УДК 517.956.4

М. І. Конаровська (Чернів. нац. ун-т)

ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДЛЯ СИСТЕМ З ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ – КОЛМОГОРОВА

We construct the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem and a problem with impulse action for systems with Bessel – Kolmogorov operators degenerate in all space variables. Estimates for the fundamental matrix are obtained, and its properties are established.

Построена фундаментальная матрица решений задачи Коши и задачи с импульсным воздействием для систем с операторами Бесселя – Колмогорова, имеющими вырождение по всем пространственным переменным. Получены оценки фундаментальной матрицы и установлены ее свойства.

В останні роки глибоко розвивається теорія вироджених параболічних рівнянь. А. М. Колмогоров уперше при вивченні випадкових рухів фізичної системи отримав рівняння дифузії з інерцією, яке є виродженим параболічним рівнянням і належить класу ультрапараболічних рівнянь. Різним узагальненням таких рівнянь на даний час присвячено багато робіт. Зокрема, у монографії [1] детально вивчено рівняння з виродженнями за двома групами просторових змінних. Для таких рівнянь побудовано фундаментальні розв'язки, встановлено коректну розв'язність задачі Коші та описано властивості розв'язків. У дослідженнях італійських математиків (див., наприклад, [2, 3]) розглядаються ультрапараболічні рівняння з довільною кількістю груп виродження. Детально описано властивості фундаментальних розв'язків цих рівнянь, доведено теореми існування та єдиності. У працях Г. П. Малицької [4, 5] ці результати перенесено на випадок системи рівнянь зі сталими та залежними від t коефіцієнтами, побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші та встановлено її оцінки. У статтях [6, 7] ці результати узагальнено на випадок рівнянь другого порядку, які містять оператор Бесселя. У цих рівняннях по одній із змінних застосовується оператор Бесселя (називатимемо її бесселевою змінною), а по інших – оператор диференціювання. Зауважимо, що необмежені коефіцієнти містяться біля перших похідних по всіх змінних, крім бесселевої. По цій же змінній виродження є лише в тому розумінні, що коефіцієнт, який входить в оператор Бесселя, необмежений в околі нуля.

У даній статті розглядається система рівнянь довільного порядку з оператором Бесселя – Колмогорова. Слід зазначити, що у систему рівнянь входять доданки, які містять оператор Бесселя по одній із змінних (в даному випадку по x_n), а також доданок із необмеженим коефіцієнтом при першій похідній по x_n. У першому пункті побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші та встановлено її властивості. У другому пункті для таких систем побудовано розв'язок, який у фіксовані моменти часу τ_i, $i = \overline{0, p}$, зазнає імпульсного впливу. При цьому використано відомі результати з теорії звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією [8 – 10].

1. Постановка задач. Побудова розв'язку задачі Коші для системи рівнянь з операторами Бесселя – Колмогорова. У шарі $\Pi^+ \equiv (0;T) \times E_n^+$, $E_n^+ = E_{n-1} \times (0, +\infty)$, розглянемо задачу про знаходження розв'язку

$$u(t,x) = \mathrm{col}(u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$$

системи B-параболічних рівнянь

$$\frac{\partial u_s(t,x)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{|k|+2j\le 2b} a_{kj}^{(sm)} D_{x'}^{k} B_{x_n}^{j} u_m(t,x) + \sum_{l=1}^{n} x_l \frac{\partial u_s(t,x)}{\partial x_l}, \tag{1}$$

$$t>0, \quad x\in E_n^+, \quad s=\overline{1,N},$$

з умовами

$$u_s(t,x)|_{t=0} = \varphi_s(x), \qquad x\in E_n^+, \quad s=\overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u_s(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \qquad t>0, \quad s=\overline{1,N}, \tag{3}$$

та імпульсними умовами

$$\Delta_t u_s(t,x)|_{t=\tau_i} = b_i^{(s)} u_s(\tau_i,x), \qquad 0<\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_p=T, \quad s=\overline{1,N}. \tag{4}$$

У системі рівнянь (1) коефіцієнти $a_{kj}^{(sm)}$ — сталі, $D_{x'}^{k} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_{n-1}^{k_{n-1}}}$ — оператор диференціювання, $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{2\nu+1}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $\nu \ge -\dfrac{1}{2}$, — оператор Бесселя, $x=(x',x_n)$, $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$, $|k| = \sum_{l=1}^{n-1} k_l$. У початковій умові (2) φ_s, $s=\overline{1,N}$, — досить гладкі фінітні функції в E_n^+, парні по x_n. В імпульсних умовах (4)

$$\Delta_t u_s|_{t=\tau_i} = u_s(\tau_i+0,x) - u_s(\tau_i,x), \qquad u_s(\tau_i,x) = \lim_{t\to\tau_i-0} u_s(t,x),$$

елементи $b_i^{(s)}$ є сталими. У цьому пункті ми побудуємо розв'язок задачі Коші (1) – (3).

Вважатимемо, що система (1) B-параболічна, тобто характеристичне рівняння

$$\det\left\{ \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(i\sigma')(-\sigma_n^2)^j - \lambda E \right\} = 0$$

має всі корені $\lambda=\lambda(\sigma)$, в яких $\operatorname{Re}\lambda \le -\delta|\sigma|^{2b}$, $\delta>0$, $\sigma\in E_n^+$, $A_{kj} = \left(a_{kj}^{(sm)}\right)_{s,m=1}^{N}$, E — одинична матриця.

Перш ніж перейти до побудови розв'язку (1) – (3), для зручності систему рівнянь (1) запишемо в матричній формі

$$Lu(t,x) \equiv \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj} D_{x'}^{k} B_{x_n}^{j} u(t,x) - \sum_{l=1}^{n} x_l \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_l} = 0 \tag{5}$$

та виконаємо заміну $u(t,x) = e^{-n_\nu t} w(t,x)$, де $n_\nu = n+2\nu+1$. Для нової невідомої функції $w(t,x)$ одержимо систему рівнянь вигляду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj} D_{x'}^{k} B_{x_n}^{j} w + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_l}(x_l w) + \frac{1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(x_n^2 w\right) + 2\nu w \tag{6}$$

з умовами

$$w(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \tag{7}$$

$$\varphi(x) = \mathrm{col}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)).$$

Зауважимо, що зведення системи рівнянь (1) до (6) потрібне з наступних міркувань. Розв'язок задачі Коші (6), (7) будемо знаходити у вигляді оберненого перетворення Фур'є – Бесселя невідомої функції $v(t,\sigma)$:

$$w(t,x) = F^{-1}v(t,\sigma) = c'_\nu \int\limits_{E_n^+} e^{i\sigma' x'} v(t,\sigma) j_\nu(\sigma_n x_n)\sigma_n^{2\nu+1} d\sigma, \tag{8}$$

де $c'_\nu = (2\pi)^{-n} 2^{-2\nu}\Gamma^{-2}(\nu+1)$, $\sigma' x' = \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_l x_l$, $j_\nu(\sigma_n x_n)$ — нормована функція Бесселя. Якщо підставити (8) у (6), (7) та припустити, що диференціювання можна виконувати під знаком інтеграла, то в результаті останній доданок у (6) скоротиться, а сама система зведеться до системи лінійних рівнянь першого порядку з частинними похідними. Доведемо це. Для цього покажемо, що

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(x_l \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma_l x_l} v(t,\sigma) d\sigma_l\right) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma_l x_l}\sigma_l \frac{\partial}{\partial \sigma_l} v(t,\sigma) d\sigma_l, l = \overline{1, n-1}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\int\limits_0^{+\infty} x_n^2 j_\nu(\sigma_n x_n) v(t,\sigma)\sigma_n^{2\nu+1} d\sigma_n\right) =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} j_\nu(\sigma_n x_n)\sigma_n \frac{\partial v}{\partial \sigma_n}\sigma_n^{2\nu+1} d\sigma_n - 2\nu\int\limits_0^{+\infty} j_\nu(\sigma_n x_n) v(t,\sigma)\sigma_n^{2\nu+1} d\sigma_n. \tag{10}$$

Рівність (9) легко отримати, якщо припустити, що $\sigma_l v(t,\sigma) \to 0$ при $\sigma_l \to \infty$, $l = \overline{1, n-1}$, та використати формулу диференціювання добутку двох функцій. Для отримання рівності (10) спочатку здиференціюємо вираз у лівій частині, використавши властивість нормованої функції $\dfrac{d}{d\lambda} j_\nu(\lambda x) = -c_\nu j_{\nu+1}(\lambda x)\lambda x^2$, $c_\nu = \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{2\Gamma(\nu+2)}$ [11]. Позначимо ліву частину у (10) через I. Матимемо

$$I = 2\int\limits_0^{+\infty} j_\nu(\sigma_n x_n) v(t,\sigma)\sigma_n^{2\nu+1} d\sigma_n - c_\nu x_n^2 \int\limits_0^{+\infty} j_{\nu+1}(\sigma_n x_n) v(t,\sigma)\sigma_n^{2\nu+3} d\sigma_n.$$

Далі у другому доданку внесемо $j_{\nu+1}(\sigma_n x_n)$ під диференціал, врахуємо згадану вище властивість функції $j_\nu(\lambda x)$ та зінтегруємо частинами. В результаті отримаємо

$$I = 2\int\limits_0^{+\infty} j_\nu(\sigma_n x_n) v(t,\sigma)\sigma_n^{2\nu+1} d\sigma_n + \sigma_n^{2\nu+2} v(t,\sigma) j_\nu(\sigma_n x_n)\big|_0^\infty -$$

$$-\int\limits_0^{+\infty} j_\nu(\sigma_n x_n)\frac{\partial}{\partial \sigma_n}(v\sigma_n^{2\nu+2}) d\sigma_n.$$

Оскільки нормована функція Бесселя обмежена при $\sigma_n \to \infty$ і дорівнює одиниці при $\sigma_n = 0$, то позаінтегральний доданок дорівнює нулеві, якщо $\sigma_n^{2\nu+2} v(t,\sigma) \to 0$ при $\sigma_n \to \infty$. Обчислюючи в останньому інтегралі $\dfrac{\partial}{\partial \sigma_n}(v\sigma_n^{2\nu+2})$, дістаємо рівність (10).

Враховуючи рівності (9) та (10), для функції $v(t,\sigma)$ одержуємо систему лінійних рівнянь першого порядку з частинними похідними

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} \sigma_l \frac{\partial v_s}{\partial \sigma_l} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{|k|+2j\le 2b} a_{kj}^{(sm)} (i\sigma')^k (-\sigma_n^2)^j v_m, \quad s = \overline{1,N}. \tag{11}$$

Припустимо, що для функції $\varphi(x)$ існує перетворення Фур'є – Бесселя, тоді

$$v_s(t,\sigma)|_{t=0} = \psi_s(\sigma), \quad s = \overline{1,N}. \tag{12}$$

Друга умова з (7) виконується на основі властивості $\left.\dfrac{\partial j_\nu(\sigma_n x_n)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0.$

Система (11) еквівалентна однорідному лінійному диференціальному рівнянню з частинними похідними першого порядку функції g від $n+N+1$ незалежних змінних $(t,\sigma_1,\ldots,\sigma_n,v_1,\ldots$ $\ldots,v_N)$ [12, с. 146 – 148]

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} \sigma_l \frac{\partial g}{\partial \sigma_l} + \sum_{s=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{|k|+2j\le 2b} a_{kj}^{(sm)} (i\sigma')^k (-\sigma_n^2)^j v_m \frac{\partial g}{\partial v_s} = 0, \tag{13}$$

а рівняння (13), як відомо, еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \ldots = \frac{d\sigma_n}{\sigma_n} = \frac{dv_1}{\sum_{m=1}^{N} \sum_{|k|+2j\le 2b} a_{kj}^{(1m)} (i\sigma')^k (-\sigma_n^2)^j v_m} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{dv_N}{\sum_{m=1}^{N} \sum_{|k|+2j\le 2b} a_{kj}^{(Nm)} (i\sigma')^k (-\sigma_n^2)^j v_m}. \tag{14}$$

З перших n рівнянь знаходимо $\sigma_l = C_l e^t$, $l = \overline{1,n}$. Підставляючи знайдені σ_l в інші N рівнянь, дістаємо

$$dv_s(t,Ce^t) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{|k|+2j\le 2b} a_{kj}^{(sm)} (iC')^k (-C_n^2)^j e^{(|k|+2j)t} v_m dt, \quad s = \overline{1,N}, \tag{15}$$

$C = (C', C_n)$, $C' = (C_1,\ldots,C_{n-1})$. Нехай $\hat\sigma$ — значення σ при $t = 0$, тоді $\hat\sigma = C$. Обчислюючи $v_s(t,\sigma)$, $s = \overline{1,N}$, при $t = 0$ отримуємо

$$v_s(t,\sigma)|_{t=0} = v_s(0,\hat\sigma) = v_s(0,C) = \psi_s(C). \tag{16}$$

Задача Коші (15), (16) при виконанні умов теореми Пікара має єдиний розв'язок для $0 \le$ $\le t \le T < +\infty$. Якщо виконується умова Лаппо – Данилевського, то розв'язок $v(t,Ce^t)$ набирає вигляду

$$v(t,Ce^t) = \exp\left\{ \int_0^t \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj} (iC')^k (-C_n^2)^j e^{(|k|+2j)\beta} d\beta \right\} \psi(C), \tag{17}$$

де $\psi = \mathrm{col}(\psi_1,\ldots,\psi_N)$. Враховуючи, що $C = \sigma e^{-t}$, маємо

$$v(t,\sigma)=Q(t,\sigma)\psi(\sigma e^{-t}), \tag{18}$$

де

$$Q(t,\sigma)=\exp\left\{\int\limits_0^t \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j e^{-(|k|+2j)(t-\beta)}d\beta\right\}.$$

Покажемо, що функція $v(t,\sigma)$, визначена формулою (18), є розв'язком системи рівнянь (11). Для зручності систему (11) запишемо у матричній формі. Дійсно, за побудовою $Q(t,\sigma)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків (15), тобто $Q(t,\sigma)$ є розв'язком рівняння (15). З іншого боку,

$$\frac{dQ(t,\sigma)}{dt}=\left.\frac{dQ(t,Ce^t)}{dt}\right|_{Ce^t=\sigma}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{l=1}^n\sigma_l\frac{\partial}{\partial\sigma_l}\right)Q(t,\sigma).$$

Тоді, підставляючи $v(t,\sigma)$ в (11), одержуємо

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{l=1}^n\sigma_l\frac{\partial}{\partial\sigma_l}\right)v(t,\sigma)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{l=1}^n\sigma_l\frac{\partial}{\partial\sigma_l}\right)(Q(t,\sigma)\psi(\sigma e^{-t}))=$$

$$=\sum_{|k|+2j\le 2b}A_{kj}(iC')^k(-C_n^2)^j e^{(|k|+2j)t}Q(t,\sigma)\psi(\sigma e^{-t})+$$

$$+Q(t,\sigma)\left(-e^{-t}\operatorname{grad}\psi\cdot\sigma+e^{-t}\operatorname{grad}\psi\cdot\sigma\right)=$$

$$=\sum_{|k|+2j\le 2b}A_{kj}(iC')^k(-C_n^2)^j e^{(|k|+2j)t}v(t,\sigma),$$

що й потрібно було показати. Легко довести, що функція $v(t,\sigma)$ з (18) задовольняє початкову умову (12). Отже, функція $v(t,\sigma)$ є розв'язком задачі (11), (12), і навпаки, задача (11), (12) зводиться до задачі (15), (16) та правильною є формула (18).

Далі, аналогічно [13] можна встановити наступну оцінку матриці $Q(t,\sigma)$:

$$|Q(t,\alpha e^t)|\le C\exp\left\{-c_0|\alpha|^{2b}\,\frac{e^{2bt}-1}{2b}\right\}, \tag{19}$$

де сталі C, c_0 залежать лише від T, n та b.

***Побудова та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші* (*ФРЗК*) (1) – (3).** Оцінка (19) матриці $Q(t,\alpha e^t)$ гарантує можливість диференціювання інтеграла (8) під його знаком і дозволяє виконати заміну порядку інтегрування. Оскільки перетворення Фур'є – Бесселя добутку двох функцій є згорткою їхніх перетворень, то, підставляючи $v(t,\sigma)$ з (18) у (8), маємо

$$w(t,x)=\int\limits_{E_n^+}T_{x_n}^{\xi_n}\tilde G(t,x'-\xi',x_n)\Phi(t,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi,$$

де $T_{x_n}^{\xi_n}$ — оператор узагальненого зсуву, що відповідає оператору Бесселя B_{x_n},

$$\tilde G(t,x)=c_\nu'\int\limits_{E_n^+}e^{i\sigma'x'}Q(t,\sigma)j_\nu(\sigma_nx_n)\sigma_n^{2\nu+1}d\sigma,$$

$$\Phi(t,x) = c'_\nu \int\limits_{E_n^+} e^{i\sigma' x'} \psi(\sigma e^{-t}) j_\nu(\sigma_n x_n) \sigma_n^{2\nu+1} d\sigma.$$

Спростимо вираз для $\Phi(t,x)$, врахувавши, що підінтегральна функція має пряме та обернене перетворення Фур'є – Бесселя. Для цього виконаємо заміну змінних $\sigma e^{-t} = \zeta$. В результаті дістанемо

$$\Phi(t,x) = c'_\nu \int\limits_{E_n^+} e^{i(e^t\zeta')x'} \psi(\zeta) j_\nu((e^t\zeta_n)x_n)(e^t\zeta_n)^{2\nu+1} d\zeta \cdot e^{nt} = e^{n_\nu t}\varphi(e^t x).$$

Врахувавши знайдену функцію $\Phi(t,x)$, для $w(t,x)$ матимемо зображення

$$w(t,x) = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{\zeta_n} \tilde{G}(t, x' - \zeta', x_n) \varphi(e^t\zeta) \zeta_n^{2\nu+1} d\zeta \cdot e^{n_\nu t}$$

або, виконавши заміну змінних $e^t\zeta = \xi$,

$$w(t,x) = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{e^{-t}\xi_n} \tilde{G}(t, x' - e^{-t}\xi', x_n) \varphi(\xi) \xi_n^{2\nu+1} d\xi.$$

Повертаючись від функції $w(t,x)$ до $u(t,x)$, маємо

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n^+} G(t, x' - e^{-t}\xi'; x_n, e^{-t}\xi_n) \varphi(\xi) \xi_n^{2\nu+1} d\xi, \tag{20}$$

де $G(t, x' - e^{-t}\xi'; x_n, e^{-t}\xi_n) \equiv e^{-n_\nu t} T_{x_n}^{e^{-t}\xi_n} \tilde{G}(t, x' - e^{-t}\xi', x_n)$. З цієї рівності очевидним є зв'язок між ФРЗК $G(t,x,\xi)$ для системи рівнянь (1) та ФРЗК $\tilde{G}(t,x,\xi)$ для системи рівнянь (6).

Наведемо основні властивості ФРЗК для системи рівнянь (1).

Властивість 1. Для довільного $T > 0$ і будь-яких k, l, j справджується оцінка для похідних ФРЗК $G(t-\tau, x'; x_n, \xi_n)$

$$|D_{x'}^k D_{x_n}^l B_{x_n}^j G(t-\tau, x'; x_n, \xi_n)| \le$$

$$\le C_{kjl}(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu + |k| + 2j + l}{2b}} \; e^{-n_\nu(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c\left|\frac{x}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q} \right\}, \tag{21}$$

де $\alpha(t-\tau) = \dfrac{1 - e^{-2b(t-\tau)}}{2b}$, C_{kjl}, c — додатні сталі, залежні від b, n_ν, T та сталої параболічності, $q = \dfrac{2b}{2b-1}$.

Оцінку (21) одержуємо, скориставшись оцінкою (19) матриці Q та лемою про перетворення Фур'є – Бесселя цілих функцій.

Властивість 2 (властивість нормальності)**.** Функція $G(t,\tau,x,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in \in E_n^+$, як функція (t,x) є розв'язком системи рівнянь (1), а як функція (τ,ξ) — розв'язком спряженої системи рівнянь.

Властивість 3. Функція $G^*(\tau, t, \xi' - x'; \xi_n, x_n) = G(t, \tau, x' - \xi'; x_n, \xi_n)$ є ФРЗК для спряженої системи рівнянь.

Властивість 4. Правильними є рівності

$$\int\limits_{E_n^+} G(t, x' - e^{-t}\xi'; x_n, e^{-t}\xi_n)\xi_n^{2\nu+1} d\xi = E, \qquad t > 0, \quad x \in E_n^+,$$

$$\int\limits_{E_n^+} G(t, x' - e^{-t}\xi'; x_n, e^{-t}\xi_n)\xi_n^{2\nu+1} dx = e^{-n_\nu t} E, \qquad t > 0, \quad \xi \in E_n^+.$$

Властивість 5. Для будь-якої неперервної та обмеженої в E_n^+ функції φ функція

$$u(t, x) = \int\limits_{E_n^+} G(t, x' - e^{-t}\xi'; x_n, e^{-t}\xi_n)\varphi(\xi)\xi_n^{2\nu+1} d\xi, \ t > 0, x \in E_n^+,$$

задовольняє умову $\lim_{t \to 0} u(t, x) = \varphi(x)$, $x \in E_n^+$.

Властивість 6 (формула згортки). Правильною є формула згортки

$$T_{x_n}^{\xi_n} G(t, \tau, x' - \xi', x_n) = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{y_n} G(t, \beta, x' - y', x_n) T_{y_n}^{\xi_n} G(\beta, \tau, y' - \xi', y_n) y_n^{2\nu+1} dy. \tag{22}$$

Теорема 1. *Нехай в шарі* Π^+ *задано задачу Коші для B-параболічної системи* (1) *зі сталими коефіцієнтами, яка містить оператор Бесселя по* x_n *та виродження по всіх просторових змінних. Нехай початкова функція* $\varphi(x)$ *неперервна та обмежена в* E_n^+*, парна по* x_n*. Тоді існує ФРЗК* $G(t, x)$ *для системи* (1)*, який є оберненим перетворенням Фур'є – Бесселя нормальної фундаментальної матриці* $Q(t, \sigma)$ *системи рівнянь* (14)*, для якого справджуються властивості* 1 – 6*. Розв'язок задачі Коші* (1) – (3) *визначається як згортка ФРЗК з початковою функцією* $\varphi(x)$ *і зображується у вигляді* (20)*.*

2. Побудова розв'язку задачі Коші з імпульсною дією для системи рівнянь з операторами Бесселя – Колмогорова. У даному пункті побудуємо розв'язок задачі Коші (1) – (3), який задовольняє імпульсні умови (4). Як і раніше, зведемо систему рівнянь (1) заміною $u(t, x) = e^{-n_\nu t} w(t, x)$ до системи рівнянь (6), яка містить нову невідому функцію $w(t, x)$. Функція $w(t, x)$ повинна задовольняти (7) та імпульсні умови

$$\Delta_t w(t, x)|_{t=\tau_i} = e^{n_\nu \tau_i} B_i w(\tau_i, x), \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p = T. \tag{23}$$

Розв'язок задачі (6), (7), (23) шукаємо у вигляді оберненого перетворення Фур'є – Бесселя невідомої функції $v(t, \sigma)$ (8). У першому пункті показано, що система рівнянь (6) зводиться до системи лінійних рівнянь першого порядку з частинними похідними (11). Якщо для початкової функції $\varphi(x)$ існує перетворення Фур'є – Бесселя, то $v(t, \sigma)$ задовольняє початкову умову (12). Оскільки $w(t, x)$ задовольняє імпульсну умову (23), то $v(t, \sigma)$ повинна задовольняти відповідну імпульсну умову в образах Фур'є – Бесселя

$$\Delta_t v(t, \sigma)|_{t=\tau_i} = e^{n_\nu \tau_i} B_i v(\tau_i, \sigma), \quad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p = T. \tag{24}$$

Далі розіб'ємо проміжок $[0, T]$ точками $\tau_1, \ldots, \tau_p$. Побудуємо спочатку розв'язок $v(t, \sigma)$ на проміжку $[0, \tau_1)$. Як і в першому пункті, систему рівнянь (11) можна звести до однорідного лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку функції g від $n + N + 1$ незалежних змінних $(t, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, v_1, \ldots, v_N)$, яке еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь (14). З перших n рівнянь системи (14) знаходимо $\sigma_l = C_l e^t$, $l = \overline{1,n}$. Підставляючи знайдені σ_l в інші N рівнянь, отримуємо рівняння (15) та початкову умову (16). На проміжку $[0, \tau_1)$ за теоремою Пікара розв'язок задачі (15), (16) існує і єдиний. Позначимо його через $v^{(1)}(t,\sigma)$. Згідно з (18) $v^{(1)}(t,\sigma)$ зображується у вигляді

$$v^{(1)}(t,\sigma) = Q(t,0,\sigma)\psi(\sigma e^{-t}), \quad t \in [0,\tau_1).$$

Далі розглянемо проміжок $[\tau_1, \tau_2)$ і побудуємо на ньому розв'язок $v^{(2)}(t,\sigma)$. За теоремою Пікара на $[\tau_1, \tau_2)$ існує єдиний розв'язок, який з урахуванням імпульсної дії набирає вигляду

$$v^{(2)}(t,\sigma) = Q(t,\tau_1,\sigma)(E + e^{n_\nu \tau_1} B_1) v^{(1)}(\tau_1,\sigma) =$$

$$= Q(t,\tau_1,\sigma)(E + e^{n_\nu \tau_1} B_1) Q(\tau_1, 0, \sigma)\psi(\sigma e^{-t}), \quad t \in [\tau_1, \tau_2).$$

Аналогічно на проміжку $[\tau_2, \tau_3)$ існує єдиний розв'язок

$$v^{(3)}(t,\sigma) = Q(t,\tau_2,\sigma)(E + e^{n_\nu \tau_2} B_2) v^{(2)}(\tau_2,\sigma) =$$

$$= Q(t,\tau_2,\sigma)(E + e^{n_\nu \tau_2} B_2) Q(\tau_2,\tau_1,\sigma)(E + e^{n_\nu \tau_1} B_1) Q(\tau_1, 0, \sigma)\psi(\sigma e^{-t}), \quad t \in [\tau_2, \tau_3).$$

На останньому проміжку $[\tau_{p-1}, T]$ аналогічним чином визначається розв'язок

$$v(t,\sigma) = v^{(p)}(t,\sigma) = V(t,0,\sigma)\psi(\sigma e^{-t}),$$

де $V(t,0,\sigma)$ — матрицант задачі (15), (16), (24) і

$$V(t,0,\sigma) = Q(t,\tau_{p-1},\sigma) \prod_{i=p-1}^{1} ((E + e^{n_\nu \tau_i} B_i) Q(\tau_i, \tau_{i-1}, \sigma)), \qquad \tau_0 = 0, \quad \tau_{p-1} \le t < \tau_p. \tag{25}$$

Якщо матриці $E + e^{n_\nu \tau_i} B_i$ невироджені, то матрицант $V(t,0,\sigma)$ також є невиродженою матрицею. На основі оцінок (19) матриці $Q(t,\tau,\sigma)$ та зображення (25) матрицанта одержуємо відповідні оцінки $V(t,0,\sigma)$:

$$|V(t,0,\sigma)| = |V(t,0,\alpha e^t)| \le C^p B \exp\left\{ -c_0 |\alpha|^{2b} \, \frac{e^{2bt} - 1}{2b} \right\}, \tag{26}$$

де $B = \prod_{i=1}^{p-1} |E + e^{n_\nu \tau_i} B_i|$. Тоді розв'язок задачі (6), (7), (23) визначається формулою

$$w(t,x) = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} \tilde{\Gamma}(t, x' - \xi', x_n) \Phi(t,\xi) \xi_n^{2\nu+1} d\xi, \tag{27}$$

де

$$\tilde{\Gamma}(t,x) = c'_\nu \int\limits_{E_n^+} e^{i\sigma' x'} V(t,0,\sigma) j_\nu(\sigma_n x_n) \sigma_n^{2\nu+1} d\sigma.$$

Спрощуючи функцію $\Phi(t,x)$, як і в першому пункті, та повертаючись від функції $w(t,x)$ до $u(t,x)$, отримуємо формулу для зображення розв'язку $u(t,x)$ задачі (1) – (4):

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n^+} \Gamma(t, x' - e^{-t}\xi'; x_n, e^{-t}\xi_n) \varphi(\xi) \xi_n^{2\nu+1} d\xi, \tag{28}$$

де

$$\Gamma(t, x' - e^{-t}\xi'; x_n, e^{-t}\xi_n) \equiv e^{-n_\nu t} T_{x_n}^{e^{-t}\xi_n} \tilde{\Gamma}(t, x' - e^{-t}\xi', x_n).$$

Для фундаментального розв'язку $\Gamma(t-\tau, x', x_n, \xi_n) \equiv T_{x_n}^{\xi_n}\Gamma(t-\tau, x', x_n)$ задачі (1) – (4) справджується оцінка

$$|D_{x'}^k D_{x_n}^l B_{x_n}^j \Gamma(t-\tau, x', x_n, \xi_n)| \leq$$

$$\leq C_{kjl}(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+|k|+2j+l}{2b}} \ e^{-n_\nu(t-\tau)} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\left|\frac{x}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q}\right\}, \tag{29}$$

де $\alpha(t-\tau) = \dfrac{1-e^{-2b(t-\tau)}}{2b}$, C_{kjl}, c — додатні сталі, залежні від b, n_ν, T та сталої параболічності, $q = \dfrac{2b}{2b-1}$.

Теорема 2. *Нехай в шарі* Π^+ *задано* B*-параболічну систему* (1) *зі сталими коефіцієнтами, яка містить оператор Бесселя по* x_n *та виродження по всіх просторових змінних, задано умови* (2), (3) *та імпульсну дію* (4). *Нехай початкова функція* $\varphi(x)$ *неперервна та обмежена в* E_n^+, *парна по* x_n, *матриці* B_i *сталі, такі, що* $(E + e^{n_\nu \tau_i} B_i)$ *є невиродженими. Тоді існує фундаментальний розв'язок, який задовольняє нерівність* (29) *і за допомогою якого визначається розв'язок* $u(t,x)$ *задачі* (1) – (4) *формулою* (28).

Автор висловлює подяку науковому керівнику професору Матійчуку М. І. за поставлену задачу та допомогу при написанні статті.

1. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Koshubei A. N.* Analytic methods in theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type. – Basel etc.: Birkhäuser, 2004. – 390 p.
2. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Matematiche. – 1994. – **49**, № 1. – P. 53 – 105.
3. *Di Francesco M., Polidoro S.* On a class of degenerate parabolic equation of Kolmogorov type // AMRX Appl. Math. Res. Express. – 2005. – № 3. – P. 77 – 116.
4. *Малицька Г.П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого за довільною кількістю груп змінних параболічного рівняння типу Колмогорова довільного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 131 – 138.
5. *Малицька Г. П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1650 – 1663.
6. *Ивасишен Л.М.* Интегральное представление и множества начальных значений решений параболических уравнений с оператором Бесселя и растущими коэффициентами. – Черновцы, 1992. – 62 с. – Деп. в УкрИНТЭИ № 1731-Ук.92.
7. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Мельничук Л. М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 288. – С. 5 – 11.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Высш. шк., 1987. – 228 с.
9. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: Multivalued right-hand sides with discontinuities // DeGruyter Stud. Math. – Berlin: Walter de Gruyter, 2011. – **40**.
10. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
11. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
12. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
13. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 442 с.
14. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

Одержано 25.01.12