m$ для такого простого числа m, що $2^m - 1$ є простим числом Мерсенна, експонента групи R^+ не перевищує 4 та L — елементарна абелева група порядку 2^m з $L^2 = 0$.*

Доведення. Дійсно, нехай $|R\colon L| = 2^m$ з $m > 2$. Тоді $|L| = 2^{n-m}$, звідки $|R^*| = 2^n - 2^{n-m} = 2^{n-m}(2^m - 1)$ і тому $|R^*\colon i + L| = 2^m - 1$. За лемою 2 $i + L$ — нормальна силовська 2-підгрупа в R^*, а отже, за теоремою Шура $R^* = (i + L) \rtimes K$ з підгрупою K порядку $2^m - 1$, ізоморфною мультиплікативній групі майже-поля R/L. Оскільки R^* є групою Міллера – Морено, то за теоремою 1 $K = \langle\, b\,\rangle$ — циклічна група порядку q^s для деякого простого числа q та $s \geq 1$. Таким чином, $2^m - 1 = q^s$, що на підставі основного результату роботи [10] можливо лише коли $s = 1$ та m — просте число. Зокрема, $|b| = q = 2^m - 1$. Крім того, за цією ж теоремою $i + L$ — елементарна абелева підгрупа в R^*, на якій елемент b індукує незвідний автоморфізм порядку $q = 2^m - 1$. Оскільки $|i + L| = 2^{n-m}$, то $q = 2^m - 1$ — примітивний простий дільник числа $2^{n-m} - 1$ (див., наприклад, [7], лема 5.6.3), що можливо лише при $n = n - m$, тобто $n = 2m$.

Далі, для кожного $0 \neq x \in L$ відображення $\hat{x} : r \mapsto xr$ з $r \in R$ є ендоморфізмом групи R^+, ядро $\mathrm{Ker}\,\hat{x}$ та образ xR якого за лемою 2 належать L, а тому $|\mathrm{Ker}\,\hat{x}| \leq |L| = 2^m$ та $|xR| \leq |L| = 2^m$. Враховуючи, що $\mathrm{Ker}\,\hat{x}$ є нормальною підгрупою в R^+ та $R^+/\mathrm{Ker}\,\hat{x} \simeq xR$, отримуємо $2^n = |R| = |\mathrm{Ker}\,\hat{x}||xR| \leq 2^{2m} = 2^n$, звідки $|\mathrm{Ker}\,\hat{x}| = |xR| = 2^m$. Отже, $\mathrm{Ker}\,\hat{x} = L = xR$. А оскільки R^+/L — елементарна абелева 2-група та $RL \subseteq L$ за лемою 2, звідси випливає $i + i = i \cdot 2 \in L$ та $L^2 = (xR)L \subseteq x(RL) = xL = 0$. Але тоді $x \cdot 2 = x + x = x \cdot i + x \cdot i = x \cdot (i + i) = 0$ для кожного $x \in L$ і тому L є елементарною абелевою 2-групою, а отже експонента групи R^+ не перевищує 4.

Лему 13 доведено.

Наступна теорема підсумовує результати, отримані в [1] (теорема 7), в теоремі 2 та лемі 13.

Теорема 3. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку 2^n, мультиплікативна група якого є групою Міллера – Морено, та L підгрупа всіх необоротних елементів з R. Тоді $n \geq 4$ та справджуються наступні твердження*:

1) *якщо R — майже-поле, то R^* — група Міллера – Морено порядку 63;*

2) *якщо $|R\colon L| > 2$, то R^+ — група порядку 2^{2p} та експоненти не вище 4, де p — просте число, для якого число $2^p - 1$ є простим числом Мерсенна, R^* — група Міллера – Морено порядку $2^p(2^p - 1)$ та L — елементарна абелева 2-група, в якій $xy = 0$ для всіх x, $y \in L$;*

3) *якщо $|R\colon L| = 2$, то при $n \geq 7$ підгрупа L абелева, а R^* — неметациклічна група Міллера – Морено порядку 2^{n-1} та експоненти не вище 2^{n-4}.*

1. *Раєвська М. Ю.* Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Міллера – Морено // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка. – 2011. – **25**. – С. 45 – 48.
2. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
3. *Amberg B., Hubert P., Sysak Ya. P.* Local near-rings with dihedral multiplicative group // J. Algebra. – 2004. – **273**. – P. 700 – 717.

4. *Baginski C., Malinowska I.* On groups of order p^n with automorphisms of order p^{n-2} // Demonstr. Math. – 1996. – **29**. – P. 365 – 375.
5. *Clay J. R., Malone J. J. (jr.)* The near-rings with identities on certain finite groups // Math. Scand. – 1966. – **19**. P. 146 – 150.
6. *Dickson L. E.* Definitions of a group and a field by independent postulates // Trans. Amer. Math. Soc. – 1905. – **6**. P. 198 – 204.
7. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper & Row, 1968. – 527 p.
8. *Gorodnik A.* Local near-rings with commutative groups of units // Houston J. Math. – 1999. – **25**. – P. 223 – 234.
9. *King B. W.* Normal subgroups of groups of prime-power order // Lect. Notes Math.: Proc. Second Int. Conf. Theory Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973). – Berlin: Springer, 1974. – **372**. – P. 401 – 408.
10. *Ligh S., Neal L.* A note on Mersenne numbers // Math. Mag. – 1974. – **47**. – P. 231 – 233.
11. *Maxson C. J.* On local near-rings // Math. Z. – 1968. – **106**. – S. 197 – 205.
12. *Maxson C. J.* Local near-rings of cardinality p^2 // Can. Math. Bull. – 1968. – **11**. – P. 555 – 561.
13. *Redei L.* Das “schiefe Produkt” in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören // Comment. math. helv. – 1947. – **20**. – S. 225 – 264.
14. *Sysak Ya. P., Di Termini S.* Local near-rings with generalized quaternion multiplicative group // Ric. mat. – 2007. – **56**. – P. 61 – 72.
15. *Sysak Ya. P.* Products of groups and local nearrings // Note Mat. – 2008. – **28**, № 2. – P. 177 – 211.
16. *Zassenhaus H.* Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1935/36. – **11**. – S. 187 – 220.

Одержано 26.10.11