УДК 512.662.5

Н. А. Хмельницкий (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О ЦЕПНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРОЕКТИВНЫХ ЦЕПНЫХ КОМПЛЕКСОВ

We obtain a necessary and sufficient condition for n-dimensional chain complexes composed of finitely generated projective modules to be stabilized by free modules to the chain equivalence.

Отримано необхідну та достатню умову того, коли n-вимірні ланцюгові комплекси, складені зі скінченнопороджених проективних модулів, можна стабілізувати вільними модулями до ланцюгової еквівалентності.

В работе рассматриваются n-мерные цепные комплексы (P_i, ∂_i), составленные из проективных модулей. Напомним, что цепные комплексы возникают в разных разделах математики, в частности в топологии при изучении гомотопических типов клеточных пространств. Кокрофт и Свон [1] доказали, что гомотопически эквивалентные проективные (свободные) комплексы можно стабилизировать проективными (свободными) модулями до цепной эквивалентности, и применили этот результат к изучению гомотопических типов неодносвязных двумерных CW-комплексов.

Цель данной работы — показать, что проективные цепные комплексы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ можно стабилизировать свободными модулями до цепной эквивалентности тогда и только тогда, когда для каждого $i = \overline{0, n}$ модули P_i и P'_i стабильно изоморфны. Напомним необходимые понятия и факты.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, а M — левый R-модуль. Семейство элементов $\{m_i \in M | i \in I\}$, порождающее модуль M, называется системой образующих модуля M. Если же прямая сумма включений $Rm_i \to M$, $i \in I$, задает изоморфизм

$$f\colon \underset{i\in I}{\oplus} Rm_i \to M,$$

то семейство $\{m_i \in M | i \in I\}$ называется базисом модуля M, а мощность множества I — базисным числом модуля M. Базисное число, вообще говоря, зависит от выбора базиса, и поэтому не может служить инвариантом свободного модуля $F = R^n$, $n \in \mathbb{N}$. Кольцо R такое, что базисное число любого свободного модуля определено однозначно, называется IBN-кольцом или кольцом с инвариантным базисным числом. Известно [2, с. 168], что IBN-кольцами являются все нетеровые кольца, коммутативные кольца и кольца, имеющие нетривиальный гомоморфизм в IBN-кольцо. В частности, все целочисленные групповые кольца $\mathbb{Z}[G]$ будут IBN-кольцами, поскольку аугментация является нетривиальным гомоморфизмом в IBN-кольцо $\mathbb{Z}$.

В данной работе везде предполагается, что все кольца являются IBN-кольцами и все модули над кольцами конечно порождены. Также будем считать, что нулевые модули и только они являются свободными модулями ранга 0.

Модуль P над кольцом R называется проективным, если существует R-модуль Q такой, что $P \oplus Q$ — свободный R-модуль. Справедливо следующее утверждение, известное как лемма Шануэля (см., например, [3, с. 222]).

© Н. А. ХМЕЛЬНИЦКИЙ, 2012

Предложение 1. *Пусть*

$$0 \to N_1 \to P_1 \to M \to 0$$

и

$$0 \to N_2 \to P_2 \to M \to 0$$

— точные последовательности R-модулей с проективными модулями P_1 и P_2. Тогда $P_1 \oplus N_2 \simeq \simeq P_2 \oplus N_1$.

Далее, пусть R — кольцо, а F, L, M — R-модули. Утолщением гомоморфизма $f\colon F \to M$ с помощью модуля L называется гомоморфизм $\widehat{f}\colon F \oplus L \to M$ такой, что $\widehat{f}|_{F\oplus 0} = f$ и $\widehat{f}|_{0\oplus L} = 0$. Стабилизацией гомоморфизма $f\colon F \to M$ с помощью модуля L называется гомоморфизм $f^{st}\colon F \oplus L \to M \oplus L$ такой, что $f^{st} = f \oplus \mathrm{id}$.

Эпиморфизмы R-модулей $f\colon F \to M$ и $g\colon F \to M$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм $\varphi\colon F \to F$ такой, что $f = g \circ \varphi$. В работе [4, с. 63] доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $f\colon F \to M$ и $g\colon G \to M$ — произвольные эпиморфизмы, где F и G — свободные R-модули. Тогда утолщение эпиморфизма f с помощью модуля G эквивалентно утолщению эпиморфизма g с помощью модуля F.*

Два R-модуля P_1 и P_2 называются стабильно изоморфными, если существуют два натуральных числа m и n такие, что $P_1 \oplus R^m \simeq P_2 \oplus R^n$.

Лемма 1. *Пусть P_1 и P_2 — два стабильно изоморфных проективных R-модуля, а Q_1 и Q_2 — их дополнения до свободных модулей. Тогда Q_1 и Q_2 стабильно изоморфны.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — свободные R-модули такие, что $P_1 \oplus F_1 \simeq P_2 \oplus F_2$. Рассмотрим точные последовательности

$$0 \to Q_1 \to Q_1 \oplus P_1 \oplus F_1 \to P_1 \oplus F_1 \to 0$$

и

$$0 \to Q_2 \to Q_2 \oplus P_2 \oplus F_2 \to P_2 \oplus F_2 \to 0,$$

где $Q_1 \oplus P_1 \oplus F_1$ и $Q_2 \oplus P_2 \oplus F_2$ — свободные модули. Тогда по лемме Шануэля

$$Q_1 \oplus (Q_2 \oplus P_2 \oplus F_2) \simeq Q_2 \oplus (Q_1 \oplus P_1 \oplus F_1),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть заданы два эпиморфизма*

$$\begin{tikzcd} & & P_1 \arrow[dl, "f_1"'] \\ 0 & M \arrow[l] & \\ & & P_2 \arrow[ul, "f_2"] \end{tikzcd} \tag{1}$$

конечнопорожденных проективных модулей P_1 и P_2 на модуль M. Тогда для того чтобы существовали утолщения гомоморфизмов f_1 и f_2 с помощью свободных модулей F_1 и F_2 такие, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& & P_1 \oplus F_1 \arrow[dl, "f_1\oplus\, 0"'] \arrow[dd, "g"] \\
0 & M \arrow[l] & \\
& & P_2 \oplus F_2\ , \arrow[ul, "f_2\oplus\, 0"]
\end{tikzcd} \tag{2}$$

где g — изоморфизм, необходимо и достаточно, чтобы проективные модули P_1 и P_2 были стабильно изоморфными.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть имеет место диаграмма (2). Тогда, очевидно, в силу определения модули P_1 и P_2 будут стабильно изоморфными.

Достаточность. Пусть P_1 и P_2 — стабильно изоморфные проективные модули, а Q_1 и Q_2 — модули, дополняющие их до свободных модулей. По лемме 1 существуют свободные модули $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ такие, что $Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1 \simeq Q_2 \oplus \mathfrak{F}_2$. Утолщая гомоморфизмы f_1 и f_2 с помощью модуля $Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1$, диаграмму (1) можно представить в виде

$$\begin{tikzcd}
& & P_1 \oplus (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \arrow[dl, "f_1\oplus\, 0"'] \\
0 & M \arrow[l] & \\
& & P_2 \oplus (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1)\ , \arrow[ul, "f_2\oplus\, 0"]
\end{tikzcd} \tag{3}$$

где $P_1 \oplus (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1)$ и $P_2 \oplus (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \simeq P_2 \oplus (Q_2 \oplus \mathfrak{F}_2)$ — свободные модули. По предложению 2 диаграмму (3) можно дополнить до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& & P_1 \oplus A \arrow[dl, "f_1\oplus\, 0"'] \arrow[dd, "\partial"] \\
0 & M \arrow[l] & \\
& & P_2 \oplus B\ , \arrow[ul, "f_2\oplus\, 0"]
\end{tikzcd}$$

где $A = (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \oplus (P_2 \oplus Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1)$, $B = (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \oplus (P_1 \oplus Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1)$, а $\partial\colon P_1 \oplus A \to P_2 \oplus B$ — изоморфизм. Утолщая в последней диаграмме гомоморфизмы $f_1 \oplus 0$ и $f_2 \oplus 0$ с помощью модуля P_1, получаем диаграмму (2), где $F_1 = A \oplus P_1$, $F_2 = B \oplus P_1$ — свободные модули, а $g = \partial \oplus \mathrm{id}$ — изоморфизм.

Лемма доказана.

Пусть $f\colon P \to Q$ и $\widetilde{f}\colon P \oplus A \to Q \oplus B$ — гомоморфизмы R-модулей. Будем говорить, что отображение $\widetilde{f}$ сохраняет отображение f, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & P \oplus A \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ Q & Q \oplus B \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd},$$

где ι — вложение, а π — проекция. Легко видеть, что отношение „сохранять отображение" является транзитивным, т. е. если отображение h сохраняет отображение g, а отображение g — отображение f, то h сохраняет f. Очевидно также, что стабилизация $f^{st} = f \oplus \mathrm{id} \colon P \oplus A \to Q \oplus A$ гомоморфизма $f \colon P \to Q$ с помощью модуля A сохраняет отображение f.

Пусть $f \colon P \to Q$ и $g \colon Q \to P$ — гомоморфизмы R-модулей. Отображение $\widetilde{f} : P \oplus Q \to Q \oplus P$, заданное соотношением

$$\widetilde{f}(p \oplus q) = (fp + (1 - fg)q) \oplus (p - gq),$$

где $p \oplus q \in P \oplus Q$, называется изоморфизмом Шануэля, построенным на отображениях f и g (см., например, [1]). Легко проверить, что $\widetilde{f}$ действительно изоморфизм, так как обратным к нему является изоморфизм Шануэля $\widetilde{g}$, построенный на отображениях g и f. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $f \colon P \to Q$ и $g \colon Q \to P$ — гомоморфизмы R-модулей, а $\widetilde{f} \colon P \oplus Q \to Q \oplus P$ — изоморфизм Шануэля, построенный на отображениях f и g. Тогда $\widetilde{f}$ сохраняет отображение f.*

Доказательство. Проверим коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & P \oplus Q \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ Q & Q \oplus P \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd},$$

где ι — вложение, а π — проекция. Действительно, $\pi \widetilde{f} \iota p = \pi \widetilde{f}(p \oplus 0) = \pi(fp \oplus p) = fp$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть задана коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dd, "f"] \\ 0 & M \arrow[l] & \\ & & Q \arrow[ul, "\psi"] \end{tikzcd} \qquad (4)$$

с конечнопорожденными проективными модулями P, Q и модулем M, где φ и ψ — эпиморфизмы. Тогда существуют утолщения гомоморфизмов φ и ψ с помощью проективных модулей Q и P соответственно такие, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & & P\oplus Q \arrow[dl, "\varphi\oplus 0"'] \arrow[dd, "\widetilde{f}"] \\ 0 & M \arrow[l] & \\ & & Q\oplus P \arrow[ul, "\psi\oplus 0"] \end{tikzcd}, \tag{5}$$

где $\widetilde{f}$ *— изоморфизм, сохраняющий отображение* f.

Доказательство. Поскольку модуль Q проективный, существует отображение $g\colon Q\to P$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dl, "\varphi"'] \\ 0 & M \arrow[l] & \\ & & Q \arrow[ul, "\psi"] \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd}. \tag{6}$$

Из коммутативности диаграмм (4) и (6) следует, что $\varphi=\psi f$ и $\psi=\varphi g$, откуда $\varphi=\varphi g f$ и $\psi=\psi f g$.

Зададим отображение $\widetilde{f}\colon P\oplus Q\to Q\oplus P$ как изоморфизм Шануэля, построенный на отображениях f и g. Покажем, что диаграмма (5) коммутативна. Действительно,

$$(\psi\oplus 0)\widetilde{f}(p\oplus q)=(\psi\oplus 0)((fp+(1-fg)q)\oplus(p-gq))=$$

$$=\psi(fp+(1-fg)q)=\psi fp+\psi q-\psi fgq=\psi fp=\varphi p=(\varphi\oplus 0)(p\oplus q).$$

По лемме 3 отображение $\widetilde{f}$ сохраняет отображение f, следовательно, $\widetilde{f}$ — искомый изоморфизм.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть задана коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & & P_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dd, "f"] \\ 0 & M \arrow[l] & \\ & & P_2 \arrow[ul, "f_2"] \end{tikzcd} \tag{7}$$

с конечнопорожденными проективными модулями P_1, P_2 *и модулем* M. *Тогда для того чтобы существовали утолщения гомоморфизмов* f_1 *и* f_2 *с помощью свободных модулей* F_1 *и* F_2 *такие, что имеет место коммутативная диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
 & & P_1 \oplus F_1 \arrow[dll, "f_1\oplus 0"'] \arrow[dd, "\widetilde{f}"] \\
0 & M \arrow[l] & \\
 & & P_2 \oplus F_2 \arrow[ul, "f_2\oplus 0"]
\end{tikzcd}, \tag{8}
$$

где $\widetilde{f}$ — изоморфизм, сохраняющий отображение f, необходимо и достаточно, чтобы проективные модули P_1 и P_2 были стабильно изоморфными.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть имеет место диаграмма (8). Тогда, очевидно, в силу определения модули P_1 и P_2 будут стабильно изоморфными.

Достаточность. Пусть P_1 и P_2 — стабильно изоморфные проективные модули, а Q_1 и Q_2 — модули, дополняющие их до свободных модулей. По лемме 1 существуют свободные модули $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ такие, что $Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1 \simeq Q_2 \oplus \mathfrak{F}_2$. Утолщая гомоморфизмы f_1 и f_2 с помощью модуля $Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1$, диаграмму (7) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & & P_1 \oplus (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \arrow[dl, "f_1\oplus 0"'] \arrow[dd, "f\oplus\mathrm{id}"] \\
0 & M \arrow[l] & \\
 & & P_2 \oplus (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \arrow[ul, "f_2\oplus 0"]
\end{tikzcd}, \tag{9}
$$

где $P_1 \oplus (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1)$ и $P_2 \oplus (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \simeq P_2 \oplus (Q_2 \oplus \mathfrak{F}_2)$ — свободные модули, а отображение $f \oplus \mathrm{id}$ сохраняет отображение f. По лемме 4 диаграмму (9) можно дополнить до коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & & P_1 \oplus A \arrow[dl, "f_1\oplus 0"'] \arrow[dd, "\partial"] \\
0 & M \arrow[l] & \\
 & & P_2 \oplus B \arrow[ul, "f_2\oplus 0"]
\end{tikzcd},
$$

где $A = (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \oplus (P_2 \oplus Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1)$, $B = (Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1) \oplus (P_1 \oplus Q_1 \oplus \mathfrak{F}_1)$, а $\partial\colon P_1 \oplus A \to$ $\to P_2 \oplus B$ — изоморфизм, сохраняющий отображение $f \oplus \mathrm{id}$, а следовательно, и отображение f. Утолщая в последней диаграмме гомоморфизмы $f_1 \oplus 0$ и $f_2 \oplus 0$ с помощью модуля P_1, получаем диаграмму (8), где $F_1 = A \oplus P_1$, $F_2 = B \oplus P_1$ — свободные модули, а $\widetilde{f} = \partial \oplus \mathrm{id}$ — искомый изоморфизм.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть задана коммутативная диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \arrow[l, "d_0"'] \arrow[d, "f_0"'] & P_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & Z_1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, "f_Z"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \arrow[l, "d_0'"'] & P_1' \arrow[l, "d_1'"'] & Z_1' \arrow[l, "\iota_1'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}\quad , \tag{10}
$$

в которой P_0, P_1, P_0' *и* P_1' *— конечнопорожденные проективные модули, а* f_{0*} *— изоморфизм. Тогда существуют стабилизации гомоморфизмов* d_1 *и* d_1' *с помощью проективных модулей* P_0' *и* P_0 *соответственно такие, что имеет место коммутативная диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \oplus P_0' \arrow[l, "d_0 \oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_0"'] & P_1 \oplus P_0' \arrow[l, "d_1 \oplus id"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & Z_1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, "f_Z"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \oplus P_0 \arrow[l, "d_0' \oplus 0"'] & P_1' \oplus P_0 \arrow[l, "d_1' \oplus id"'] & Z_1' \arrow[l, "\iota_1'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}\quad , \tag{11}
$$

в которой отображения $\widetilde{f}_0$ *и* $\widetilde{f}_1$ *сохраняют отображения* f_0 *и* f_1 *соответственно, причем* $\widetilde{f}_0$ *— изоморфизм.*

Доказательство. Диаграмма (10) представляет собой диаграмму гомоморфизма цепных комплексов $0 \xleftarrow{d_0} P_0 \xleftarrow{d_1} P_1$ и $0 \xleftarrow{d_0'} P_0' \xleftarrow{d_1'} P_1'$, индуцирующего изоморфизм модулей гомологий. По теореме I.8.4 [3] отображение f_0 имеет гомотопически обратное отображение $f_0'\colon P_0' \to P_0$ такое, что $1 - f_0 f_0' = d_1' s_0'$, где $s_0'\colon P_0' \to P_1'$ — гомотопический деформационный оператор. Отображение $\widetilde{f}_0$ зададим как изоморфизм Шануэля, построенный на отображениях f_0 и f_0', а отображение $\widetilde{f}_1$ — соотношением

$$
\widetilde{f}_1(p_1 \oplus p_0') = (f_1 p_1 + s_0' p_0') \oplus (d_1 p_1 - f_0' p_0'),
$$

где $p_1 \oplus p_0' \in P_1 \oplus P_0'$.

По лемме 3 отображение $\widetilde{f}_0$ сохраняет отображение f_0. Покажем, что отображение $\widetilde{f}_1$ сохраняет отображение f_1. Действительно, диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f_1"'] & P_1 \oplus P_0' \arrow[d, "\widetilde{f}_1"] \\
P_1' & P_1' \oplus P_0 \arrow[l, "\pi"']
\end{tikzcd}\quad ,
$$

где ι — вложение, а π — проекция, коммутативна, так как

$$
\pi \widetilde{f}_1 \iota p_1 == \pi \widetilde{f}_1 (p_1 \oplus 0) = \pi(f_1 p_1 \oplus d_1 p_1) = f_1 p_1.
$$

По лемме 4 левый квадрат диаграммы (11) коммутативен, а в силу точности строк и того, что отображение $\widetilde{f}_1$ сохраняет отображение f_1, коммутативным будет и правый квадрат диаграммы (11). Покажем коммутативность среднего квадрата диаграммы (11). Действительно,

$$
\widetilde{f}_0(d_1 \oplus \mathrm{id})(p_1 \oplus p_0') = \widetilde{f}_0(d_1 p_1 \oplus p_0') =
$$

$$= (f_0 d_1 p_1 + (1 - f_0 f_0')p_0') \oplus (d_1 p_1 - f_0' p_0') = (d_1' f_1 p_1 + d_1' s_0' p_0') \oplus (d_1 p_1 - f_0' p_0') =$$

$$= (d_1' \oplus \mathrm{id})((f_1 p_1 + s_0' p_0') \oplus (d_1 p_1 - f_0' p_0')) = (d_1' \oplus \mathrm{id})\widetilde{f}_1(p_1 \oplus p_0').$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть задана коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \arrow[l, "d_0"'] \arrow[d, "f_0"'] & P_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & Z_1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, "f_Z"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \arrow[l, "d_0'"'] & P_1' \arrow[l, "d_1'"'] & Z_1' \arrow[l, "\iota_1'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \quad , \tag{12}$$

в которой P_0, P_1, P_0' и P_1' — конечнопорожденные проективные модули, а f_{0*} — изоморфизм. Тогда для того чтобы существовали стабилизации гомоморфизмов d_1 и d_1' с помощью свободных модулей F и F' соответственно такие, чтобы имела место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \oplus F \arrow[l, "d_0 \oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_0"'] & P_1 \oplus F \arrow[l, "d_1 \oplus id"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & Z_1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, "f_Z"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \oplus F' \arrow[l, "d_0' \oplus 0"'] & P_1' \oplus F' \arrow[l, "d_1' \oplus id"'] & Z_1' \arrow[l, "\iota_1'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \quad , \tag{13}$$

в которой отображения $\widetilde{f}_0$ и $\widetilde{f}_1$ сохраняют отображения f_0 и f_1 соответственно, причем $\widetilde{f}_0$ — изоморфизм, необходимо и достаточно, чтобы проективные модули P_0 и P_0' были стабильно изоморфными.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть имеет место диаграмма (13). Тогда, очевидно, в силу определения модули P_0 и P_0' будут стабильно изоморфными.

Достаточность. Пусть P_0 и P_0' — стабильно изоморфные проективные модули, а Q_0 и Q_0' — модули, дополняющие их до свободных модулей. По лемме 1 существуют свободные модули $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ такие, что $Q_0 \oplus \mathfrak{F} \simeq Q_0' \oplus \mathfrak{F}'$. Утолщая гомоморфизмы d_0 и d_0' и стабилизируя гомоморфизмы d_1 и d_1' с помощью модуля $Q_0 \oplus \mathfrak{F}$, диаграмму (12) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \oplus (Q_0 \oplus \mathfrak{F}) \arrow[l, "d_0 \oplus 0"'] \arrow[d, "f_0 \oplus \mathrm{id}"'] & P_1 \oplus (Q_0 \oplus \mathfrak{F}) \arrow[l, "d_1 \oplus \mathrm{id}"'] \arrow[d, "f_1 \oplus \mathrm{id}"'] & Z_1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, "f_Z"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \oplus (Q_0 \oplus \mathfrak{F}) \arrow[l, "d_0' \oplus 0"'] & P_1' \oplus (Q_0 \oplus \mathfrak{F}) \arrow[l, "d_1' \oplus \mathrm{id}"'] & Z_1' \arrow[l, "\iota_1'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \; , \tag{14}$$

где $P_0 \oplus (Q_0 \oplus \mathfrak{F})$ и $P_0' \oplus (Q_0 \oplus \mathfrak{F}) \simeq P_0' \oplus (Q_0' \oplus \mathfrak{F}')$ — свободные модули, $P_1 \oplus (Q_0 \oplus \mathfrak{F})$ и $P_1' \oplus (Q_0 \oplus \mathfrak{F})$ — проективные модули, а отображения $f_0 \oplus \mathrm{id}$ и $f_1 \oplus \mathrm{id}$ сохраняют отображения f_0 и f_1 соответственно. По лемме 6 диаграмму (14) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \oplus A \arrow[l, "d_0 \oplus 0"'] \arrow[d, "\mathfrak{f}_0"'] & P_1 \oplus A \arrow[l, "d_1 \oplus \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathfrak{f}_1"'] & Z_1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, "f_Z"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \oplus A' \arrow[l, "d_0' \oplus 0"'] & P_1' \oplus A' \arrow[l, "d_1' \oplus \mathrm{id}"'] & Z_1' \arrow[l, "\iota_1'"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \quad ,$$

в которой $A = (Q_0 \oplus \mathfrak{F}) \oplus (P_0' \oplus Q_0 \oplus \mathfrak{F})$, $A' = (Q_0 \oplus \mathfrak{F}) \oplus (P_0 \oplus Q_0 \oplus \mathfrak{F})$, отображения $\mathfrak{f}_0$ и $\mathfrak{f}_1$ сохраняют отображения $f_0 \oplus \mathrm{id}$ и $f_1 \oplus \mathrm{id}$, а значит, и f_0 и f_1 соответственно, причем $\mathfrak{f}_0$ — изоморфизм. Утолщая в последней диаграмме гомоморфизмы $d_0 \oplus 0$ и $d_0' \oplus 0$ и стабилизируя гомоморфизмы $d_1 \oplus \mathrm{id}$ и $d_1' \oplus \mathrm{id}$ с помощью модуля P_0, получаем диаграмму (13), где $F = A \oplus P_0$, $F' = A' \oplus P_0$ — свободные модули, а $\widetilde{f}_0 = \mathfrak{f}_0 \oplus \mathrm{id}$ и $\widetilde{f}_1 = \mathfrak{f}_1 \oplus \mathrm{id}$ — искомые отображения, причем $\widetilde{f}_0$ — изоморфизм.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ — цепное отображение n-мерных цепных комплексов конечнопорожденных проективных модулей, индуцирующее изоморфизм модулей гомологий. Для того чтобы существовали ациклничные свободные цепные комплексы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ такие, что цепные комплексы $\mathcal{P} \oplus \mathcal{F}$ и $\mathcal{P}' \oplus \mathcal{F}'$ цепно изоморфные, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i = \overline{0,n}$ модули P_i и P_i' были стабильно изоморфными.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть цепные комплексы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ можно стабилизировать свободными модулями до цепной эквивалентности. Тогда, очевидно, в силу определения для каждого $i = \overline{0,n}$ модули P_i и P_i' будут стабильно изоморфными.

Достаточность. Доказательство имеет индуктивный характер по размерности n цепных комплексов.

Пусть

$$\begin{tikzcd} 0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \arrow[l, "d_0"'] \arrow[d, "f_0"'] & P_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & P_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"'] & \ldots \arrow[l, "d_3"'] & P_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\ 0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \arrow[l, "d_0'"'] & P_1' \arrow[l, "d_1'"'] & P_2' \arrow[l, "d_2'"'] & \ldots \arrow[l, "d_3'"'] & P_n' \arrow[l, "d_n'"'] \end{tikzcd} \tag{15}$$

— диаграмма цепного отображения $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ n-мерных цепных комплексов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ конечнопорожденных проективных модулей и для каждого $i = \overline{0,n}$ проективные модули P_i и P_i' стабильно изоморфны. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \arrow[l, "d_0"'] \arrow[d, "f_0"'] & P_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & Z_1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, "f_{Z_1}"'] & 0 \arrow[l] \\ 0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \arrow[l, "d_0'"'] & P_1' \arrow[l, "d_1'"'] & Z_1' \arrow[l, "\iota_1'"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd},$$

в которой $Z_1 = \ker d_1$, $Z_1' = \ker d_1'$ и f_{Z_1} — ограничение отображения f_1 на Z_1. Она удовлетворяет условиям леммы 7, а поэтому существуют стабилизации гомоморфизмов d_1 и d_1' с помощью свободных модулей F_0 и F_0' соответственно такие, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \oplus F_0 \arrow[l, "d_0 \oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_0"'] & P_1 \oplus F_0 \arrow[l, "d_1 \oplus \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & Z_1 \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[d, "f_{Z_1}"'] & 0 \arrow[l] \\ 0 & H_0' \arrow[l] & P_0' \oplus F_0' \arrow[l, "d_0' \oplus 0"'] & P_1' \oplus F_0' \arrow[l, "d_1' \oplus \mathrm{id}"'] & Z_1' \arrow[l, "\iota_1'"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd},$$

в которой отображения $\widetilde{f}_0$ и $\widetilde{f}_1$ сохраняют отображения f_0 и f_1 соответственно, причем $\widetilde{f}_0$ — изоморфизм. Тогда, используя диаграмму (15), получаем

$$\begin{tikzcd}
0 & H_0 \arrow[l] \arrow[d, "f_{0*}"'] & P_0 \oplus F_0 \arrow[l, "d_0 \oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_0"'] & P_1 \oplus F_0 \arrow[l, "d_1 \oplus \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & P_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"'] & \ldots \arrow[l, "d_3"'] & P_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
0 & H'_0 \arrow[l] & P'_0 \oplus F'_0 \arrow[l, "d'_0 \oplus 0"'] & P'_1 \oplus F'_0 \arrow[l, "d'_1 \oplus \mathrm{id}"'] & P'_2 \arrow[l, "d'_2"'] & \ldots \arrow[l, "d'_3"'] & P'_n \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd},$$

где отображение $\widetilde{f}_1$ индуцирует изоморфизм $\widetilde{f_{1*}} = f_{1*}\colon H_1 \to H'_1$ модулей гомологий цепных комплексов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$. Таким образом, можно построить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & H_1 \arrow[l] \arrow[d, "f_{1*}"'] & P_1 \oplus F_0 \arrow[l, "d_1 \oplus \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & P_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"'] & \ldots \arrow[l, "d_3"'] & P_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
0 & H'_1 \arrow[l] & P'_1 \oplus F'_0 \arrow[l, "d'_1 \oplus \mathrm{id}"'] & P'_2 \arrow[l, "d'_2"'] & \ldots \arrow[l, "d'_3"'] & P'_n \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

гомоморфизма $(n-1)$-мерных цепных комплексов конечнопорожденных проективных модулей, индуцирующего изоморфизм модулей гомологий, т. е. размерность цепных комплексов уменьшить на единицу. Справедливость последнего шага при $n = 0$ вытекает из леммы 5.

Теорема доказана.

1. *Cockcroft W., Swan R.* On the homotopy type of certain two-dimensional complexes // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **11**. – P. 193 – 202.
2. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули, категории: В 2 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 688 с.
3. *Браун К. С.* Когомологии групп. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
4. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.

Получено 18.10.11,
после доработки — 16.03.12