УДК 517.9

Я. А. Шарифов (Бакин. гос. ун-т, Ин-т кибернетики НАН Азербайджана)

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

We consider the problem of optimal control in which the state of the controlled system is described by impulsive differential equations under nonlocal boundary conditions, which is a natural generalization of the Cauchy problem. Using the principle of contracting mappings, we prove the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal boundary-value problem with pulse action with fixed admissible controls. Under certain conditions for the initial data of the problem, we calculate the gradient of a functional and obtain necessary optimality conditions.

Досліджується задача оптимального керування, в якій стан керованої системи описується диференціальними рівняннями з імпульсними збуреннями при нелокальних крайових умовах. Спочатку з допомогою принципу стиснутих відображень доведено існування та єдиність розв'язків нелокальної крайової задачі при імпульсних збуреннях і фіксованих допустимих керуваннях. При деяких умовах на початкові дані задачі обчислено градієнт функціонала і встановлено необхідні умови оптимальності.

1. Введение. Часто при математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями длительностью возмущений удобно пренебречь и считать, что эти возмущения имеют мгновенный характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, как их называют, дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями [1]. В [2, с. 10, 16] приведены конкретные примеры из теории электрических колебаний и часов, математические модели в которых описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями. Такие дифференциальные уравнения достаточно подробно изучены в [1 – 6]. Однако в последние годы интенсивно исследуются дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях [6 – 10]. В этих работах отмечается, что существуют многочисленные процессы в физике, технике, экологии, механике и др., математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. Еще одним источником появления импульсных воздействий являются такие отрасли, как электроника, автоматика, робототехника, системы телекоммуникации и т. д. [11]. Поэтому целесообразно исследовать задачи оптимального управления, в которых состояние системы описывается дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях.

В настоящей работе впервые исследуются задачи оптимального управления, состояние системы в которых описывается дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. Исследованы вопросы существование и единственности решений краевой задачи, найдены достаточные условия дифференцируемости критерия качества, получена формула для его градиента и установлены необходимые условия оптимальности в форме вариационных неравенств.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу при импульсных воздействиях:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad 0 \le t \le T, \;\; t \ne t_i, \tag{1}$$

$$x(0) + Bx(T) = C, \tag{2}$$

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i), v_i), \quad i = 1, 2, ..., p, \quad 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T, \tag{3}$$

$$(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p = \{u(t) \in L_2^r[0, T] : u(t) \in V, \text{ п.в. } t \in [0, T], v_i \in \Pi\}, \tag{4}$$

где $x(t) \in R^n$, $f(t, x, u)$ — n-мерная непрерывная функция, $B \in R^{n \times n}$, $C \in R^{n \times 1}$ — заданные постоянные матрицы, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, $I_i(x, v)$ — некоторые заданные функции, $(u, [v])$ — управляющие параметры, $V \in R^r$ и $\Pi \in R^m$ — ограниченные выпуклые множества.

Требуется на решениях краевой задачи (1) – (4) минимизировать функционал

$$J(u, [v]) = \Phi(x(0), x(T)). \tag{5}$$

Под решением краевой задачи (1) – (3), соответствующей фиксированному управляющему параметру $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$, будем понимать функцию $x(t)\colon [0, T] \to R^n$, абсолютно непрерывную на $[0, T]$ при $t \ne t_i$ и непрерывную слева при $t = t_i$, для которой существует конечный правый предел $x(t_i^+)$ при $i = 1, 2, \ldots, p$. Пространство таких функций обозначим через $PC([0, T], R^n)$. Очевидно, такое пространство является банаховым с нормой

$$\|x\|_{PC} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|,$$

где $|\cdot|$ — норма в R^n.

Допустимый процесс $\{(u(t), [v]), x(t; u(t), [v])\}$, являющийся решением задачи (1) – (5), т. е. доставляющий минимум функционалу (5) при ограничениях (1) – (4), будем называть оптимальным процессом, а $(u(t), [v])$ — оптимальным управлением, где через $x(t; u(t), [v])$ обозначено решение краевой задачи (1) – (3), соответствующее допустимому управлению $(u(t), [v])$.

3. Существование решений краевой задачи (1) – (3). Предположим выполнение следующих условий:

1) $\|B\| < 1$;

2) $f\colon [0, T] \times R^n \times R^r \to R^n$, $I_i\colon R^n \times R^m \to R^n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, — непрерывные функции и существуют постоянные $K > 0$, $L_i > 0$, $i = 1, 2, ..., p$, такие, что

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \le K|x - y|, \qquad t \in [0, T], \quad x, y \in R^n, \tag{6}$$

$$|I_i(x, v) - I_i(y, v)| \le L_i|x - y|, \qquad x, y \in R^n; \tag{7}$$

3) $L = (1 - \|B\|)^{-1}\left[KT + \sum_{i=1}^p L_i\right] < 1$.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* 1. *Функция* $x(\cdot) \in PC([0,T],R^n)$ *является абсолютно непрерывным решением краевой задачи* (1) – (3) *тогда и только тогда, когда*

$$x(t) = (E+B)^{-1}C + \int_0^T K(t,\tau)f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau + \sum_{i=1}^{p} M(t,t_i)I_i(x(t_i), v_i), \tag{8}$$

где

$$K(t,\tau) = \begin{cases} (E+B)^{-1}, & 0 \le \tau \le t, \\ -(E+B)^{-1}B, & t \le \tau \le T, \end{cases}$$

$$M(t,t_i) = \begin{cases} (E+B)^{-1}, & 0 < t_i \le t, \\ -(E+B)^{-1}B, & t \le t_i \le T. \end{cases}$$

Доказательство. Если $x = x(\cdot)$ является решением дифференциального уравнения (1), то для $t \in (t_j, t_{j+1})$

$$\int_0^t f(s, x(s), u(s))ds = \int_0^t x'(s)ds = \left[x(t_1^-) - x(0^+)\right] +$$

$$+ \left[x(t_2^-) - x(t_1^+)\right] + \ldots + \left[x(t^-) - x(t_j^+)\right] =$$

$$= -x(0) - \left[x(t_1^+) - x(t_1^-)\right] - \left[x(t_2^+) - x(t_2^-)\right] - \ldots - \left[x(t_j^+) - x(t_j^-)\right] + x(t).$$

Отсюда

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), u(s))ds + \sum_{0<t_j<t} \Delta x(t_j), \tag{9}$$

где $x(0)$ — пока произвольная постоянная. Для определения $x(0)$ потребуем, чтобы функция, определяемая равенством (9), удовлетворяла условию (2):

$$(E+B)x(0) = C - B\int_0^T f(t, x(t), u(t))dt - B\sum_{0<t_j<T} \Delta x(t_j).$$

Поскольку $\|B\| < 1$, матрица $E+B$ обратима и $\left\|(E+B)^{-1}\right\| < (1 - \|B\|)^{-1}$. Тогда

$$x(0) = (E+B)^{-1}C -$$

$$-(E+B)^{-1}B\int_0^T f(t, x(t), u(t))dt - (E+B)^{-1}B\sum_{0<t_j<T} \Delta x(t_j). \tag{10}$$

Теперь подставим значение $x(0)$, определяемое равенством (10), в (9). Тогда

$$x(t) = (E+B)^{-1}C - (E+B)^{-1}B \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt -$$

$$-(E+B)^{-1}B \sum_{0<t_i<T} \Delta x(t_i) + \int_0^t f(s, x(s), u(s))ds + \sum_{0<t_i<t} \Delta x(t_i) =$$

$$= (E+B)^{-1}C + \int_0^T K(t,\tau) f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau + \sum_{i=1}^P M(t, t_i) I_i(x(t_i), v_i).$$

Таким образом, мы показали, что краевую задачу (1) – (3) можно представить в виде интегрального уравнения (8). Непосредственной проверкой можно показать, что решение интегрального уравнения (8) также удовлетворяет краевой задаче (1) – (3).

Теорема 1 доказана.

Определим оператор $P\colon PC([0,T], R^n) \to PC([0,T], R^n)$ по правилу

$$(Px)(t) = (E+B)^{-1}C + \int_0^T K(t,\tau) f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^P M(t, t_i) I_i(x(t_i), v_i). \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1 – 3. *Тогда для любого* $C \in R^n$ *и* $(u(\cdot), [v]) \in \in U \times \Pi^p$ *краевая задача* (1) – (3) *имеет единственное решение, которое удовлетворяет равенству*

$$x(t) = (E+B)^{-1}C + \int_0^T K(t,\tau) f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^P M(t, t_i) I_i(x(t_i), v_i). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $C \in R^n$ и $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$ фиксированы. Рассмотрим отображение $P\colon PC([0,T], R^n) \to PC([0,T], R^n)$, определяемое равенством (11). Тогда для любых $\omega, w \in PC([0,T], R^n)$ имеем

$$|(P\omega)(t) - (Pw)(t)| \le \int_0^T |K(t,s)|\, |f(s, \omega(s), u(s)) - f(s, w(s), u(s))|\, ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{p}|M(t,t_i)|\;|I_i(\omega(t_i),v_i)-I_i(w(t_i)v_i)|\leq$$

$$\leq(1-\|B\|)^{-1}\left[K\int\limits_0^T|\omega(s)-w(s)|\,ds+\sum_{i=1}^{p}L_i\cdot|\omega(t_i)-w(t_i)|\right]\leq$$

$$\leq(1-\|B\|)^{-1}\left[KT+\sum_{i=1}^{p}L_i\right]\|\omega(\cdot)-w(\cdot)\|_{PC}\,,\qquad t\in[0,T],$$

или

$$\|Pv-Pw\|_{PC}\leq L\,\|\omega-w\|_{PC}\,. \tag{13}$$

Оценка (13) показывает, что оператор P является сжимающим в пространстве $PC\left([0,T],R^n\right)$. Поэтому, согласно принципу сжимающих операторов, оператор P, определяемый равенством (12), имеет единственную неподвижную точку в $PC\left([0,T],R^n\right)$. Значит, интегральное уравнение (8) или краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение.

Теорема 2 доказана.

Замечание **1.** Теорема 2 содержит в себе различные частные случаи. Например, если $I_i\left(x,v\right)=0,\ i=0,1,\ldots,p$, то получаем систему дифференциальных уравнений без импульсных воздействий. Тогда условие 3 превращается в условие

$$KT\left(1-\|B\|\right)^{-1}<1,$$

которое является достаточным условием существование и единственности решения краевой задачи

$$\dot{x}=f(t,x)$$

$$x(0)+Bx(T)=C.$$

4. Градиент в задаче оптимального управления (1) – (4). Нетрудно показать, что при предположениях 1 – 3 любое решение краевой задачи (1) – (3) ограничено. Действительно, в силу ограниченности множества допустимых управлений из (12) имеем

$$x(t)=(E+B)^{-1}C+\int\limits_0^T K(t,\tau)f(\tau,0,u\left(\tau\right))d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{P}M(t,t_i)I_i(0,v_i)+\int\limits_0^T K(t,\tau)\left[f(\tau,x(\tau),u\left(\tau\right))-f(\tau,0,u\left(\tau\right))\right]d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{P}M(t,t_i)\left[I_i(x(t_i),v_i)-I_i(0,v_i)\right].$$

Отсюда

$$(1-L)\left|x(t)\right| \leq (1-\|B\|)^{-1}\left[lT+\sum_{i=1}^{p} l_i\right]+\left\|(E+B)^{-1}C\right\|,$$

где $l=\max_{t\in[0,T],u\in V}\left|f(t,0,u)\right|$, $l_i=\max_{v_i\in\Pi}\left|I_i(0,v_i)\right|$.

Таким образом, из последнего неравенства имеем

$$|x| \leq (1-L)^{-1}\left\{(1-\|B\|)^{-1}\left[lT+\sum_{i=1}^{p} l_i\right]+\left\|(E+B)^{-1}C\right\|\right\} \equiv R.$$

Сформулируем теперь некоторые дополнительные условия на $f(t,x,u)$, $I(x,v)$, $\Phi(x,y)$, которые предполагаются выполненными для всех $|x|\leq R$, $u\in V$, $v_i\in\Pi$, $0\leq t\leq T$:

4) производные $f(t,x,u)$ по аргументу u ограничены:

$$\left|f_u(t,x,u)\bar{u}\right| \leq K_1\left|\bar{u}\right|;$$

5) производные $f(t,x,u)$ по x и u удовлетворяют условиям Липшица, т. е.

$$\left|f(t,x+\bar{x},u+\bar{u})-f(t,x,u)-f_x(t,x,u)\bar{x}-f_u(t,x,u)\bar{u}\right| \leq$$

$$\leq K_2\left|\bar{x}\right|^2+K_3\left|\bar{u}\right|^2;$$

6) производные $I_i(x,v)=0, i=0,1,\ldots,p$, по аргументу v ограничены:

$$\left|I_{iv}(x,v)\bar{v}\right| \leq L_i^{(1)}\left|\bar{v}\right|;$$

7) производные $I_i(x,v), i=1,2,\ldots,p$, по x и v удовлетворяют условиям Липшица, т. е.

$$\left|I_i(x+\bar{x},v+\bar{v})-I_i(x,v)-I_{ix}(x,v)\bar{x}-I_{iv}(x,v)\right| \leq L_i^{(2)}\left|\bar{x}\right|^2+L_i^{(3)}\left|v\right|^2;$$

8) функция $\Phi(x,y)$ имеет ограниченные первые производные, которые удовлетворяют условию Липшица

$$\left|\Phi_x(x,y)\right| \leq K_4, \quad \left|\Phi_y(x,y)\right| \leq K_5,$$

$$\left|\Phi(x+\bar{x},y+\bar{y})-\Phi(x,y)-\langle\Phi_x(x,y),\bar{x}\rangle-\langle\Phi_y(x,y),\bar{y}\rangle\right| \leq$$

$$\leq K_6\left|\bar{x}\right|^2+K_7\left|\bar{y}\right|^2.$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* 1–4, *а* $(u(t),[v],x(t))$ *и* $(u(t)+\bar{u}(t),[v+\bar{v}],$ $x(t)+\bar{x}(t))$ *— два решения краевой задачи* (1)–(4). *Тогда*

$$\left|\bar{x}(t)\right| \leq c_1\left(\|\bar{u}\|+\|[\bar{v}]\|\right),$$

где $c_1=(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\max\left[K_1\sqrt{T},L_i^{(1)}\sqrt{p}\right]$.

Доказательство. Очевидно, $\bar{x}(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\bar{x}(t) = \int_0^T K(t,\tau)\left[f(\tau, x(\tau) + \bar{x}(\tau), u(\tau) + \bar{u}(\tau) - f(\tau, x(\tau), u(\tau))\right] d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{P} M(t, t_i)\left[I_i(x(t_i) + \bar{x}(t_i), v_i + \bar{v}_i) - I_i(x(t_i), v_i)\right].$$

Отсюда, учитывая условия 2, 4 и 6, получаем

$$|\bar{x}(t)| \le (1 - \|B\|)^{-1}\left[\int_0^T (K\,|x(t)| + K_1\,|\bar{u}(t)|)\,dt\right] +$$

$$+ (1 - \|B\|)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{p}\left(L_i\,|\bar{x}(t_i)| + L_i^{(1)}\,|\bar{v}_i|\right)\right].$$

Теперь легко можно получить оценку

$$|\bar{x}(t)| \le (1 - L)^{-1}(1 - \|B\|)^{-1}\left[K_1\sqrt{T}\,\|\bar{u}\| + L_i^{(1)}\sqrt{p}\left(\sum_{i=1}^{p}|\bar{v}_i|^2\right)^{1/2}\right].$$

Таким образом, из последнего неравенства имеем

$$|\bar{x}(t)| \le (1 - L)^{-1}(1 - \|B\|)^{-1}\max\left[K_1\sqrt{T}, L_i^{(1)}\sqrt{p}\right](\|\bar{u}\| + \|[\bar{v}]\|).$$

Лемма 1 доказана.

Введем систему уравнений в вариациях:

$$\frac{dz}{dt} = f_x(t, x(t), u(t))z(t) + f_u(t, x(t), u(t))\,\bar{u}(t), \quad 0 \le t \le T, \ \ t \ne t_i,$$

$$z(0) + Bz(T) = 0,$$

$$\Delta z(t_i) = I_{ix}(x(t_i), v_i)z(t_i) + I_{iv_i}(x(t_i), v_i)\,\bar{v}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < t_{p+1} = T.$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* 1 – 6, $(\bar{u}(t), [\bar{v}], \bar{x}(t))$ — *те же решения, что и в лемме* 1, *а* $z(t)$ — *решение уравнения в вариациях.*

Тогда

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \le c_2\left(\|\bar{u}\|^2 + \|[v]\|^2\right), \quad 0 \le t \le T,$$

где

$$c_2 = (1 - L)^{-1}(1 - \|B\|)^{-1} \times$$

$$\times \max\left\{2c_1^2\left(K_2T + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(2)}\right) + K_3, 2c_1^2\left(K_2T + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(2)}\right) + \max_{1 \le i \le p} L_i^{(3)}\right\}.$$

Доказательство. Функция $\bar{x}(t) - z(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\bar{x}(t) - z(t) = \int_0^T K(t,\tau) f_x(\tau, x(\tau), u(\tau)) (\bar{x}(t) - z(t))\, d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{P} M(t, t_i) I_{ix}(x(t_i), v_i) (\bar{x}(t_i) - z(t_i)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{P} M(t, t_i) \left[I_i(x(t_i) + \bar{x}(t_i), v_i + \bar{v}_i) - I_i(x(t_i), v_i) - \right.$$

$$\left. - I_{ix}(x(t_i), v_i) \bar{x}(t_i) - I_{iv_i}(x(t_i), v_i) \bar{v}_i \right] +$$

$$+ \int_0^T K(t,\tau) \left[f(\tau, x(\tau) + \bar{x}(\tau), u(\tau) + \bar{u}(\tau) - f(\tau, x(\tau), u(\tau)) - \right.$$

$$\left. - f_x(\tau, x(\tau), u(\tau)) \bar{x}(\tau) - f_u(\tau, x(\tau), u(\tau)) \bar{u}(\tau) \right] d\tau.$$

Отсюда получаем оценку

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \leq (1 - L)^{-1} (1 - \|B\|)^{-1} \times$$

$$\times \left[\int_0^T \left(K_2 |\bar{x}|^2 + K_3 |\bar{u}|^2 \right) dt + \sum_{i=1}^{p} \left(L_i^{(2)} |\bar{x}(t_i)|^2 + L_i^{(3)} |\bar{v}_i|^2 \right) \right].$$

Теперь, учитывая лемму 1, получаем

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \leq (1 - L)^{-1} (1 - \|B\|)^{-1} \times$$

$$\times \left[c_1^2 \left(K_2 T + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(2)} \right) (\|\bar{u}\| + \|[\bar{v}]\|)^2 + K_3 \|\bar{u}\|^2 + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(3)} |\bar{v}_i|^2 \right].$$

Поскольку $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right)$, из последнего неравенства имеем

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \leq (1 - L)^{-1} (1 - \|B\|)^{-1} \max \left\{ 2c_1^2 \left(K_2 T + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(2)} \right) + K_3, \right.$$

$$\left. 2c_1^2 \left(K_2 T + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(2)} \right) + \max_{1 \leq i \leq p} L_i^{(3)} \right\} \left(\|\bar{u}\|^2 + \|[\bar{v}]\|^2 \right),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $1-7$. *Тогда функционал* (5) *при ограничениях* (1)–(4) *дифференцируем, причем его градиент имеет вид*

$$J'(u,[v])=\left(f_u'(t,x,u)\,\psi(t),\sum_{i=1}^{p}I'_{iv_i}(x_i,v_i)\,\psi(t_i)\right)\in L_2^r[0,T]\times R^m, \tag{14}$$

где $\psi(t)$ — *решение дифференциально-разностной системы*

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=-f_x'(t,x,u)\,\psi(t), \tag{15}$$

$$\Delta\psi(t_i)=-I'_{ix}(x(t_i),v_i)\left(I'_{ix}(x(t_i),v_i)+E\right)^{-1}\psi(t_i),\quad i=1,2,\ldots,p, \tag{16}$$

с граничными условиями

$$\left(E+B'\right)^{-1}\psi(T)+B'\left(E+B'\right)^{-1}\psi(0)=$$

$$=B'\left(E+B'\right)^{-1}\Phi_{x(0)}(x(0),x(T))-\left(E+B'\right)^{-1}\Phi_{x(T)}(x(0),x(T)). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $(u,[v]),(u+\bar u,[v+\bar v])\in U\times\Pi^p$ — два допустимых управления. Тогда для приращения функционала (5) справедлива формула

$$J(u+\bar u,[v+\bar v])-J(u,[v])=$$

$$=\left\langle\Phi_{x(0)}(x(0),x(T)),z(0)\right\rangle+\left\langle\Phi_{x(T)}(x(0),x(T)),z(T)\right\rangle+\eta, \tag{18}$$

где

$$\eta=\left\langle\Phi_{x(0)}(x(0),x(T)),\bar x(0)-z(0)\right\rangle+\left\langle\Phi_{x(T)}(x(0),x(T)),\bar x(T)-z(T)\right\rangle+$$

$$+\Phi(x(0)+\bar x(0),x(T)+\bar x(T))-\Phi(x(0),x(T))-$$

$$-\left\langle\Phi_{x(0)}(x(0),x(T)),\bar x(0)\right\rangle-\left\langle\Phi_{x(T)}(x(0),x(T)),\bar x(T)\right\rangle. \tag{19}$$

К формуле (18) добавим нулевые слагаемые

$$\int_0^T\left\langle\psi(t),-\frac{dz}{dt}+f_x(t,x(t),u(t))z(t)+f_u(t,x(t),u(t))\,\bar u(t)\right\rangle dt,$$

$$\langle\lambda,z(0)+Bz(T)\rangle,$$

где $\psi(t)\in L_2^r[0,T]$ — пока произвольная функция, а $\lambda\in R^n$ — произвольный числовой вектор.

После несложных преобразований для приращения функционала получаем формулу

$$J(u+\bar u,[v+\bar v])-J(u,[v])=$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \dot{\psi}(t) + H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), z(t) \right\rangle dt +$$

$$+ \int_0^T \langle H_u(t, x(t), u(t), \psi(t)), \bar{u}(t) \rangle dt + \sum_{i=1}^{p} \langle h_{iv_i}(x_i, v_i), \bar{v}_i \rangle +$$

$$+ \left\langle \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)) + \lambda + \psi(0), z(0) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)) + B'\lambda - \psi(T), z(T) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \Delta\psi(t_i) + I'_{ix}(x(t_i), v_i) \left(I'_{ix}(x(t_i), v_i) + E \right)^{-1} \psi(t_i), z(t_i) \right\rangle + \eta, \tag{20}$$

где $H(t, x, u, \psi) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle$, $h_i(x_i, v_i) = \langle \psi(t_i), I_i(x_i, v_i) \rangle$. Теперь произвольную функцию $\psi(t) \in L_2^r[0, T]$ выбираем как решение дифференциально-разностного уравнения

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta\psi(t_i) = -I'_x(x(t_i), v_i) \left(I'_x(x(t_i), v_i) + E \right)^{-1} \psi(t_i), \quad i = 1, 2, ..., p,$$

которое совпадает с (14), (15), а числовой вектор $\lambda \in R^n$ определяем из соотношений

$$\Phi_{x(T)}(x(0), x(T)) + B'\lambda - \psi(T) = 0, \tag{21}$$

$$\Phi_{x(0)}(x(0), x(T)) + \lambda + \psi(0) = 0. \tag{22}$$

***Замечание* 2.** Поскольку в краевых условиях (21), (22) содержится векторный параметр $\lambda \in R^n$, система уравнений (14), (15), (21), (22) называется сопряженной системой в параметрическом виде.

Здесь, учитывая условие 3, можно исключить неизвестный вектор $\lambda \in R^n$. Действительно, из (21), (22) имеем

$$\lambda = \left(E + B' \right)^{-1} \left[\psi(T) - \psi(0) - \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)) - \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)) \right].$$

Найденное значение учтем в (21) или (22) и после несложных преобразований получим (17). Из равенства (19) получаем оценку

$$|\eta| \leq \left| \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)) \right| |\bar{x}(0) - z(0)| +$$

$$+ \left| \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)) \right| |\bar{x}(T) - z(T)| +$$

$$+ |\Phi(x(0) + \bar{x}(0), x(T) + \bar{x}(T)) - \Phi(x(0), x(T)) -$$

$$- \left\langle \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)), \bar{x}(0) \right\rangle - \left\langle \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)), \bar{x}(T) \right\rangle \Big| .$$

Используя условия 1 – 3, 7 и леммы 1 и 2, из последнего неравенства находим

$$|\eta| \leq \left[\left(K_4 + K_5 \right) c_2 + c_1^2 \left(K_7 + K_6 \right) \right] \left(\|\bar{u}\|^2 + \|[\bar{v}]\|^2 \right).$$

Теорема 3 доказана.

5. Необходимые условия оптимальности. Имея формулы градиента для функционала (5) при ограничениях (1) – (4), можно получить необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для оптимальности управления* $(u_*, [v]_*) \in U \times \Pi^p$ *в задаче* (1) – (5) *необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\int_0^T \left\langle H_u \left(t, x_* (t), u_* (t), \psi_* (t) \right), u (t) - u_* (t) \right\rangle dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \left\langle h_{iv_i} \left(x_{i*}, v_{i*} \right), v_i - v_{i*} \right\rangle \geq 0 \tag{23}$$

для любого $(u, [v]) \in U \times \Pi^p$, *где* $x_* (t) = x (t; u_*, [v]_*)$, $\psi_* (t) = \psi (t; u_*, [v]_*)$.

Доказательство. Множество $U \times \Pi^p$, определяемое равенством (4), выпукло в пространстве $L_2 [0, T] \times \Pi^p$. Кроме того, согласно теореме 3 функционал $J (u, [v])$ дифференцируем по Фреше на множестве $U \times \Pi^p$. Тогда в силу теоремы 3 из [10, с. 524] на элементе $(u_*, [v]_*) \in U \times \Pi^p$ необходимо выполнение неравенства $\langle J' (u_*, [v]_*), (u, [v]) - (u_*, [v]_*) \rangle \geq 0$ при всех $(u, [v]) \in$ $\in U \times \Pi^p$. Отсюда и из (14) следует неравенство (23).

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 вытекает следующее очевидное следствие.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для оптимальности управления* $(u_*, [v]_*) \in U \times \Pi^p$ *в задаче* (1) – (5) *необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\int_0^T \left\langle H_u \left(t, x_* (t), u_* (t), \psi_* (t) \right), u (t) - u_* (t) \right\rangle dt \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left\langle h_{iv_i} \left(x_{i*}, v_{i*} \right), v_i - v_{i*} \right\rangle \geq 0$$

для любого $(u, [v]) \in U \times \Pi^p$, *где* $x_* (t) = x (t; u_*, [v]_*)$, $\psi_* (t) = \psi (t; u_*, [v]_*)$.

6. Заключение. Теорема 1 имеет вспомогательный характер и позволяет нелокальную краевую задачу представить в виде интегрального уравнения, которое, в свою очередь, упрощает исследования существование и единственности решения исходной краевой задачи. Теорема 2 дает достаточное условие существования и единственности решения краевой задачи (1) – (3) при каждом фиксированном допустимом управлении.

Заметим, что в отличие от локальных краевых задач для нелокальных задач требуется индивидуальный подход, так как для них не существует общего подхода доказательства теорем о существовании и единственности решений. Отметим, что из схемы доказательств теорем видно, что данную схему можно успешно применять для более сложных задач оптимального управления с нелокальными условиями при импульсных воздействиях. Для численного решения задачи (1) – (5) может быть использован метод штрафных функций в сочетании с градиентными методами [12].

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
3. *Perestyk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effect: multivalued right-hand sides with discontinuities // DeGruyter Stud. Math. – Berlin: Walter de Gruter Co., 2011. – **40**.
4. *Samoilenko A. M., Perestyk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995.
5. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 434 p.
6. *Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. K.* Impulsive differential equations and inclusions // Contemp. Math. and Appl. – New York: Hindawi Publ. Corporation, 2006. – **2**.
7. *Selvaraj B., Mallika Arjunan M., Kavitha V.* Existence of solutions for impulsive nonlinear differential equations with nonlocal conditions // J. KSIAM. – 2009. – **13**, № 3. – P. 203 – 215.
8. *Anguraj A., Mallika Arjunan M.* Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations // Electon. J. Different. Equat. – 2005. – **2005**, № 111. – P. 1 – 8.
9. *Ji Sh., Wen Sh.* Nonlocal Cauchy problem for impulsive differential equations in Banach spaces // Int. J. Nonlinear Sci. – 2010. – **10**, № 1. – P. 88 – 95.
10. *Li M., Han M.* Existence for neutral impulsive functional differential equations with nonlocal conditions // Indag. Math. – 2009. – **20**, №. 3. – P. 435 – 451.
11. *Bin Liu, Xinzhi Lui, Xiaoxin Liao.* Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems // Acta Math. Sci. – 2005. – **25**, № 1. – P. 161 – 169.
12. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 823 с.

Получено 06.06.11