УДК 512.64+519.17

В. М. Бондаренко, В. В. Бондаренко (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Ю. Н. Перегуда (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ЛОКАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

We give a complete description of real numbers that are P-limit numbers for integer-valued positive-definite quadratic forms with unit coefficients of the squares. It is shown that each of these P-limit numbers is realized in the Tits quadratic form of a Dynkin diagram.

Наведено повний опис дійсних чисел, які є P-граничними для цілочислових додатно означених квадратичних форм з одиничними коефіцієнтами біля квадратів. Показано, що кожне таке P-граничне число реалізується на квадратичній формі Тітса деякої діаграми Динкіна.

1. Введение. *Деформацией квадратичной формы* $f(z)$ мы называем семейство квадратичных форм, параметризованных точками некоторого многообразия, одной из точек которого соответствует квадратичная форма $f(z)$. В настоящей статье рассматриваются квадратичные формы

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j$$

над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ и их деформации вида

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \ldots, z_n, a) = a f_{ss} z_s^2 + \sum_{i \neq s} f_{ii} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j$$

с (пробегающим прямую $\mathbb{R}$) параметром a, которые мы называем *локальными*. Изучение таких деформаций начато в работе [1].

Число c назовем *P-граничным числом для z_s* или *s-м P-граничным числом* $\big($для формы $f(z)\big)$, если квадратичная форма $f^{(s)}(z, x)$ является положительно определенной для любого $x > c$, а форма $f^{(s)}(z, c)$ таковой не является; если же такого числа c не существует (а это может случиться только для не положительно определенной формы), то в этом случае P-граничным числом считаем ∞.

Основной целью данной статьи является описание подмножества $\mathcal{L}^+ \subset \mathbb{R}$, состоящего из всех P-граничных чисел для всех целочисленных положительно определенных квадратичных форм $f(z)$ с единичными коэффициентами при квадратах ($f_{ii} = 1$ для любого i), а также подмножеств $\mathcal{L}_n^+ \subset \mathcal{L}^+$, соответствующих неразложимым квадратичным формам от n переменных. Для таких квадратичных форм все P-граничные числа являются рациональными и справедливы следующие теоремы.

Теорема А.

$$\mathcal{L}^+ = \left\{ 1 - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ 1 - \frac{2}{c+1} \,\middle|\, c \in \mathbb{N} \right\} =$$

$$= \left\{ 1 - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ 1 - \frac{2}{4r+1} \,\middle|\, r \in \mathbb{N} \right\}.$$

Теорема B.

$$\mathcal{L}_1^+ = \{0\}, \qquad \mathcal{L}_2^+ = \left\{\frac{1}{4}\right\}, \qquad \mathcal{L}_3^+ = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}, \qquad \mathcal{L}_4^+ = \left\{\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}\right\},$$

$$\mathcal{L}_5^+ = \left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right\}, \qquad \mathcal{L}_6^+ = \left\{\frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{13}{20}, \frac{2}{3}, \frac{17}{24}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{17}{20}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}\right\},$$

$$\mathcal{L}_7^+ = \left\{\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{11}{15}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{14}{15}, \frac{23}{24}\right\},$$

$$\mathcal{L}_8^+ = \left\{\frac{7}{16}, \frac{1}{2}, \frac{19}{28}, \frac{3}{4}, \frac{31}{40}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{15}{16}, \frac{23}{24}, \frac{27}{28}, \frac{39}{40}, \frac{59}{60}\right\}$$

и для произвольного натурального числа $n > 8$

$$\mathcal{L}_n^+ = \left\{1 - \frac{1}{2i} - \frac{1}{2(n+1-i)} \,\middle|\, 1 \le i \le n\right\} \bigcup \left\{1 - \frac{1}{2j} \,\middle|\, 1 \le j \le n-2\right\} \bigcup \left\{1 - \frac{2}{n}\right\}.$$

Заметим, что два подмножества, входящие в правую часть равенства, указанного в условии теоремы A, пересекаются (но не совпадают) (см. п. 5).

2. Свойства локальных деформаций положительно определенных форм. Множество всех положительно определенных (сокращенно: положительных) квадратичных форм от n переменнных

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j$$

над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{R}_n^+$ (n — натуральное число).

Пусть $f(z) \in \mathcal{R}_n^+$ и $s \in \{1, \ldots, n\}$. *Локальной деформацией* $f(z)$ *относительно* z_s или s*-деформацией* $f(z)$ назовем квадратичную форму

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \ldots, z_n, a) = a f_{ss} z_s^2 + \sum_{i \ne s} f_{ii} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j$$

с (пробегающим прямую $\mathbb{R}$) параметром a. Обозначим через $F_+^{(s)}$ множество всех $b \in \mathbb{R}$ таких, что форма $f^{(s)}(z, b)$ является положительной; очевидно, $F_+^{(s)} \subseteq \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \,|\, r > 0\}$. Положим $F_-^{(s)} = \mathbb{R} \setminus F_+^{(s)}$, т. е. $c \in F_-^{(s)}$, если существует ненулевой вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ такой, что $f^{(s)}(x, c) \le 0$; очевидно, что при этом $c < 1$. Поскольку из $c \in F_-^{(s)}$ следует, что $d \in F_-^{(s)}$ для произвольного $d < c$, супремум $m_f^{(s)} = \sup \mathrm{F}_-^{(s)}$ является граничной точкой. Легко показать, что $m_f^{(s)}$ — наибольший элемент $F_-^{(s)}$ (см. [1], теорема 2). Число $m_f^{(s)}$ будем называть *P-граничным числом для z_s* или *s-м P-граничным числом* (квадратичной формы $f(z)$). Из изложенного следует такое утверждение.

Предложение 1. *Все P-граничные числа квадратичной формы $f(z) \in \mathcal{R}_n^+$ лежат на полуоткрытом интервале* $[0, 1)$.

Отметим, что в силу той же теоремы 2 работы [1] квадратичная форма $f^{(s)}(z, m_f^{(s)})$ является неотрицательно определенной.

Напомним, что квадратичная форма $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ называется *разложимой*, если существует собственное подмножество $S \subset N = \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $f_{ij} = 0$ при $i \in S$, $j \in N \setminus S$ и при $i \in N \setminus S$, $j \in S$; в противном случае форма называется *неразложимой*. Обозначим через $g = g(z_i \,|\, i \in S)$ квадратичную форму от переменных z_i, $i \in S$, которая получается из разложимой формы $f(z)$ „игнорированием” переменных z_i, $i \in N \setminus S$ (т. е. в $f(z)$ нужно положить $z_i = 0$ при $i \in N \setminus S$).

Непосредственно из определения P-граничных чисел имеем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $f(z) \in \mathcal{R}_n^+$ и $s \in S$. Тогда $m_g^{(s)} = m_f^{(s)}$.*

Определитель симметричной матрицы

$$M(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1,n-1} & f_{1n} \\ f_{12} & 2f_{22} & \ldots & f_{2,n-1} & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{1,n-1} & f_{2,n-1} & \ldots & 2f_{n-1,n-1} & f_{n-1,n} \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots & f_{n-1,n} & 2f_{nn} \end{pmatrix}$$

квадратичной формы $f = f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ называется *дискриминантом* формы и обозначается $\mathcal{D}(f)$. В случае, когда $f \in \mathcal{R}_n^+$, дискриминант формы f является положительным.

Теорема 1. *Пусть $f = f(z) \in \mathcal{R}_n^+$, где $n > 1$, и $f_{\downarrow s} = f_{\downarrow s}(z_1, \ldots, z_{s-1}, z_{s+1}, \ldots, z_n)$ обозначает* (*положительную*) *квадратичную форму $f(z_1, \ldots, z_{s-1}, 0, z_{s+1}, \ldots, z_n)$, где $1 \leq s \leq$ $\leq n$. Тогда для P-граничных чисел $m_f^{(s)}$ формы f выполняется равенство*

$$m_f^{(s)} = 1 - \frac{\mathcal{D}(f)}{f_{ss}\mathcal{D}(f_{\downarrow s})}.$$

Доказательство. Можно считать, что $s = n$ (в противном случае перенумеруем переменные квадратичной формы f, причем при этом, очевидно, все входящие в доказываемое равенство величины не изменятся). Рассмотрим симметричную матрицу квадратичной формы $f^{(n)}(z, a) = f^{(n)}(z_1, \ldots, z_n, a)$:

$$\overline{M}(a) = M(f^{(n)}(z, a)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1,n-1} & f_{1n} \\ f_{12} & 2f_{22} & \ldots & f_{2,n-1} & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ f_{1,n-1} & f_{2,n-1} & \ldots & 2f_{n-1,n-1} & f_{n-1,n} \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots & f_{n-1,n} & 2af_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поскольку первые $n - 1$ угловых миноров этой матрицы совпадают с соответствующими минорами матрицы $M(f)$ (положительной формы f), из критерия Сильвестра (утверждающего, что вещественная квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все ее угловые миноры) следует, что необходимым и достаточным условием положительной определенности квадратичной формы $f^{(n)}(z,a)$ для фиксированного значения параметра a является неравенство $\mathcal{D}(f^{(n)}(z,a)) > 0$.

Вычислим дискриминант $\mathcal{D}(f^{(n)}(z,a))$ с помощью разложения по последней строке

$$\left(\frac{f_{1n}}{2}, \frac{f_{2n}}{2}, \ldots, \frac{f_{n-1,n}}{2}, \quad af_{nn}\right)$$

матрицы $\overline{M}(a)$, учитывая, что $(n-1)$-й угловой минор этой матрицы равен $\mathcal{D}(f_{\downarrow n})$:

$$\mathcal{D}(f^{(n)}(z,a)) = \widehat{D} + af_{nn}\mathcal{D}(f_{\downarrow n}), \tag{1}$$

где

$$\widehat{D} = (-1)^{n+1}\frac{f_{1n}}{2}\overline{M}_{1n} + (-1)^{n+2}\frac{f_{2n}}{2}\overline{M}_{2n} + \ldots + (-1)^{2n-1}\frac{f_{n-1,n}}{2}\overline{M}_{n-1,n}$$

($\overline{M}_{1,n}, \overline{M}_{2,n}, \ldots, \overline{M}_{n-1,n}$ — соответствующие дополнительные миноры матрицы $\overline{M}(a)$). Равенство (1) выполняется для произвольного a и, в частности, для $a = 1$. Так как $f^{(n)}(z,1) = f$, а $\widehat{D}$ не зависит, очевидно, от a, из равенства (1) имеем

$$\mathcal{D}(f) = \widehat{D} + f_{nn}\mathcal{D}(f_{\downarrow n}). \tag{2}$$

В силу равенств (1) и (2)

$$\mathcal{D}(f^{(n)}(z,a)) = \mathcal{D}(f) + (a-1)f_{nn}\mathcal{D}(f_{\downarrow n})$$

и, следовательно, квадратичная форма $f^{(n)}(z,a)$ положительно определена тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\mathcal{D}(f) + (a-1)f_{nn}\mathcal{D}(f_{\downarrow n}) > 0,$$

т. е.

$$a > 1 - \frac{\mathcal{D}(f)}{f_{nn}\mathcal{D}(f_{\downarrow n})}.$$

Отсюда имеем

$$m_f^{(n)} = 1 - \frac{\mathcal{D}(f)}{f_{nn}\mathcal{D}(f_{\downarrow n})},$$

что и требовалось доказать.

Непосредственно из этой теоремы следует такое утверждение.

***Следствие* 1.** *При $n > 1$ все P-граничные числа являются рациональными и лежат в открытом интервале* $(0,1)$.

Если же $f \in \mathcal{R}_1^+$, то, очевидно, единственное P-граничное число $m_f^{(1)}$ равно нулю.

3. Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм Титса неориентированных графов. В этом пункте мы изучаем локальные деформации положительных квадратичных форм вида

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i<j} f_{ij}z_iz_j,$$

где $f_{ij} \in \{0, 1\}$ (заметим, что если $f_{ij} \geq 2$ для некоторых $i \neq j$, то квадратичная форма не будет положительной). Множество всех таких форм от n переменных (не обязательно положительных) обозначим через $\mathcal{Q}_n$, а положительных — через $\mathcal{Q}_n^+$. Положим $\mathcal{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_n$, $\mathcal{Q}^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_n^+$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

3.1. Квадратичные формы Титса. Каждой квадратичной форме $f = f(z) \in \mathcal{Q}_n$ можно естественным образом сопоставить (конечный) неориентированный граф $G(f)$: вершинами графа являются $1, 2, \ldots, n$ и при этом вершины i и j, где $i < j$, соединены ребром $(i, j) = (j, i)$ тогда и только тогда, когда $f_{ij} = 1$. Очевидно, что таким образом получаются все конечные графы G без кратных ребер и петель (если рассматривать все формы $f \in \mathcal{Q}$). Более того, форма $f(z) \in \mathcal{Q}$ однозначно восстанавливается по своему графу G. Она называется *квадратичной формой Титса графа* G и обозначается нами $q_G(z)$.

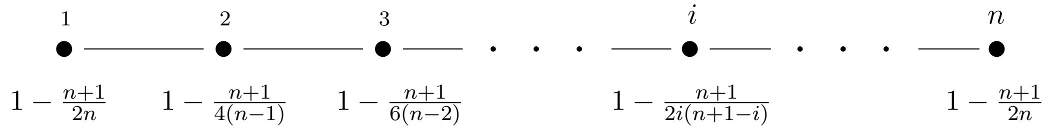
Таким образом, вместо множества квадратичных форм $\mathcal{Q}$ (соответственно, $\mathcal{Q}_n$) можно рассматривать множество $\mathcal{T}$ (соответственно, $\mathcal{T}_n$) квадратичных форм Титса $q_G(z)$, где G пробегает все конечные графы (соответственно, состоящие из n вершин) без кратных ребер и петель. В дальнейшем будем рассматривать только такие графы. Подход, использующий геометрическую интерпретацию, всегда более наглядный и удобный.

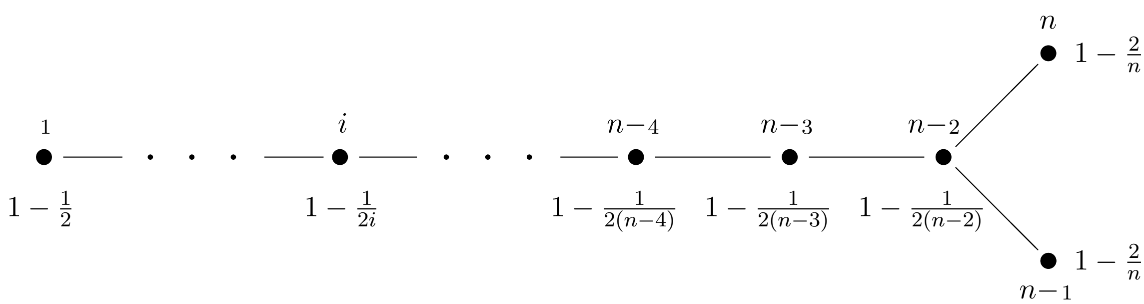
***3.2. Описание P-граничных чисел* (*формулировка теоремы*).** В силу предложения 2 P-граничные числа достаточно описать для неразложимых квадратичных форм Титса (разложимые формы не добавляют новых P-граничных чисел). Очевидно, что квадратичная форма $q_G(z)$ неразложима тогда и только тогда, когда граф G связен. Связные графы G с положительной формой Титса — это в точности диаграммы Дынкина с однократными ребрами: A_n $(n \geq 1)$, $D_n (n \geq 4)$, E_6, E_7, E_8 (см. [2]). В дальшейшем под диаграммами Дынкина будем подразумевать только такие графы.

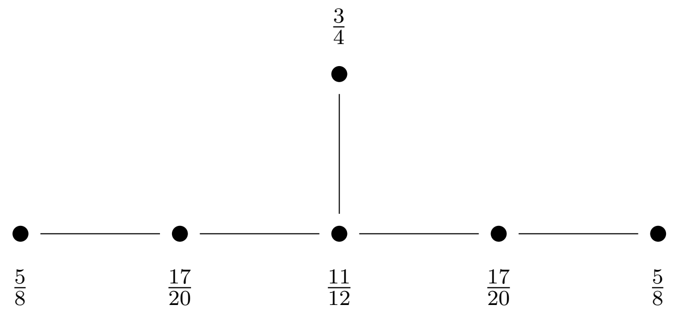
С формальных соображений удобнее говорить о P-граничных числах графов G вместо P-граничных чисел квадратичных форм Титса $q_G(z)$. Именно, *P-граничным числом вершины* s графа G назовем s-е P-граничное число формы $f = q_G(z)$; в этом случае кроме обычного обозначения $m_f^{(s)}$ будем использовать обозначение $m_G^{(s)}$.

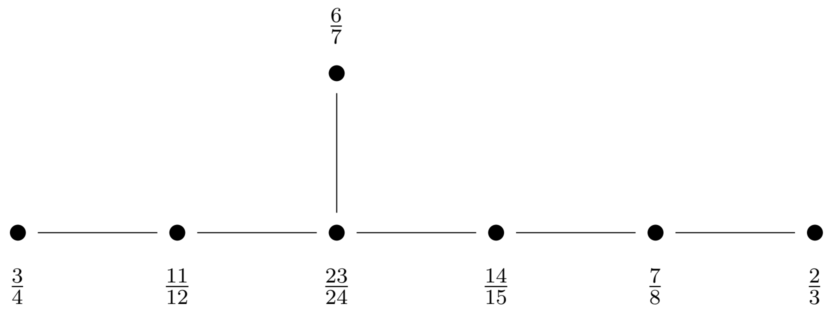
Следующая теорема описывает все P-граничные числа диаграмм Дынкина.

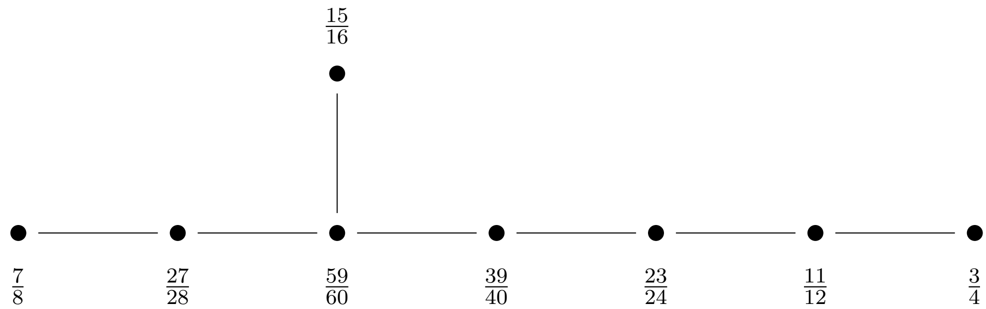
Теорема 2. *P-граничными для диаграмм Дынкина A_n $(n \geq 1)$, D_n $(n \geq 4)$, E_6, E_7, E_8 являются следующие числа*:











Из этой теоремы (с учетом предложения 2) следует, что для P-граничных чисел положительно квадратичных форм Титса для графов имеют место теоремы A и B (сформулированные во введении для всех положительных целочисленных форм с единичными коэффициентами возле квадратов). Об этом будет идти речь в следующем пункте.

Доказательству теоремы 2 посвящены пп. 3.3, 3.4.

3.3. Описание d-весов диаграмм Дынкина. Мы называем *d-весом графа* Γ дискриминант симметричной матрицы соответствующей квадратичной формы Титса $q_\Gamma(z)$ и обозначаем его $w^d(\Gamma)$. Положим $W^d(\Gamma) = 2^s w^d(\Gamma)$, где s — число вершин графа Γ.

Следующее утверждение описывает d-веса диаграмм Дынкина.

Предложение 3. *Диаграммы Дынкина* A_n $(n \geq 1)$, D_n $(n \geq 4)$, E_n $(n = 6, 7, 8)$ *имеют следующие d-веса*:

$$w^d(A_n) = \frac{n+1}{2^n}, \qquad w^d(D_n) = \frac{1}{2^{n-2}}, \qquad w^d(E_n) = \frac{9-n}{2^n}.$$

Доказательство. Очевидно, что дискриминант квадратичной формы не изменяется при перенумерации переменных; следовательно, d-вес графа не изменяется при перенумерации вершин графа. Мы будем нумеровать вершины диаграмм Дынкина A_n и D_n таким же образом, как и в условии теоремы 2; вершины графа E_n также нумеруются естественным образом: вершины его подграфа вида A_{n-1} — слева направо числами $1, \ldots, n-1$, а вершина, находящаяся на диаграмме выше остальных, — числом n.

Указанные в условии равенства эквивалентны соответственно равенствам

$$W^d(A_n) = n + 1, \qquad W^d(D_n) = 4, \qquad W^d(E_n) = 9 - n,$$

которые мы и будем доказывать.

Докажем сначала первое равенство. Полагая, для удобства, $W(n) = W^d(A_n)$, имеем следующее равенство (с матрицей размера $n \times n$):

$$W(n) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $W(1) = 2$ и $W(2) = 3$. Если же $n > 2$, то, разлагая указанный определитель по первой строке, а затем второй из полученных определителей по первому столбцу, получаем рекуррентное равенство

$$W(n) = 2W(n-1) - W(n-2).$$

Используя три полученных равенства, легко показать (применив, например, индукцию по n), что $W(n) = W^d(A_n) = n + 1$.

Докажем теперь равенство $W^d(D_n) = 4$. Полагая $\overline{W}(n) = W^d(D_n)$, имеем следующее равенство (с матрицей размера $n \times n$):

$$\overline{W}(n) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Если $n > 5$, то, разлагая (как и в первом случае) указанный определитель по первой строке, а затем второй из полученных определителей по первому столбцу, получаем рекуррентное равенство

$$\overline{W}(n) = 2\overline{W}(n-1) - \overline{W}(n-2).$$

С помощью такого же разложения при $n = 4$ и $n = 5$ имеем соответственно

$$\overline{W}(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4, \qquad \overline{W}(5) = 2\overline{W}(4) - 4 = 4.$$

Используя полученные равенства, легко показать, что $\overline{W}(n) = W^d(D_n) = 4$.

Докажем, наконец, равенство $W^d(E_n) = 9-n$. Полагая $\widehat{W}(n) = W^d(E_n)$, имеем следующее равенство (с матрицей размера $n \times n$):

$$\widehat{W}(n) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим указанный определитель по последней строке, а затем первый из полученных определителей по последнему столбцу. В результате получим, что $\widehat{W}(n)$ является суммой числа $-3(n-3)$ $\big($как определителя, со знаком минус, прямой суммы матриц $W(2)$ и $W(n-4)\big)$ и числа $2n$ (как умноженного на 2 определителя матрицы $W(n-1)$), т. е. $\widehat{W}(n) = 9 - n$.

Предложение 3 доказано.

Заметим, что последнее (указанное в условии предложения) равенство доказано на самом деле для графа E_n при любом $n \geq 6$ (для $n > 8$ такой граф определяется очевидным образом).

***3.4. Доказательство теоремы* 2.** При рассмотрении диаграмм Дынкина будем всегда считать, что их вершины занумерованы таким же образом, как и в пп 3.3.

Через $\Gamma \setminus i$, где Γ — граф и i — его вершина, будем обозначать граф, который получается из Γ отбрасыванием вершины i вместе с ребрами вида $(i, j) = (j, i)$. Для графов знаком $\cup$ будет обозначать их дизъюнктивное объединение (т. е. объединение без пересечений). Если Γ — диаграмма Дынкина, состоящая из $n > 1$ вершин, то, очевидно, граф $\Gamma \setminus i$ является либо диаграммой Дынкина, либо дизъюнктивным объединением двух или трех диаграмм Дынкина. Мы воспользуемся этим фактом вместе с предложением 3, чтобы вычислить d-веса для произвольного графа $\Gamma \setminus i$. Именно, в первом случае d-вес $\Gamma \setminus i$ указан в предложении 3, а если $\Gamma \setminus i$ — дизъюнктивное объединение диаграмм Дынкина Γ_1 и Γ_2 (соответственно, диаграмм Дынкина Γ_1, Γ_2 и Γ_3), то симметричная матрица квадратичной формы Титса графа $\Gamma \setminus i$ является прямой суммой двух (соответственно, трех) матриц, являющихся матрицами квадратичных форм Титса графов Γ_1 и Γ_2 (соответственно, Γ_1, Γ_2 и Γ_3). Следовательно, d-вес графа $\Gamma \setminus i$ является произведением d-весов диаграмм Дынкина Γ_1 и Γ_2 (соответственно, Γ_1, Γ_2 и Γ_3), а d-веса диаграмм Дынкина указаны в предложении 3.

Вычислим теперь указанным способом все d-веса $\Gamma \setminus i$, где Γ — произвольная диаграмма Дынкина (кроме A_1) и i — ее произвольная вершина.

Для диаграмм Дынкина A_n и D_n имеем

$$w^d(A_n \setminus 1) = w^d(A_n \setminus n) = w^d(A_{n-1}) = \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$w^d(A_n \setminus i) = w^d(A_{i-1} \cup A_{n-i}) = \frac{i}{2^{i-1}} \frac{n-i+1}{2^{n-i}} = \frac{i(n-i+1)}{2^{n-1}} \qquad \text{для} \quad i \neq 1, n,$$

$$w^d(D_n \setminus 1) = w^d(D_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-3}},$$

$$w^d(D_n \setminus i) = w^d(A_{i-1} \cup D_{n-i}) = \frac{i}{2^{i-1}} \frac{1}{2^{n-i-2}} = \frac{i}{2^{n-3}} \qquad \text{для} \quad 1 < i \leq n-4,$$

$$w^d(D_n \setminus n-3) = w^d(A_{n-4} \cup A_3) = \frac{n-3}{2^{n-4}} \frac{4}{2^3} = \frac{n-3}{2^{n-3}},$$

$$w^d(D_n \setminus n-2) = w^d(A_{n-3} \cup A_1 \cup A_1) = \frac{n-2}{2^{n-3}},$$

$$w^d(D_n \setminus n-1) = w^d(D_n \setminus n) = w^d(A_{n-1}) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Перейдем к диаграммам Дынкина $E_n, n = 6, 7, 8$. Будем считать, что их вершины занумерованы естественным образом, указанным в доказательстве предложения 3.

Для диаграммы E_6 имеем

$$w^d(E_6 \setminus 1) = w^d(E_6 \setminus 5) = w^d(D_5) = \frac{1}{2^3}, \qquad w^d(E_6 \setminus 2) = w^d(E_6 \setminus 4) = w^d(A_1 \cup A_4) = \frac{5}{2^4},$$

$$w^d(E_6 \setminus 3) = w^d(A_2 \cup A_2 \cup A_1) = \frac{9}{2^4}, \qquad w^d(E_6 \setminus 6) = w^d(A_5) = \frac{3}{2^4},$$

для диаграммы E_7

$$w^d(E_7 \setminus 1) = w^d(D_6) = \frac{1}{2^4}, \qquad w^d(E_7 \setminus 2) = w^d(A_1 \cup A_5) = \frac{3}{2^4},$$

$$w^d(E_7 \setminus 3) = w^d(A_2 \cup A_3 \cup A_1) = \frac{3}{2^3}, \qquad w^d(E_7 \setminus 4) = w^d(A_4 \cup A_2) = \frac{15}{2^6},$$

$$w^d(E_7 \setminus 5) = w^d(D_5 \cup A_1) = \frac{1}{2^3}, \qquad w^d(E_7 \setminus 6) = w^d(E_6) = \frac{3}{2^6},$$

$$w^d(E_7 \setminus 7) = w^d(A_6) = \frac{7}{2^6}$$

и, наконец, для диаграммы E_8

$$w^d(E_8\setminus 1)=w^d(D_7)=\frac{1}{2^5},\qquad w^d(E_8\setminus 2)=w^d(A_1\cup A_6)=\frac{7}{2^6},$$

$$w^d(E_8\setminus 3)=w^d(A_2\cup A_4\cup A_1)=\frac{15}{2^6},\qquad w^d(E_8\setminus 4)=w^d(A_4\cup A_3)=\frac{5}{2^5},$$

$$w^d(E_8\setminus 5)=w^d(D_5\cup A_2)=\frac{3}{2^5},\qquad w^d(E_8\setminus 6)=w^d(E_6\cup A_1)=\frac{3}{2^6},$$

$$w^d(E_8\setminus 7)=w^d(E_7)=\frac{1}{2^6},\qquad w^d(E_8\setminus 8)=w^d(A_7)=\frac{1}{2^4}.$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2.

Для диаграммы A_1 доказательство очевидно. Во всех остальных случаях воспользуемся формулой из теоремы 1, которую в случае квадратичных форм Титса для графов можно записать в виде

$$m_G^{(s)}=1-\frac{w^d(G)}{w^d(G\setminus s)},$$

где $m_G^{(s)}$ — s-е P-граничное число графа G. В частности, в силу предложения 3 для диаграмм Дынкина A_n $(n\geq 1)$, D_n $(n\geq 4)$, E_6, E_7 и E_8 имеем следующие формулы:

$$m_{A_n}^{(s)}=1-\frac{n+1}{2^n w^d(A_n\setminus s)},\qquad m_{D_n}^{(s)}=1-\frac{1}{2^{n-2}w^d(D_n\setminus s)},$$

$$m_{E_6}^{(s)}=1-\frac{3}{2^6 w^d(E_6\setminus s)},\qquad m_{E_7}^{(s)}=1-\frac{1}{2^6 w^d(E_7\setminus s)},\qquad m_{E_8}^{(s)}=1-\frac{1}{2^8 w^d(E_8\setminus s)}.$$

Подставляя в них для каждого s вычисленные выше значения величин $w^d(A_n\setminus s)$, $w^d(D_n\setminus s)$, $w^d(E_6\setminus s)$, $w^d(E_7\setminus s)$ и $w^d(E_8\setminus s)$, получаем P-граничные числа, указанные в условии теоремы 2.

4. *P*-граничные числа в общем случае. В этом пункте мы опишем P-граничные числа для квадратичных форм $f(z)\in\mathcal{R}_n^+$, доказав при этом (сформулированные во введении) теоремы A и B.

4.1. Стабильные линейные преобразования. Пусть $f(z)$ — квадратичная форма n переменных над полем действительных чисел с симметричной матрицей $F=M(f)$:

$$f(z)=f(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{i=1}^n f_{ii}z_i^2+\sum_{i<j}f_{ij}z_iz_j=zFz^T=$$

$$=(z_1,z_2,\ldots,z_n)\begin{pmatrix} f_{11} & \frac{f_{12}}{2} & \ldots & \frac{f_{1,n-1}}{2} & \frac{f_{1n}}{2}\\ \frac{f_{12}}{2} & f_{22} & \ldots & \frac{f_{2,n-1}}{2} & \frac{f_{2n}}{2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{f_{1,n-1}}{2} & \frac{f_{2,n-1}}{2} & \ldots & f_{n-1,n-1} & \frac{f_{n-1,n}}{2}\\ \frac{f_{1n}}{2} & \frac{f_{2n}}{2} & \ldots & \frac{f_{n-1,n}}{2} & f_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}.$$

Если в квадратичной форме $f(z)$ выполнить линейное преобразование $z = yA$ с невырожденной матрицей A или (в развернутом виде)

$$(z_1, \ldots, z_n) = (y_1, \ldots, y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то получим квадратичную форму

$$\overline{f}(y) = \overline{f}(y_1, \ldots, y_n) = (yA)F(A^T y^T) = y \left(AFA^T\right) y^T.$$

Для $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ линейное преобразование $z = yA$ назовем *s-стабильным*, если s-й столбец матрицы A совпадает с s-м столбцом единичной матрицы E размера $n \times n$. Матрицу с указанным свойством будем называть также *s-стабильной*.

Предложение 4*. *Пусть квадратичная форма $f(z)$ положительно определена. Если преобразование $z = yA$ s-стабильно, то s-е P-граничное число квадратичой формы $\overline{f}(y)$ совпадает с s-м P-граничным числом квадратичной формы $f(z)$.*

Доказательство. Случай $n = 1$ очевиден, а при $n > 1$ можно считать, что $s = 1$ (иначе перенумеруем переменные квадратичной формы). Если N — квадратная матрица, то матрицу, которая получается из нее вычеркиванием первой строки и первого столбца, будет обозначать через $\widetilde{N}$. Блоки матрицы, явный вид которых нас не интересует, будем обозначать символом $*$. Тогда для матрицы $\overline{F} = M(\overline{f})$ имеем

$$\overline{F} = M(\overline{f}) = AFA^T = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \widetilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ * & \widetilde{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \widetilde{A}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \widetilde{A}\widetilde{F}\widetilde{A}^T \end{pmatrix},$$

и, значит, с одной стороны, $\mathcal{D}(\overline{f}) = |\overline{F}| = |AFA^T| = |A|^2|F| = |\widetilde{A}|^2\mathcal{D}(f)$, а с другой — $\mathcal{D}(\overline{f}_{\downarrow 1}) = |\widetilde{\overline{F}}| = |\widetilde{A}\widetilde{F}\widetilde{A}^T| = |\widetilde{A}|^2|\widetilde{F}| = |\widetilde{A}|^2\mathcal{D}(f_{\downarrow 1})$, откуда

$$\frac{\mathcal{D}(\overline{f})}{\mathcal{D}(\overline{f}_{\downarrow 1})} = \frac{\mathcal{D}(f)}{\mathcal{D}(f_{\downarrow 1})}.$$

Теперь требуемое утверждение следует из теоремы 1.

4.2. Сведение общего случая к квадратичным формам Титса для графов. Напомним, что две квадратичные формы (в данном случае над полем действительных чисел) называются *эквивалентными*, если одна из них превращается в другую в результате применения к входящим в нее переменным невырожденного линейного преобразования. Если обе формы целочисленные, то они называются *$\mathbb{Z}$-эквивалентными*, если матрица, задающая линейное преобразование, является целочисленной и обратимой над $\mathbb{Z}$. Аналогично, будем называть квадратичные формы *s-стабильно эквивалентными*, если матрица линейного преобразования является s-стабильной,

*Предложение верно и для $-s$-стабильности, которая (по определению) отличается от s-стабильности только знаком диагонального элемента в s-м столбце матрицы A.

и *s-стабильно $\mathbb{Z}$-эквивалентными*, если эта s-стабильная матрица к тому же целочисленна и обратима над $\mathbb{Z}$.

Рассмотрим теперь общий случай положительных целочисленных квадратичных форм с единичными коэффициентами при квадратах:

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j,$$

где $f_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ (заметим, что если $|f_{ij}| \geq 2$ для некоторых $i \neq j$, то квадратичная форма не будет положительной). Множество всех таких положительных форм от n переменных обозначим через $\mathcal{Z}_n^+$ (очевидно, что это множество конечно).

В этом пункте будет доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для любой неразложимой квадратичной формы $f = f(z) \in \mathcal{Z}_n^+$ и $s \in \in \{1, \dots, n\}$ существует s-стабильно $\mathbb{Z}$-эквивалентная квадратичная форма, являющаяся квадратичной формой Титса некоторой диаграммы Дынкина.*

Доказательство. Пусть $g(z) \in \mathcal{Z}_n^+$. В силу алгоритма Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду или, например, теоремы 1 [3] (гл. XIV, §3), рассмотренных для поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, существует невырожденная матрица A (с элементами из $\mathbb{Q}$) такая, что

$$AM(g)A^T = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} p_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

где $p_1, \dots, p_n$ и q — натуральные числа, откуда следует, что уравнение $g(z) = m$ имеет конечное число целочисленных решений для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$. Значит, число всех решений уравнений $g(z) = m$, где $g(z)$ пробегает множество $\mathcal{Z}_n^+$, также конечно.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы.

Пусть $f = f(z)$ — неразложимая квадратичная форма, принадлежащая $\mathcal{Z}_n^+$. Будем считать, что $n > 1$ (случай $n = 1$ очевиден).

Положим $m_0 = f(z_0)$, где $z_0 = (1, 1, \dots, 1)$, и рассмотрим множество $\mathcal{B}_0(f)$ всех s-стабильных целочисленных матриц B с определителем 1 таких, что после замены $y = zB$ новая квадратичная форма $f_B = f_B(y)$ является неразложимой и принадлежит $\mathcal{Z}_n^+$ (последнее условие эквивалентно тому, что коэффициенты при y_{11}^2, $y_{22}^2, \dots, y_{nn}^2$ равны единице). Зафиксируем в $\mathcal{B}_0(f)$ матрицу B_0 и вектор $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{N}^n$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $f_{B_0}(x_0) = m_0$;
2) если $f_B(x) = m_0$ для некоторых $B \in \mathcal{B}_0(f)$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq x_{01} + x_{02} + \ldots + x_{0n}.$$

Заметим, что такая пара (B_0, x) существует, так как $f(1, 1, \dots, 1) = m_0$ и (см. выше) число всех решений уравнений $g(z) = m_0$ конечно.

Квадратичную форму $f_{B_0} = f_{B_0}(y)$ (которая получена из формы $f = f(z)$ в результате линейного преобразования $y = zB_0$) обозначим $\overline{f} = \overline{f}(y)$. Покажем, что все ее коэффициенты $\overline{f}_{ij}$, $i < j$, неположительны. Это и будет означать (см. п. 3), что $\overline{f}(y)$ — квадратичная форма Титса некоторой диаграммы Дынкина.

Предположим, что это не так, т. е. $\overline{f}_{ij} > 0$ (а значит, $\overline{f}_{ij} = 1$) для некоторых i, j $(i < j)$. Положим $p = i$, $q = j$, если $j \neq s$, и $p = j$, $q = i$ — в противном случае. Обозначим через $E^{\pm}_{pq}$ матрицу размера $n \times n$ с единичными диагональными элементами и единственным ненулевым элементом вне диагонали, стоящим на месте (p, q) и равным ± 1. Очевидно, $E^{-}_{pq} = (E^{+}_{pq})^{-1}$.

Матрица $B = E^{-}_{pq}B_0$ является, очевидно, s-стабильной с определителем 1, а поскольку в (симметричной) матрице $M(\overline{f}) = B_0M(f)B_0^T$ на местах (p, q) и (q, p) стоит число $\dfrac{1}{2}$, то диагональные элементы матрицы $\widetilde{B} = E^{-}_{pq}M(\overline{f})(E^{-}_{pq})^T = BM(f)B^T$ являются единичными $\Big($а элементы на местах (p, q) и (q, p) равны уже $-\dfrac{1}{2}\Big)$. Наконец, квадратичная форма, задаваемая симметричной матрицей $\widetilde{B}$, неразложима. Действительно, в противном случае (согласно определению разложимой квадратичной формы) существовало бы собственное подмножество $S \subset N = \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что в матрице $\widetilde{B}$ на местах (r, s) при $r \in S$, $s \in N \setminus S$ и при $s \in N \setminus S$, $r \in S$ стоят нулевые элементы, причем $p \in S$, $q \in N \setminus S$ или $p \in N \setminus S$, $q \in S$. Последнее условие следует из равенства $E^{+}_{pq}\widetilde{B}(E^{+}_{pq})^T = B_0M(f)B_0^T = M(\overline{f})$ и неразложимости квадратичной формы $\overline{f} = \overline{f}(y)$ (в силу $B_0 \in \mathcal{B}_0(f)$). Но тогда, как легко видеть, в матрице $E^{+}_{pq}\widetilde{B}(E^{+}_{pq})^T$ на месте (p, p) стоит число 2, а значит, квадратичная форма $\overline{f}(y)$ не принадлежит $\mathcal{Z}^{+}_{n}$, что противоречит условию $B_0 \in \mathcal{B}_0(f)$.

Таким образом, целочисленная матрица $B = E^{-}_{pq}B_0$ является s-стабильной с определителем 1, а квадратичная форма, задаваемая матрицей $BM(f)B^T$, неразложима и с единичными коэффициентами при квадратах; следовательно, $B \in \mathcal{B}_0(f)$.

Далее, имеем

$$m_0 = x_0B_0M(f)B_0^Tx_0^T =$$

$$= x_0E^{+}_{pq}E^{-}_{pq}B_0M(f)B_0^T(E^{-}_{pq})^T(E^{+}_{pq})^Tx_0^T = (x_0E^{+}_{pq})(BM(f)B^T)(x_0E^{+}_{pq})^T.$$

А поскольку равенство $(x_0E^{+}_{pq})(BM(f)B^T)(x_0E^{+}_{pq})^T = m_0$ означает, что $f_B(x_0E^{+}_{pq}) = m_0$, и при этом сумма координат вектора $\overline{x}_0 = x_0E^{+}_{pq} \in \mathbb{N}_n$ больше суммы координат вектора x_0 (на единицу), то это противоречит выбору матрицы B_0. Следовательно, все коэффициенты $\overline{f}_{ij}$, $i < j$, квадратичной формы $\overline{f}(y)$ неположительны, что и требовалось доказать.

Теорема 3 доказана.

***4.3. Доказательство теорем* А *и* В.** В силу предложения 4 и теоремы 3 теорему В достаточно доказать для множества квадратичных форм Титса всех диаграмм Дынкина. Легко видеть, что в этом случае теорема В следует непосредственно из теоремы 2, если учесть простое равенство

$$1 - \frac{n+1}{2i(n+1-i)} = 1 - \frac{1}{2i} - \frac{1}{2(n+1-i)}. \tag{3}$$

Если через $L(\Gamma)$ обозначить множество всех P-граничных чисел графа Γ, то, таким образом, имеет место равенство

$$\bigcup_{s\in\mathbb{N}\cup 0}\mathcal{L}_s^+ = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L(A_n)\right)\bigcup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L(D_n)\right)\bigcup\left(\bigcup_{n\in\{6,7,8\}} L(E_n)\right), \tag{4}$$

которое понадобится при доказательстве теоремы А, к которому мы и переходим.

Из предложения 2 следует, что

$$\mathcal{L}^+ = \bigcup_{s\in\mathbb{N}\cup 0}\mathcal{L}_s^+,$$

и поэтому, чтобы доказать теорему, нужно убедиться в справедливости равенств

$$\bigcup_{s\in\mathbb{N}\cup 0}\mathcal{L}_s^+ = \left\{1-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\left\{1-\frac{2}{c+1}\,\middle|\, c\in\mathbb{N}\right\}, \tag{5}$$

где $\mathcal{L}_s^+$ указаны в теореме В, и

$$\left\{1-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\left\{1-\frac{2}{c+1}\,\middle|\, c\in\mathbb{N}\right\} =$$

$$= \left\{1-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\left\{1-\frac{2}{4r+1}\,\middle|\, r\in\mathbb{N}\right\}. \tag{6}$$

Докажем сначала равенство (5). Первое и второе множества, стоящие в правой части (5), обозначим соответственно через S_1 и S_2.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. $1-\dfrac{1}{t}\in S_1$ *для любого натурального числа* t.

Действительно, для $t=2i$ и для $t=2i-1$ имеем равенства

$$1-\frac{1}{2i} = 1-\frac{1}{2(2i)}-\frac{1}{2(2i)}, \qquad 1-\frac{1}{2i-1} = 1-\frac{1}{2i}-\frac{1}{2(2i^2-i)}.$$

Возвращаясь к равенству (5), покажем сначала, что $L(\Gamma)\subseteq S_1\cup S_2$ для любой диаграммы Дынкина $L(\Gamma)$; более того, $L(\Gamma)\subseteq S_1$ при $\Gamma\neq D_n$. Для $\Gamma=A_n$ это следует из равенства (3) при $i=1,\ldots,n$, для $\Gamma=D_n$ — из леммы 1 при $t=2,\ldots,2(n-2)$, а для $\Gamma=E_6,E_7$, E_7 — из леммы 1 при $t=3,4,7,8,12,15,16,24,28,40,60$ и равенств

$$\frac{5}{8} = 1-\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 4}, \qquad \frac{17}{20} = 1-\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 20}.$$

В силу (4) это доказывает включение $\subseteq$ в (5).

Покажем теперь, что выполняется включение $\supseteq$.

Для любых a, $b\in\mathbb{N}$, $a<b$, положим

$$\gamma_{ab} = 1-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}.$$

Поскольку

$$\gamma_{ab} = 1-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2(n+1-a)},$$

где $n=a+b-1$, то

$$\left\{1-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}\,\middle|\, a+b>9, a,b\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\bigcup_{n>8}\mathcal{C}_n^+.$$

Кроме того, легко видеть, что $\gamma_{1b}\in\mathcal{C}_b^+$ при $1\le b\le 8$, $\gamma_{2b}\in\mathcal{C}_{b+1}^+$ при $2\le b\le 7$, $\gamma_{3b}\in\mathcal{C}_{b+2}^+$ при $3\le b\le 6$ и $\gamma_{45}\in\mathcal{C}_8^+$. Следовательно, S_1 — подмножество в $\cup_{s\in\mathbb{N}\cup 0}\mathcal{C}_n^+$.

Далее, при $c>7$ соответствующий элемент

$$\lambda_c=1-\frac{2}{c+1}$$

множества S_2 принадлежит, очевидно, множеству $\mathcal{C}_{c+1}^+$ и, кроме того, легко видеть, что $\lambda_1\in\mathcal{C}_1^+$, $\lambda_2,\lambda_3\in\mathcal{C}_3^+$, λ_4, λ_5, $\lambda_7\in\mathcal{C}_5^+$ и $\lambda_6\in\mathcal{C}_7^+$. Следовательно, S_2 — подмножество в $\cup_{s\in\mathbb{N}\cup 0}\mathcal{C}_n^+$.

Включение $\supseteq$, а значит и равенство (5), доказано.

Равенство (6) следует из равенств

$$1-\frac{2}{2r}=1-\frac{1}{2r}-\frac{1}{2r},\qquad 1-\frac{2}{4r-1}=1-\frac{1}{2r}-\frac{1}{2(4r^2-r)}.$$

Таким образом, теорема A доказана.

5. Замечания к теореме A. Обозначим через S_3 второе из подмножеств, входящее в правую часть равенства, указанного в условии теоремы A:

$$S_3=\left\{1-\frac{2}{4r+1}\,\middle|\, r\in\mathbb{N}\right\}.$$

Напомним, что первое из этих подмножеств обозначено выше через S_1:

$$S_1=\left\{1-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{N}\right\}.$$

***Замечание* 1.** Подмножества S_1 и S_3 (множества рациональных чисел) множества $\mathbb{R}$ не совпадают, так как, например,

$$1-\frac{2}{4\cdot 3+1}\ne 1-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}$$

для любых $a,b\in\mathbb{N}$. Однако они пересекаются: например,

$$1-\frac{2}{4\cdot 2+1}=1-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 9}.$$

***Замечание* 2.** В условии теоремы A множество S_3 можно заменить множеством

$$\widetilde{S}_3=\left\{1-\frac{2}{4r+1}\,\middle|\, r\in\widetilde{\mathbb{N}}\right\},$$

где $\widetilde{\mathbb{N}}$ — множество всех натуральных чисел m таких, что любой простой (а значит, и вообще любой) делитель числа $4m+1$ имеет вид $4j+1$, т. е.

$$4m+1=\prod_{i=1}^{k}(4q_k+1)$$

с простыми сомножителями. Действительно, если $r\in\mathbb{N}\setminus\widetilde{\mathbb{N}}$, то $4r+1=(4q-1)(4s-1)$ (для некоторых q,s) и имеем следующее равенство:

$$1-\frac{2}{4r+1}=1-\frac{1}{2s(4q-1)}-\frac{1}{2s(4r+1)}.$$

Множества S_1 и $\widetilde{S}_3$ уже не пересекаются: если бы выполнялось равенство

$$1 - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} = 1 - \frac{2}{4r+1}$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{N}$, $r \in \widetilde{\mathbb{N}}$, то, записав его в виде

$$(4a - 4r - 1)(4b - 4r - 1) = (4r + 1)^2,$$

имели бы, что $4a - 4r - 1$ равно $4s + 1$ для некоторого $s \in \mathbb{N} \cup 0$ $\big($как делитель $(4r + 1)^2\big)$, а значит, $4(a - r - s) = 2$, что невозможно.

1. *Bondarenko V. M., Pereguda Yu. M.* On P-numbers of quadratic forms // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 2. – С. 474 – 477.
2. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscr. math. – 1972. – **6**. – P. 71 – 103, 309.
3. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.

Получено 24.04.12