УДК 517.9

О. Б. Чернобай (Нац. ун-т ДПС України, Ірпінь)

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З КІЛЬКОМА ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

The theorem on the smoothness of generalized solutions of differential equations with some operational coefficients is proved.

Доказана теорема о гладкости обобщенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений с несколькими операторними коэффициентами.

У даній статті розглядаються узагальнені розв'язки операторного рівняння $\mathcal{L}^{+}(u) = 0$, де $\mathcal{L}$ — звичайний диференціальний оператор зі змінними відносно t операторнозначними коефіцієнтами, які діють у фіксованому гільбертовому просторі; $\mathcal{L}^{+}$ — формально спряжений до нього. Результати цієї роботи узагальнюють результати, отримані в [1], а також пов'язані з роботами [2–8].

Нехай H — повний сепарабельний комплексний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(.,.)$ і нормою $\|\cdot\|$, $L(H)$ — сукупність усіх обмежених операторів у H. Позначимо $I = (-l, l)$, $l \leq \infty$. $\widetilde{I}$ — його замикання.

Розглянемо $L^2(H, I) = L^2(I) \otimes H$, де $L^2(I)$ — простір L^2, побудований по мірі Лебега dx на інтервалі I (див., наприклад, [7], гл.1, § 3).

Для довільного $k = 1, 2, \ldots$ візьмемо відоме (див. [9]) гільбертове оснащення простору $L^2(I)$ соболевськими просторами

$$W_{2,0}^{-k}(I) \supset L^2(I) \supset W_{2,0}^{k}(I),$$

де $W_{2,0}^{k}(I)$ — підпростір соболевського простору $W_2^k(I)$, що складається з функцій $u \in W_2^k(I)$, для яких $u(0) = 0$. Побудуємо наступні тензорні добутки просторів:

$$W_{2,0}^{-k}(I) \otimes H = W_{2,0}^{-k}(H, I),\ W_{2,0}^{k}(I) \otimes H = W_{2,0}^{k}(H, I).$$

В результаті отримаємо гільбертове оснащення простору $L^2(H, I)$:

$$W_{2,0}^{-k}(H, I) \supset L^2(H, I) \supset W_{2,0}^{k}(H, I). \tag{1}$$

У просторі H розглянемо рівномірно обмежені неперервні операторні коефіцієнти $A_0(t)$, $A_1(t), \ldots, A_m(t)$, $t \in I$; $A_0^*(t)$, $A_1^*(t)$, $\ldots$, $A_m^*(t)$ — спряжені до них. Побудуємо диференціальний вираз

$$(\mathcal{L}u)(t) = \left(\sum_{k=0}^{m} A_k(t) \frac{d^k}{dt^k} \right) u, \quad u \in W_{2,0}^{m}(H, I), \tag{2}$$

де $m = 1, 2, \ldots$.

Формально спряжений диференціальний вираз відносно простору $L^2(H, I)$ є таким:

$$(\mathcal{L}^{+}u)(t) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k A_k^*(t) \frac{d^k}{dt^k} u(t), \quad u \in W_{2,0}^{m}(H, I). \tag{3}$$

Множину всіх неперервних векторнозначних функцій $\widetilde{I} \ni t \longmapsto f(t) \in H$ позначимо через $C(H, \widetilde{I})$, а множину фінітних на I, k разів неперервно диференційовних функцій з $C(H, \widetilde{I})$ — через $C_0^k(H, I)$, $k = 0, 1, \ldots, \infty$.

Векторнозначну функцію $\varphi(t) \in W_{2,0}^{-l}(H, I)$, де $l = 1, 2, \ldots$, назвемо узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}^+ u = 0$ всередині інтервалу I, якщо

$$(\varphi, \mathcal{L}v)_{L^2(H,I)} = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(H, I). \tag{4}$$

Під фундаментальним розв'язком розуміють операторнозначну функцію

$$\widetilde{I} \times \widetilde{I} \ni (t, \tau) \longmapsto E(t, \tau) \in L(H),$$

що має такі властивості:

1) при кожному фіксованому $\tau \in \widetilde{I}$, $\tau \neq t$, існують частинні похідні $(D_t E)(t, \tau)$ як завгодно високого порядку, неперервні по (t, τ) в кожному з трикутників

$$\{(t, \tau) \in \widetilde{I} \times \widetilde{I} \mid t \leq \tau\}, \quad \{(t, \tau) \in \widetilde{I} \times \widetilde{I} \mid t \geq \tau\}; \tag{5}$$

2) справджується рівність

$$\mathcal{L}\left(\int\limits_I E(t, \tau) f(\tau) d\tau\right) = f(t),$$

де $t \in \widetilde{I}$, а $f(t)$ — векторнозначна функція з простору $C(H, I)$.

Ми будемо припускати коефіцієнти виразу $\mathcal{L}$ такими, що вказаний фундаментальний розв'язок існує. Умови на коефіцієнти, які забезпечують його існування, можна знайти в роботах [4, 8, 10 – 14].

Теорема 1. *Будь-який узагальнений розв'язок* $\varphi(t) \in W_{2,0}^{-l}(H, I)$, $l = 1, 2, \ldots$, *рівняння* $\mathcal{L}^+ u = 0$, *входить в* $W_2^p(H, I)$ *при будь-якому* $p = 1, 2, \ldots$, *тобто є звичайним.*

Доведення (воно узагальнює на диференціальні вирази з операторними коефіцієнтами відповідне доведення з [9] (гл. 16, § 6, п. 1) та результати, доведені в [1]). Спочатку покажемо, що для кожної точки $t_0 \in I$ існує окіл $U(t_0) = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq I$ такий, що $\varphi(t) \in W_{2,\mathrm{loc}}^p(H, U(t_0))$, де індекс loc означає локальне входження у простір.

Зафіксуємо $t_0 \in I$ і виберемо $\varepsilon > 0$ досить малим так, щоб $(t_0 - 3\varepsilon, t_0 + 3\varepsilon) \subseteq I$.

Нехай $k(x) \in C^\infty(R)$ анулюється при $|x| \geq \varepsilon$ і дорівнює одиниці в деякому околі нуля. По векторнозначній функції $\omega \in C_0^\infty(H, U(t_0))$ побудуємо векторнозначну функцію на I :

$$v(t) = \int\limits_I k(t - \tau) E(t, \tau) \omega(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{U(t_0)} [k(t - \tau) - 1] E(t, \tau) \omega(\tau) d\tau + \int\limits_{U(t_0)} E(t, \tau) \omega(\tau) d\tau, \quad t \in I. \tag{6}$$

Ця векторнозначна функція анулюється при $|t - t_0| \geq 2\varepsilon$, тому є фінітною відносно I. Вона гладка – входить в $C_0^\infty(H, I)$. Це випливає з диференціювання під знаком інтеграла та наявності похідних $(D_t E)(t,\tau)$ при $t \neq \tau$ довільного порядку, неперервних в обох трикутниках (5). (Відмітимо, що таку ж гладкість мають обидва інтеграли рівності (6).) Отже, функцію $v(t)$ можна підставити у рівність (4).

Враховуючи другу властивість фундаментального розв'язку, маємо

$$(\mathcal{L}v)(t) = \int\limits_{U(t_0)} \mathcal{L}_t \left([k(t-\tau)-1]E(t,\tau)\right)\omega(\tau)d\tau + \omega(t), \quad t \in \widetilde{I}. \tag{7}$$

Розглянемо ядро $K(t,\tau) = \mathcal{L}_t \left([k(t-\tau)-1]E(t,\tau)\right),\ t,\tau \in \widetilde{I}$. Враховуючи ануляцію множника $k(t-\tau)-1$ в околі діагоналі $t=\tau$ та наведені властивості фундаментального розв'язку, переконаємося, що існують похідні довільного порядку $(D_t D_\tau K)(t,\tau)$ для всіх $t,\ \tau \in \widetilde{I}$, до того ж неперервні по $(t,\tau) \in \widetilde{I} \times \widetilde{I}$.

У просторі $L^2(H,I)$ визначимо оператор

$$(Bu)(t) = \int\limits_I K(t,\tau)u(\tau)d\tau, \quad u \in L^2(H,I), \quad t \in \widetilde{I}. \tag{8}$$

Зауважимо, що функція $(Bu)(t)$ нескінченне число разів диференційовна. Оператор (8) можна розширити по неперервності до оператора, що діє неперервно з простору $W_{2,0}^{-p}(H,I)$ у простір $W_{2,0}^{p}(H,I)$, де $p = 1,2,\ldots$.

Для доведення зафіксуємо $\beta = 0,\ldots,p$ і введемо ядро

$$L_\beta(t,\tau) = (D_t^\beta K)(t,\tau), \quad t,\tau \in \widetilde{I}.$$

Таким чином,

$$(D^\beta Bu)(t) = \int\limits_I L_\beta(t,\tau)u(\tau)d\tau, \quad u \in L^2(H,I), \quad t \in \widetilde{I}.$$

Для $u \in L^2(H,I)$ і будь-якого $f \in H$ маємо

$$|((D^\beta Bu)(t), f)_H| = \left| \int\limits_I L_\beta(t,\tau)u(\tau), f)_H d\tau \right| =$$

$$\left| \int\limits_I (u(\tau), L_\beta^*(t,\tau)f)_H d\tau \right| \le \int\limits_I \left|(u(\tau), L_\beta^*(t,\tau)f)_{L^2(H,I)}\right| d\tau \le$$

$$\le (b-a)\|u\|_{W_{2,0}^{-p}(H,I)} \|L_\beta^*(t,\cdot)f\|_{W_{2,0}^{p}(H,I)}. \tag{9}$$

Оскільки $L_\beta(t,\cdot)$ — гладке ядро, то і $L_\beta^*(t,\tau) = (L_\beta(t,\tau))^*$ буде таким. Тоді з деякою сталою $c_\beta > 0$

$$\|L_\beta^*(t,\cdot)f\|_{W_{2,0}^{p}(H,I)} \le c_\beta \|f\|_H.$$

Далі, з (9) для будь-якого $f \in H$ отримаємо

$$|((D^{\beta}Bu)(x),f)_H| \leq \|u\|_{W_{2,0}^{-p}(H,I)} c_{\beta} \|f\|_H, \quad t \in \widetilde{I}.$$

Завдяки довільності $f \in H$ це означає, що

$$\|(D^{\beta}Bu)(t)\|_H \leq c_{\beta} \|u\|_{W_{2,0}^{-p}(H,I)}, \quad t \in \widetilde{I}. \tag{10}$$

Тепер зазначимо, що для нескінченно диференційовної векторнозначної функції $\widetilde{I} \ni t \longmapsto$ $\longmapsto v(t) \in H$ очевидно виконується нерівність

$$\|v\|_{W_{2,0}^{p}(H,I)} \leq c \sum_{\beta=0}^{p} \max\nolimits_{t \in \widetilde{I}} \|(D^{\beta}v)(t)\|_H, \tag{11}$$

де $c > c_{\beta}$ — деяка стала.

З нерівностей (10) і (11) випливає, що з деяким $d > 0$

$$\|Bu\|_{W_{2,0}^{p}(H,I)} \leq c \sum_{\beta=0}^{p} \max\nolimits_{t \in \widetilde{I}} \|(D^{\beta}Bu)(t)\|_H \leq d \|u\|_{W_{2,0}^{-p}(H,I)}. \tag{12}$$

Нерівність (12) означає, що оператор B діє неперервно з простору $W_{2,0}^{-p}(H,I)$ у простір $W_{2,0}^{p}(H,I)$, що й потрібно було довести.

Але тоді спряжений відносно $L^2(H,I)$ в ланцюжку (1) з $k = p$ оператор B^+ також діє неперервно з простору $W_{2,0}^{-p}(H,I)$ у простір $W_{2,0}^{p}(H,I)$. Використовуючи рівності (7), (8), маємо

$$\mathcal{L}v = B\omega + \omega, \ \omega \in C_0^{\infty}(H, U(t_0)).$$

Підставимо цю рівність у співвідношення (4):

$$0 = (\varphi, \mathcal{L}v)_{L^2(H,I)} = (\varphi, B\omega)_{L^2(H,I)} + (\varphi, \omega)_{L^2(H,I)} =$$

$$= (B^+\varphi, \omega)_{L^2(H,I)} + (\varphi, \omega)_{L^2(H,I)}\,.$$

Таким чином, для будь-якого $\omega \in C_0^{\infty}(H, U(t_0))$

$$(\varphi, \omega)_{L^2(H,I)} = (-B^+\varphi, \omega)_{L^2(H,I)}\,,$$

де $-B^+\varphi \in W_{2,0}^{p}(H,I)$, а це означає, що

$$\varphi(t) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{p}(H,I). \tag{13}$$

Позбудемось індексу loc у включенні (13). Відповідно до теорем вкладення $W_{2,\mathrm{loc}}^{p}(H,I) \subset$ $\subset C(H,I)$. Зафіксуємо $c \in (a,b)$ і позначимо через φ розв'язок ω задачі Коші на $\widetilde{I} = (a,b)$

$$(\mathcal{L}^+\omega)(t) = 0, \ t \in \widetilde{I}, \omega(c) = \varphi(c).$$

Згідно з класичними теоремами цей розв'язок існує і входить у $W_{2,0}^{p}(H,I)$. З іншого боку, функція $\varphi(t)$ також є розв'язком цієї задачі Коші в деякому околі точки c. Внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші $\varphi(t) = \omega(t), \ t \in I$, отже, $\omega = \varphi \in W_{2,0}^{p}(H,I)$ і є розв'язком рівняння $(\mathcal{L}^+\varphi)(t) = 0, \ t \in \widetilde{I}$.

***Зауваження* 1.** Оскільки $\varphi \in W^p_{2,0}(H, I)$ з як завгодно великим $p = 1, 2, \ldots$, то це означає, що $\varphi \in C^\infty(H, I)$.

***Зауваження* 2.** Одержаний результат залишається справедливим, якщо за простір $W^k_{2,0}(I)$ взяти підпростір соболевського простору $W^k_2(I)$, що складається з функцій, для яких $u(0) = = \dfrac{du}{dt}(0) = \ldots = \dfrac{d^l u}{dt^l}(0) = 0$, де $l < k$ є фіксованим.

***Зауваження* 3.** Теорему, подібну до теореми 1, можна довести і для неоднорідного рівняння типу 1 – 3 (пор. з [9], гл.14, § 6).

1. *Чернобай О. Б.* Про узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 715 – 720.
2. *Горбачук М. Л.* О представлении положительно определенных операторных функций // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 2. – С. 29 – 46.
3. *Горбачук М. Л., Кашпировский А. И.* О слабых решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1981. – **17**, № 4. – С. 513 – 518.
4. *Кашпировский А. И.* Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1981. – 18 с.
5. *Чернобай О. Б.* Спектральне представлення для узагальнених операторнозначних ядер Тепліца // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 12. – С. 1698 – 1710.
6. *Berezansky Yu. M., Chernobai O. B.* On the theory of generalized Toeplitz kernels // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1458 – 1472.
7. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* Граничные задачи для диференциальных операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1994. – 284 с.
8. *Кочубей А. Н.* Фундаментальные решения дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 9. – С. 1588 – 1597.
9. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.
11. *Трев Ж.* Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1965. – 296 с.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
13. *Tsar'kov M. Yu.* Solvability of differential equations with operator coefficients // J. Math. Sci. – 2001. – **103**, № 1. – P. 131 – 134.
14. *Aydin Akgun, Fatma.* On the Green function of a second order differential equation with operator coefficient // An. Univ. Oradea. Fasc. Mat. – 2006. – **13**. – P. 5 – 22.

Отримано 20.12.11