УДК 517.9

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНІ m-ФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We propose an algorithm for the construction of asymptotic m-phase soliton-type solutions of a singularly perturbed Korteweg – de Vries equation with varying coefficients and establish the accuracy with which the main term asymptotically satisfies the considered equation.

Предложен алгоритм построения асимптотических m-фазовых солитоноподобных решений сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами и установлена точность, с которой главный член асимптотически удовлетворяет данному уравнению.

1. Вступ. У XX столітті багато інженерів і фізиків вивчали питання про існування та взаємодію хвиль у нелінійних середовищах, яке мало важливе значення для вирішення різних проблем і задач, зокрема при конструюванні ламп біжучих хвиль, плазмових установок, оптичних квантових підсилювачів, при моделюванні штучних нервових волокон та дослідженні інших фізичних і біологічних процесів [1].

Одним із найцікавіших видів досліджуваних хвиль у нелінійному середовищі є відокремлена хвиля, яку вперше описав Дж. Скотт Рассел [2] у 1834 році. Це явище зацікавило багатьох дослідників, включаючи Дж. Стокса, В. Буссінеска, Дж. Б. Ейрі та ін., але лише в 1895 році Д. Кортевег та Дж. де Фріз [3] запропонували для опису такого виду хвиль диференціальне рівняння вигляду

$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0, \quad a \equiv \mathrm{const}, \tag{1}$$

яке згодом дістало назву рівняння Кортевега – де Фріза.

У XX столітті виявилося, що рівняння (1) може використовуватися для опису найрізноманітніших процесів і явищ, зокрема таких, як іонно-звукові хвилі [4], магнітогідродинамічні хвилі в плазмі [5], коливання в ангармонічній решітці [6], вихрові течії в трубі [7] та ін. [1, 8]. Зазначимо також, що до рівняння Кортевега – де Фріза зводиться широкий клас квазігіперболічних диференціальних рівнянь [9].

У 60 – 80-х роках минулого століття саме завдяки інтенсивним дослідженням рівняння (1) та інших так званих інтегровних моделей [10 – 29] було створено теорію методу оберненої задачі розсіювання (основи математичної теорії солітонів), що дозволяє досліджувати різноманітні нелінійні задачі. При цьому було з'ясовано, що крім розв'язку у вигляді відокремленої хвилі

$$u(x,t) = u_0 + A\,\mathrm{ch}^{-2}(\beta(x - \varphi(t))), \tag{2}$$

де u_0 — стала, $\varphi(t) = (a^2 + 6u_0)t$, $A = \dfrac{a^2}{2}$, $\beta = \dfrac{a}{2}$, так званого односолітонного розв'язку, рівняння Кортевега – де Фріза також має багатосолітонні розв'язки [30, 31], найпростішим прикладом яких є так званий дублетний (двосолітонний) розв'язок

$$u(x,t) = \frac{72}{a}\,\frac{4\,\mathrm{ch}\,(2x - 8t) + \mathrm{ch}\,(4x - 64t) + 3}{\left[3\,\mathrm{ch}\,(x - 28t) + \mathrm{ch}\,(3x - 36t)\right]^2}\,, \tag{3}$$

де a — стала з рівняння (1).

Термін *двосолітонний розв'язок* пов'язаний з тим, що при великих значеннях часової змінної t розв'язок (3) можна розглядати (в певному сенсі) як суперпозицію двох односолітонних розв'язків вигляду (2) [22]

$$u_i(x,t) = \frac{12\kappa_i^2}{a}\,\mathrm{ch}^{-2}\left[\kappa_i(x - 4\kappa_i^2 t) + \delta_i\right], \qquad \delta_i = \mathrm{const}, \quad i = 1, 2,$$

де $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$.

З іншого боку, при моделюванні хвильових процесів у рідинах з малою дисперсією виникає [30, 31] рівняння Кортевега – де Фріза з малим параметром при старшій похідній вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} + 6uu_x + u_t = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in [0; T], \tag{4}$$

яке має солітонний розв'язок [30]

$$u(x,t,\varepsilon) = u_0 + A\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{a}{2}\,\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}\right), \tag{5}$$

де $A = \dfrac{a^2}{2}$, $\varphi(t) = (a^2 + 6u_0)t$, $a > 0$, u_0 — деякі константи.

Проте якщо для рівняння (1), як і для рівняння (4), можна знайти у явному вигляді їхні точні розв'язки, то для більш складних систем, наприклад рівняння Кортевега – де Фріза з малим параметром і змінними коефіцієнтами, побудувати у явному вигляді розв'язок, як правило, неможливо. Для подібних задач при знаходженні їхніх наближених розв'язків успішно використовуються асимптотичні методи [30 – 37]. При цьому, оскільки такі рівняння пов'язані з вивченням хвильових процесів і при сталих коефіцієнтах мають розв'язки солітонного типу, розглядається задача про побудову наближених розв'язків спеціального вигляду, які за своєю структурою подібні до солітонних розв'язків вигляду (5). Такі наближені розв'язки отримали назву асимптотичних солітоноподібних розв'язків [31].

Термін *асимптотичні солітоноподібні розв'язки* вперше було запропоновано В. П. Масловим та його учнями в [30, 31], де розглянуто задачу про побудову асимптотичних одно-, дво- і багатофазових солітоноподібних розв'язків для рівняння руху рідини вигляду

$$u_t + (\rho_1 + 3\rho_2 u)u_x + \varepsilon^2\rho_3 u_{xxx} + \rho_4 u = 0. \tag{6}$$

Тут

$$\rho_1 = \sqrt{gH(x)}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}\sqrt{gH^{-1}(x)}, \qquad \rho_3 = \frac{1}{6}\sqrt{gH^5(x)}, \qquad \rho_4 = \frac{1}{2}\rho_{1x},$$

$H(x)$ — глибина незбуреної рідини, g — прискорення вільного падіння. Зауважимо, що в [30, 31] для багатофазового ($m > 2$) випадку побудовано лише головний член асимптотики.

Розвиваючи ідеї статті [30], в [32, 33] побудовано асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{7}$$

де коефіцієнти $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ записуються у вигляді асимптотичних рядів

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \qquad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції $a_k(x)$, $b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, $k \geq 0$, $t \in [0;T]$, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

У [34, 35] знайдено асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для рівняння (7), а в [36] — асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки рівняння (7). Крім того, в [37] отримано асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки для рівняння (7) у випадку, коли коефіцієнти цього рівняння залежать як від просторової, так і від часової змінної. У згаданих працях також дано обґрунтування побудованих асимптотик.

У даній статті розглядається питання про побудову асимптотичних m-фазових ($m > 2$) солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \tag{8}$$

де

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x,t), \qquad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x,t), \tag{9}$$

функції $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^{\infty}(\mathbf{R} \times [0,T])$, $k \geq 0$, $T > 0$.

2. Основні припущення і позначення. Як і в [30, 31], позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R} \times \times [0;T] \times \mathbf{R})$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ виконуються дві умови:

1) справджується співвідношення

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t) \in K;$$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau \to -\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} \big(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\big) = 0, \quad (x,t) \in K.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}) \subset G_1$ — простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau) \in G_1$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}$, що рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ виконується умова

$$\lim_{\tau \to -\infty} f(x,t,\tau) = 0.$$

Позначимо також при кожному натуральному $n \geq 2$ за допомогою $G_n^0 = G_n^0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \times \mathbf{R}^n)$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$, $(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}^n$, які задовольняють умову: при кожному $k = \overline{1,n}$ існують такі функції $f_k^{\pm} = f_k^{\pm}(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_n) \in G_{n-1}^0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}^{n-1})$, що для довільних невід'ємних цілих чисел α, β, σ та мультиіндексу $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ має місце співвідношення

$$\lim_{\tau_k \to \pm\infty} \tau_k^{\alpha} \frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^{\sigma}}{\partial t^{\sigma}} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial \tau^{\gamma}} (f - f_k^{\pm}) = 0. \tag{10}$$

Цю рівність і аналогічні їй далі слід розуміти як два співвідношення — окремо для f_k^+ і окремо для f_k^-, у яких змінна, за якою обчислюється границя, прямує відповідно до $+\infty$ і $-\infty$.

Означення 1 [30, 31, 34 – 37]. *Функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається асимптотичною m-фазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N \geq 0$ для функції $u(x,t,\varepsilon)$ має місце зображення вигляду*

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\ \frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\ldots,\ \frac{S_m(x,t)}{\varepsilon},\varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{11}$$

де

$$\begin{gathered} Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\right], \\ \tau_1 = \frac{S_1(x,t)}{\varepsilon}, \qquad \tau_2 = \frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\ \ldots,\ \tau_m = \frac{S_m(x,t)}{\varepsilon}, \end{gathered} \tag{12}$$

$S_k = S_k(x,t)$, $k = \overline{1,m}$, *— деякі нескінченно диференційовні функції змінних $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$, до того ж*

$$\left.\frac{\partial S_k}{\partial x}\right|_{\Gamma_k} \neq 0, \qquad \Gamma_k = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T], S_k(x,t) = 0\},$$

$k = \overline{1,m}$; $u_j(x,t)$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$, $j = \overline{1,N}$, *— нескінченно диференційовні функції*; $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \in G_m^0$, $j = \overline{0,N}$.

При цьому змінні τ_1, τ_2, $\ldots$, τ_m в (12) вважаються незалежними.

Криві $S_k(x,t) = 0$, $k = \overline{1,m}$, називають кривими розриву. Цей термін виник у зв'язку з тим, що при побудові асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортевега – де Фріза, тобто у випадку $m = 1$, крива $S(x,t) = x - \varphi(t) = 0$, де $\varphi(t)$, $t \in [0;T]$, — деяка функція, є лінією розриву для розв'язку породжуючого рівняння, тобто рівняння (8) при $\varepsilon = 0$.

В подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^N\right)$ при $\varepsilon \to 0$ означає, що існують такі величина $\varepsilon_0 > 0$ і стала $C > 0$, що залежить від числа N і від компакта $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$, що $|\Psi(x,t,\varepsilon)| \leq C\,\varepsilon^N$ для всіх $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ і $(x,t) \in K$.

3. Побудова асимптотичного розв'язку. Асимптотичний m-фазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (8) шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{13}$$

де

$$\begin{gathered} Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\right], \\ \tau_1 = \frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon}, \qquad \tau_2 = \frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon},\ \ldots,\ \tau_m = \frac{x-\varphi_m(t)}{\varepsilon}, \end{gathered} \tag{14}$$

N — довільне (фіксоване) натуральне число.

Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (13), а функція

$$V_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m),$$

— сингулярною частиною асимптотики (13). При цьому

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=U_N(x,t,\varepsilon)+V_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon).$$

Для визначення коефіцієнтів асимптотичного розкладу (13), відповідно до загальної методології асимптотичних методів, знаходимо похідні $u_t(x,t,\varepsilon)$, $u_x(x,t,\varepsilon)$, $u_{xxx}(x,t,\varepsilon)$, підставляємо ці значення в рівняння (8) і враховуємо (9). Після домноження отриманого виразу на ε будемо мати

$$\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3}+\frac{3}{\varepsilon}\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2\partial\tau_p}+\frac{3}{\varepsilon^2}\sum_{p,\,q=1}^{m}\frac{\partial^3 V_N}{\partial x\partial\tau_p\partial\tau_q}+\frac{1}{\varepsilon^3}\sum_{p,q,r=1}^{m}\frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau_p\,\partial\tau_q\partial\tau_r}\right)=$$

$$=\varepsilon a(x,t,\varepsilon)\left(\frac{\partial U_N}{\partial t}+\frac{\partial V_N}{\partial t}-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_k}\varphi_k'(t)\right)+$$

$$+\varepsilon b(x,t,\varepsilon)\left(U_N+V_N\right)\left(\frac{\partial U_N}{\partial x}+\frac{\partial V_N}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_k}\right)+O\left(\varepsilon^{N+2}\right). \qquad (15)$$

Як і у випадку асимптотичних однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння (8), коефіцієнти регулярної частини асимптотики (13) визначаються з системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \qquad (16)$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_0(x,t)u_j\frac{\partial u_0}{\partial x}=F_j(x,t), \quad j=\overline{1,N}, \qquad (17)$$

де функції $F_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, $\ldots$, $u_{j-1}(x,t)$, $j=\overline{1,N}$.

Процедуру визначення членів регулярної частини асимптотики з системи диференціальних рівнянь (16), (17) описано в [37].

Після знаходження регулярної частини асимптотики із співвідношення (15), враховуючи (16), (17), шляхом зрівнювання коефіцієнтів при однакових степенях малого параметра ε отримуємо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для визначення членів сингулярної частини асимптотики. Задачі про знаходження сингулярної частини асимптотики у випадку асимптотичного одно- та двофазового солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза вигляду (8) розглянуто у статтях [32 – 36], на відміну від яких випадок $m > 2$ суттєво ускладнюється.

4. Визначення сингулярної частини асимптотики. При визначенні функцій сингулярної частини асимптотики (13) враховується, що $V_j(x, t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in G_m^0$, $j = \overline{0, N}$, згідно з означенням 1. Тому викликає інтерес побудова цих функцій лише в околі кривих розриву.

Коефіцієнти сингулярної частини асимптотики в околі кожної з кривих $x = \varphi_s(t)$, $s = \overline{1, m}$, задовольняють систему диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\sum_{p,q,r=1}^{m} \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_p \partial \tau_q \partial \tau_r} = -a_0(\varphi_s(t), t) \sum_{k=1}^{m} \varphi_k'(t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k} +$$

$$+ b_0(\varphi_s(t), t) u_0(\varphi_s(t), t) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k} + b_0(\varphi_s(t), t) \sum_{k=1}^{m} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k}, \quad s = \overline{1, m}, \tag{18}$$

$$\sum_{p,q,r=1}^{m} \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_p \partial \tau_q \partial \tau_r} = \sum_{k=1}^{m} \left(b_0(\varphi_s(t), t) u_0(\varphi_s(t), t) - a_0(\varphi_s(t), t) \varphi_k'(t) \right) \frac{\partial V_j}{\partial \tau_k} +$$

$$+ b_0(\varphi_s(t), t) \sum_{k=1}^{m} \left(V_0 \frac{\partial V_j}{\partial \tau_k} + V_j \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k} \right) + \mathcal{F}_{js}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), \qquad j = \overline{1, N}, \quad s = \overline{1, m}, \tag{19}$$

де значення функцій $\mathcal{F}_{js}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $j = \overline{1, N}$, при кожному $s = \overline{1, m}$ знаходять рекурентним чином після відповідного визначення функцій $V_0(x, t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $V_1(x, t, \tau_1, \tau_2, \ldots$ $\ldots, \tau_m), \ldots, V_{j-1}(x, t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ із рівнянь (18), (19). При цьому функції $\mathcal{F}_{js}$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, m}$, залежать (певним чином) від коефіцієнтів рівняння (8).

Для функції $\mathcal{F}_{1s} = \mathcal{F}_{1s}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $s = \overline{1, m}$, зокрема, маємо

$$\mathcal{F}_{1s} = -\sum_{p,q=1}^{m} \frac{\partial^3 V_0}{\partial x \partial \tau_p \partial \tau_q} + a_0(\varphi_s(t), t) \frac{\partial V_0}{\partial t} - \tau_s a_{0x}(\varphi_s(t), t) \sum_{k=1}^{m} \varphi_k'(t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k} +$$

$$+ \tau_s \sum_{k=1}^{m} \left[b_{0x}(\varphi_s(t), t) V_0 + \left(b_0(\varphi_s(t), t) u_0(\varphi_s(t), t) \right)_x \right] \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k} +$$

$$+ b_0(\varphi_s(t), t) u_{0x}(\varphi_s(t), t) V_0 - \sum_{k=1}^{m} \left[a_1(\varphi_s(t), t) \varphi_k'(t) - b_1(\varphi_s(t), t) V_0 \right] \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k} +$$

$$+ b_0(\varphi_s(t), t) u_0(\varphi_s(t), t) \frac{\partial V_0}{\partial x} + b_0(\varphi_s(t), t) V_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} +$$

$$+ \left[b_0(\varphi_s(t), t) u_1(\varphi_s(t), t) + b_1(\varphi_s(t), t) u_0(\varphi_s(t), t) \right] \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k}.$$

Якщо у випадку $m = 1$ розв'язок рівняння (18) можна побудувати явно [33, 34], а розв'язок кожного з рівнянь системи (19) знайти за допомогою методу, що описаний у [34], то у випадку $m > 1$ метод статті [34] не можна застосувати через те, що невідомі функції в рівняннях (18), (19) залежать від m $(m > 2)$ незалежних змінних. Більш того, рівняння (18) і система (19) є складними для інтегрування, оскільки ці рівняння є диференціальними рівняннями третього порядку з частинними похідними для функцій багатьох змінних, а рівняння (18) — нелінійним щодо невідомої функції. Тому в подальшому на коефіцієнти цих рівнянь накладаються певні умови, при яких можна побудувати у просторі $G_m^0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}^m)$ розв'язки рівняння (18) і системи (19). Тим самим показується, що рівняння Кортевега – де Фріза (8) має асимптотичні багатофазові солітоноподібні розв'язки.

Припустимо, що для кожного $t \in [0;T]$ далі виконуються умови узгодження вигляду [30, 31]

$$a_0(t) := a_0(\varphi_k(t), t) = a_0(\varphi_s(t), t), \quad k, s = \overline{1, m}, \tag{20}$$

$$b_0(t) := b_0(\varphi_k(t), t) = b_0(\varphi_s(t), t), \quad k, s = \overline{1, m}, \tag{21}$$

$$u_0(t) := u_0(\varphi_k(t), t) = u_0(\varphi_s(t), t), \quad k, s = \overline{1, m}, \tag{22}$$

$$\mathcal{F}_{jk}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \mathcal{F}_{js}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), \qquad j = \overline{1, N}, \quad k, s = \overline{1, m}. \tag{23}$$

У випадку $V_0(x, t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ рівність (23) при $j = 1$ справджується, зокрема, якщо додатково до (20) – (22) виконуються умови

$$a_{0x}(\varphi_s(t), t) = 0, \qquad a_1(\varphi_k(t), t) = a_1(\varphi_s(t), t), \quad k, s = \overline{1, m}, \tag{24}$$

$$u_{0x}(\varphi_s(t), t) = 0, \qquad u_1(\varphi_k(t), t) = u_1(\varphi_s(t), t), \quad k, s = \overline{1, m}, \tag{25}$$

$$b_{0x}(\varphi_s(t), t) = 0, \qquad b_1(\varphi_k(t), t) = b_1(\varphi_s(t), t), \quad k, s = \overline{1, m}. \tag{26}$$

Ці умови виконуються, наприклад, у випадку, коли

$$a_0(x, t) = \exp\left(-\prod_{k=1}^{m}(x - \varphi_k(t))^2\right), \qquad b_0(x, t) = \exp\left(-\prod_{k=1}^{m}(x - \varphi_k(t))^4\right),$$

а в якості так званих фонових функцій вибрано $u_0(x, t) \equiv 0$, $u_1(x, t) \equiv 0$.

Зрозуміло, що умови (20) – (22), (24) – (26) виконуються також, наприклад, у випадку, коли коефіцієнти $a_0(x, t)$, $b_0(x, t)$, $a_1(x, t)$, $b_1(x, t)$ в (9) та функції $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$ в (12) не залежать від змінної x. Очевидно, що умови (20) – (22), (24) – (26) мають місце і у багатьох інших випадках.

4.1. Визначення головного члена сингулярної частини асимптотики. Для знаходження головного члена сингулярної частини асимптотики в (13) скористаємося формулами для солітонних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами вигляду (1). Виконаємо в (18) редукцію для змінних τ_1, τ_2, ..., τ_m згідно з формулами

$$\tau_s = \xi - \gamma_s(t)\eta, \quad s = \overline{1, m}, \tag{27}$$

де

$$\gamma_s(t) = -a_0(\varphi_s(t), t)\varphi_s'(t) + b_0(\varphi_s(t), t)u_0(\varphi_s(t), t), \tag{28}$$

ξ, η — нові незалежні змінні.

Очевидно, що у випадку, коли функція

$$V_0(\xi, \eta) = V_0(\xi - \gamma_1(t)\eta, \xi - \gamma_2(t)\eta, \ldots, \xi - \gamma_m(t)\eta) \tag{29}$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - b_0(t)V_0\frac{\partial V_0}{\partial \xi} + \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = 0, \tag{30}$$

функція $V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ також задовольняє рівняння (18) при $\tau_s = \xi - \gamma_s(t)\eta$, $s = \overline{1, m}$. А отже, у такому випадку необхідно знайти розв'язок рівняння (30) вигляду (29).

Рівняння (30) за допомогою масштабних перетворень $\xi = \alpha\xi_1$, $\eta = \beta\eta_1$, де

$$\alpha = \left(\frac{6}{b_0(t)}\right)^{1/2}, \quad \beta = \left(\frac{6}{b_0(t)}\right)^{3/2}, \tag{31}$$

зводиться до класичного рівняння Кортевега – де Фріза (1) при $a = -6$:

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial x^3} - 6V_0\frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial s} = 0. \tag{32}$$

Тут для зручності виконано перепозначення змінних: η_1 на s, а ξ_1 на x.

Для знаходження головного члена сингулярної частини асимптотики (13) в явному вигляді скористаємося відомою формулою для m-солітонного розв'язку рівняння (32), який має вигляд [38]

$$V_0(x, s) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\left(E + G(x, s)\right), \tag{33}$$

де E — одинична $(m \times m)$-матриця, коефіцієнти $(m \times m)$-матриці $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ мають вигляд

$$g_{ij} = g_{ij}(x, s) = c_i(s)\, c_j(s)\, \frac{e^{-(\kappa_i + \kappa_j)x}}{\kappa_i + \kappa_j}.$$

Тут $c_j(s) = c_j(0)\exp\left(4\kappa_j^3 s\right)$; $\kappa_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, — власні значення задачі Штурма – Ліувілля, асоційованої з рівнянням (32).

Враховуючи (27) – (29), (31), в якості $\kappa_j = \kappa_j(t) > 0$, $j = \overline{1, m}$, де $t \in [0; T]$ — параметр, можна взяти величини, що визначаються із співвідношення

$$\kappa_j^2 = \frac{3}{2}\,\frac{\gamma_j(t)}{b_0(t)}. \tag{34}$$

Тут $\gamma_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, задано формулами (28).

Оскільки права частина в (33) залежить від виразів вигляду $\alpha x - \beta\gamma_j s$, $x, s \in \mathbf{R}$, $j = \overline{1, m}$, то, враховуючи (27) і формули

$$\tau_j = \alpha x - \beta\gamma_j s, \qquad x, s \in \mathbf{R}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{35}$$

переконуємося, що функція (33) залежить від параметра $t \in [0; T]$ і змінних $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$.

Таким чином, m-солітонний розв'язок рівняння (18) можна записати за допомогою формули

$$V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = -2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \left(E + G(x,s) \right) \right) \Bigg|_{\tau_j = \alpha x - \beta\gamma_j s,\ j = \overline{1,m}}. \tag{36}$$

Покажемо тепер, що функція $V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ належить простору G_m^0. Зауважимо, що у випадку $m = 1$, тобто при розгляді асимптотичних однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння (8), функція $V_0(t, \tau_1)$ належить простору G_1^0 за побудовою, а у випадку $m = 2$ таке доведення наведено в [36]. Спочатку доведемо допоміжну лему.

Лема 1. *Нехай виконуються умови*

$$\gamma_j(t) = -a_0(t)\varphi_j'(t) + b_0(t)u_0(t) > 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Тоді функція $V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, що визначена формулою (36), для довільного цілого невід'ємного значення n при кожному $k = \overline{1,m}$ задовольняє співвідношення

$$\lim_{\tau_k \to +\infty} \tau_k^n \left(V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) - V_{0k}^+(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_m) \right) = 0, \tag{37}$$

$$\lim_{\tau_k \to -\infty} \tau_k^n \left(V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) - V_{0k}^-(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_m) \right) = 0. \tag{38}$$

Тут

$$V_{0k}^+(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_m) =$$

$$= -2 \left(\frac{d^2}{dx^2} \ln \det \left(E + G_k^+(x,s) \right) \right) \Bigg|_{\tau_j = \alpha x - \beta\gamma_j s,\, j = \overline{1,m},\, j \neq k}, \tag{39}$$

$$V_{0k}^-(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_m) =$$

$$= -2 \left(\frac{d^2}{dx^2} \ln \det G_k^-(x,s) \right) \Bigg|_{\tau_j = \alpha x - \beta\gamma_j s,\, j = \overline{1,m},\, j \neq k}, \tag{40}$$

E — одинична $(m-1) \times (m-1)$-матриця, $G_k^+(x,s)$ — алгебраїчне доповнення елемента $g_{kk}(x,s)$, $k = \overline{1,m}$, матриці $G(x,s)$ в (33); *$(m \times m)$-матриця $G_k^-(x,s) = (g_{kij}^-)_{i,j=1}^m$ задається елементами*

$$g_{kij}^- = g_{kij}^-(x,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\kappa_i + \kappa_j}, & i \neq j, \\[2ex] \dfrac{1}{2\kappa_i} + \dfrac{e^{2\kappa_i x}}{c_i^2}, & i = j, \quad i \neq k, \\[2ex] \dfrac{1}{2\kappa_i}, & i = j = k. \end{cases} \qquad i, j = \overline{1,m},$$

Доведення. Не втрачаючи загальності, проведемо доведення для випадку, коли у формулах (37), (38) $k=1$, тобто коли $\tau_1 \to +\infty$ в (37) та $\tau_1 \to -\infty$ в (38).

Тоді матриці $G_k^+(x,s)$, $G_k^-(x,s)$ (при $k=1$) мають відповідно вигляд

$$G_1^+(x,s) = (g_{1ij}^+)_{ij=1}^{m-1}, \quad \text{де} \;\; g_{1ij}^+ = g_{1ij}^+(x,s) = c_{i+1}^2(s)\, c_{j+1}^2(s)\, \frac{e^{-(\kappa_{i+1}+\kappa_{j+1})x}}{\kappa_{i+1}+\kappa_{j+1}},$$

$$G_1^-(x,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\kappa_1} & \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_2} & \ldots & \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_{m-1}} & \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_m} \\ \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_2} & \dfrac{1}{2\kappa_2} + \dfrac{e^{2\kappa_2 x}}{c_2^2} & \ldots & \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_{m-1}} & \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_{m-1}} & \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_{m-1}} & \ldots & \dfrac{1}{2\kappa_{m-1}} + \dfrac{e^{2\kappa_{m-1} x}}{c_m^2} & \dfrac{1}{\kappa_{m-1}+\kappa_m} \\ \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_m} & \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_m} & \ldots & \dfrac{1}{\kappa_{m-1}+\kappa_m} & \dfrac{1}{2\kappa_m} + \dfrac{e^{2\kappa_m x}}{c_m^2} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо границі $\lim_{\tau_1\to+\infty} V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $\lim_{\tau_1\to-\infty} V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$. З цією метою розглянемо функцію

$$g(x,s) = \det\left(E + G(x,s)\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \dfrac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} + 1 & \dfrac{c_1 c_2}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x} & \ldots & \dfrac{c_1 c_m}{\kappa_1+\kappa_m} e^{-(\kappa_1+\kappa_m)x} \\ \dfrac{c_1 c_2}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x} & \dfrac{c_2^2}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_2 x} + 1 & \ldots & \dfrac{c_2 c_m}{\kappa_2+\kappa_m} e^{-(\kappa_2+\kappa_m)x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{c_1 c_m}{\kappa_1+\kappa_m} e^{-(\kappa_1+\kappa_m)x} & \dfrac{c_2 c_m}{\kappa_2+\kappa_m} e^{-(\kappa_2+\kappa_m)x} & \ldots & \dfrac{c_m^2}{2\kappa_m} e^{-2\kappa_m x} + 1 \end{pmatrix},$$

де величини $c_j(s)$, $j=\overline{1,m}$, описано вище при записі формули (33).

Розклавши цей визначник за першим стовпчиком, отримаємо співвідношення

$$g(x,s) = \left(\frac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 x} + 1\right) c_2^2 c_3^2 \ldots c_m^2 e^{-2(\kappa_2+\kappa_3+\ldots+\kappa_m)x} D_1 -$$

$$-\frac{1}{\kappa_1+\kappa_2}\; c_1^2 c_2^2 \ldots c_m^2 e^{-2(\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_m)x} D_2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{m+1} \frac{1}{\kappa_1+\kappa_m}\; c_1^2 c_2^2 \ldots c_m^2 e^{-2(\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_m)x} D_m, \tag{41}$$

де $D_k = D_k(x,s)$, $k=\overline{1,m}$, — мінори порядку $m-1$ вигляду

$$D_1(x,s)=\det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\kappa_2}+\dfrac{e^{2\kappa_2 x}}{c_2^2} & \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_3} & \dots & \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_m} \\ \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_3} & \dfrac{1}{2\kappa_3}+\dfrac{e^{2\kappa_3 x}}{c_3^2} & \dots & \dfrac{1}{\kappa_3+\kappa_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_m} & \dfrac{1}{\kappa_3+\kappa_m} & \dots & \dfrac{1}{2\kappa_m}+\dfrac{e^{2\kappa_m x}}{c_m^2} \end{pmatrix},$$

$$D_2(x,s)=\det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_2} & \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_3} & \dots & \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_m} \\ \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_3} & \dfrac{1}{2\kappa_3}+\dfrac{e^{2\kappa_3 x}}{c_3^2} & \dots & \dfrac{1}{\kappa_3+\kappa_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_m} & \dfrac{1}{\kappa_3+\kappa_m} & \dots & \dfrac{1}{2\kappa_m}+\dfrac{e^{2\kappa_m x}}{c_m^2} \end{pmatrix},$$

$$\dots$$

$$D_m(x,s)=\det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_2} & \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_3} & \dots & \dfrac{1}{\kappa_1+\kappa_m} \\ \dfrac{1}{2\kappa_2}+\dfrac{e^{2\kappa_2 x}}{c_2^2} & \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_3} & \dots & \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{\kappa_2+\kappa_{m-1}} & \dfrac{1}{\kappa_3+\kappa_{m-1}} & \dots & \dfrac{1}{\kappa_{m-1}+\kappa_m} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи формулу (41), позначення (35) і рівність

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln g(x,s)=\frac{gg_{xx}-(g_x)^2}{g^2},$$

отримуємо співвідношення

$$\lim_{\tau_1\to+\infty}V_0(t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m)=-2\left(\frac{d^2}{dx^2}\ln D_1(x,s)\right)\Bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j s,\ j=\overline{2,m}}. \tag{42}$$

Оскільки вираз у правій частині (42) визначає $(m-1)$-солітонний розв'язок рівняння (18) (це випливає з вигляду матриці $(E+G(x,s))$), то при $\tau_1\to+\infty$ функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m)$ прямує до $(m-1)$-солітонного розв'язку рівняння (18).

Аналогічно для $k=\overline{2,m}$ доводиться співвідношення

$$\lim_{\tau_k\to+\infty}V_0(t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m)=-2\left(\frac{d^2}{dx^2}\ln D_k(x,s)\right)\Bigg|_{\tau_j=\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j s,\ j=\overline{1,m},\, j\neq k}. \tag{43}$$

Якщо в якості функцій

$$V_{0k}^{+}(t,\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\dots,\tau_m),\quad k=\overline{1,m},$$

вибрати відповідні функції у правих частинах співвідношень (41), (42), то отримаємо (37).

Аналогічно доводиться співвідношення (38). При цьому функції

$$V_{0k}^{-} = V_{0k}^{-}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_m), \quad k = \overline{1, m},$$

мають вигляд

$$V_{0k}^{-} = -2 \left(\frac{d^2}{dx^2} \ln \det G_k^{-}(x, s) \right) \Bigg|_{\tau_j = \alpha x - \beta \gamma_j s, j = \overline{1,m}, j \neq k}.$$

Оскільки функція $g(x, s)$ є поліномом від виразів $c_j^2(s) e^{-2\kappa_j x}$, $j = \overline{1, m}$, то, очевидно, що лема 1 є справедливою для довільного цілого невід'ємного значення n.

Лему 1 доведено.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми* 1. *Тоді функція* $V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ *належить простору* G_m^0.

Доведення. Властивість $V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in G_m^0$, згідно з визначенням простору G_m^0, еквівалентна існуванню при кожному $k = \overline{1, m}$ таких функцій

$$V_{0k}^{\pm} = V_{0k}^{\pm}(x, t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_m) \in G_{m-1}^0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}^{m-1}),$$

що для довільних невід'ємних цілих чисел n, α, β та мультиіндексу $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ має місце співвідношення (10).

З леми 1 випливає, що в якості функцій V_{0k}^{+}, V_{0k}^{-} можна взяти функції

$$V_{0k}^{\pm} = V_{0k}^{\pm}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \ldots, \tau_m),$$

які визначені формулами (39), (40). Залишилося показати, що ці функції належать простору G_{m-1}^0 і для них виконуються співвідношення (10).

Враховуючи формулу (36) для багатосолітонного розв'язку, записуємо функцію $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det (E + G(x, s))$ у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det (E + G(x, s)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det P(x, s), \tag{44}$$

де

$$P(x, s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\kappa_1} + \dfrac{e^{2\kappa_1 x}}{c_1^2} & \dfrac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} & \ldots & \dfrac{1}{\kappa_1 + \kappa_m} \\ \dfrac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} & \dfrac{1}{2\kappa_2} + \dfrac{e^{2\kappa_2 x}}{c_2^2} & \ldots & \dfrac{1}{\kappa_2 + \kappa_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{1}{\kappa_1 + \kappa_m} & \dfrac{1}{\kappa_2 + \kappa_m} & \ldots & \dfrac{1}{2\kappa_m} + \dfrac{e^{2\kappa_m x}}{c_m^2} \end{pmatrix}.$$

Справедливість рівності (44) перевіряється безпосередніми обчисленнями.

Тоді маємо

$$V_{0k}^{+}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_m) = -2\lim_{\tau_k\to+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det G_k^{+}(x,s)\bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j s,\ j=\overline{1,m},\ j\neq k},$$

де $G_k^+ = G_k^+(x,s)$ — алгебраїчне доповнення елемента $p_{kk} = p_{kk}(x,s)$ матриці $P(x,s)$, і

$$V_{0k}^{-}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_m) = -2\lim_{\tau_k\to-\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det G_k^{-}(x,s)\bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j s,\ j=\overline{1,m},\, j\neq k},$$

де $(m\times m)$-матрицю $G_k^- = G_k^-(x,s)$ отримано з матриці $P(x,s)$ заміною елемента p_{kk} на елемент $\dfrac{1}{2\kappa_k}$.

Обчислимо границі $\lim_{\tau_p\to\pm\infty} V_{0k}^{\pm}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ при кожному $p=\overline{1,m},\ k\neq p$.

Згідно з лемою 1, враховуючи (42), отримуємо

$$V_{0kp}^{++}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = \lim_{\tau_p\to+\infty} V_{0k}^{+}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_m) =$$

$$= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det G_{kl}^{++}(x,s)\bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j s,\ j=\overline{1,m},\, j\neq k, j\neq p},$$

де $G_{kp}^{++}(x,s)$ — алгебраїчне доповнення елемента g_{kpp} у випадку $k>p$ та елемента $g_{k,p-1,\,p-1}$ у випадку $k<p$ матриці $G_k^+(x,s)$, і

$$V_{0kp}^{+-}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = \lim_{\tau_p\to-\infty} V_{0k}^{+}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_m) =$$

$$= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det G_{kp}^{+-}(x,s)\bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j s,\ j=\overline{1,m},\, j\neq k, j\neq p},$$

де $G_{kp}^{+-}(x,s)$ отримано з матриці $G_k^+(x,s)$ заміною елемента, що дорівнює $\dfrac{1}{2\kappa_p}+\dfrac{e^{2\kappa_p x}}{c_p^2}$, на елемент $\dfrac{1}{2\kappa_p}$.

Розглянемо тепер функцію $V_{0k}^-(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, що задається формулою (40). Розклавши визначник $\det G_k^-(x,s)$ за p-м стовпчиком, де $p=\overline{1,m},\ p\neq k$, і спрямувавши $\tau_p\to+\infty$, одержимо

$$V_{0kp}^{-+}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = \lim_{\tau_p\to+\infty} V_{0k}^{-}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_m) =$$

$$= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det G_{kp}^{-+}(x,s)\bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j s,\ j=\overline{1,m},\, j\neq k, j\neq p},$$

де $G_{kp}^{-+}(x,s)$ — алгебраїчне доповнення елемента g_{kpp} матриці $G_k^-(x,s)$, і

$$V_{0kp}^{--}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = \lim_{\tau_p\to-\infty} V_{0k}^{-}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_m) =$$

$$= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det G_{kp}^{--}(x,s)\Bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j s,\ j=\overline{1,m},\, j\neq k, j\neq p},$$

де $G_{kp}^{--}(x,s)$ отримано з матриці $G_k^{-}(x,s)$ заміною елемента, що дорівнює $\dfrac{1}{2\kappa_p}+\dfrac{e^{2\kappa_p x}}{c_p^2}$, на елемент $\dfrac{1}{2\kappa_p}$.

Продовжуючи цю процедуру далі і обчисливши $m-1$ границю, отримаємо 2^{m-1} функцій, що залежать від параметра $t \in [0;T]$ і однієї змінної з набору $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$. Такі функції мають вигляд

$$v_0(t,\tau_q) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\left(A + B\frac{e^{2\kappa_q x}}{c_q^2}\right)\Bigg|_{\tau_q=\alpha x-\beta\gamma_q s},$$

де $q=\overline{1,m}$ — деяке число, A, B — деякі додатні сталі.

Очевидно, що функція $v_0(t,\tau_q)$ задовольняє співвідношення вигляду (10) і, отже, належить простору G_1^0.

Аналогічно, на попередньому кроці, після обчислення $m-2$ границь, матимемо 2^{m-2} функцій, що залежать від параметра $t\in[0;T]$ і двох змінних з набору $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$. Кожна з цих функцій задовольняє співвідношення вигляду (10) — це можна показати за допомогою безпосередніх обчислень похідних і відповідних границь, тобто ці функції належать простору G_2^0.

За допомогою аналогічних міркувань, за індукцією, можна показати, що функції

$$V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m), \qquad V_{0k}^{\pm}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_m),$$

які визначені формулами (39), (40), задовольняють співвідношення (10) для довільних невід'ємних цілих чисел n, α, β та мультиіндексу $\gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_m)$, а отже, функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ належить простору $G_m^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}^m)$.

Теорему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай $f=f(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in G_m^0$ — довільна функція. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ і будь-якого $n\in\mathbf{N}$ існують така стала C_n, яка не залежить від значення ε, і таке дійсне число $\tau_0>0$, що для всіх $(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in\mathcal{T}_{\delta_1}=\{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in\mathbf{R}^m\colon|\tau_k|>\varepsilon^{\delta_1-1}\tau_0\}$ виконується нерівність $|f(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)|\le C_n\varepsilon^n$, де $\delta_1\in(0;1)$ — довільне фіксоване число.*

Доведення. Оскільки функція $f(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ належить простору G_m^0, то існують (дві) такі функції $f^{1,\pm}(t,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)\in G_{m-1}^0$ і стала $c_1>0$, що для деякого $\tau_{10}>0$ виконуються нерівності

$$|f(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)|\le\left|f^{1,+}(t,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|+\frac{c_1}{\tau_1}$$

для всіх $\tau_1>\varepsilon^{\delta_1-1}\tau_{10}$, $\tau_j\in\mathbf{R}$, $j=\overline{2,m}$, і

$$|f(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)|\le\left|f_j^{1,-}(t,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|+\frac{c_1}{|\tau_1|}$$

при всіх $\tau_1<-\varepsilon^{\delta_1-1}\tau_{10}$, $\tau_j\in\mathbf{R}$, $j=\overline{2,m}$.

Аналогічно, оскільки функції $f^{1,\pm}(t,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)$ належать G^0_{m-1}, то існують (чотири) такі функції $f^{2,\pm,\pm}(t,\tau_3,\tau_4,\ldots,\tau_m)\in G^0_{m-2}$ і стала $c_2>0$, що для деякого $\tau_2>0$ виконуються нерівності

$$\left|f^{1,+}(t,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|\le\left|f^{2,+,+}(t,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|+\frac{c_2}{\tau_2},$$

$$\left|f^{1,-}(t,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|\le\left|f^{2,-,+}(t,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|+\frac{c_2}{\tau_2}$$

для всіх $\tau_2>\varepsilon^{\delta_1-1}\tau_{20}$, $\tau_j\in\mathbf{R}$, $j=\overline{3,m}$, і

$$\left|f^{1,+}(t,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|\le\left|f^{2,+,-}(t,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|+\frac{c_2}{|\tau_2|},$$

$$\left|f^{1,-}(t,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|\le\left|f^{2,-,-}(t,\tau_3,\ldots,\tau_m)\right|+\frac{c_2}{|\tau_2|}$$

для всіх $\tau_2<-\varepsilon^{\delta_1-1}\tau_{20}$, $\tau_j\in\mathbf{R}$, $j=\overline{3,m}$.

Продовжуючи ці міркування далі, переконуємося, що існують такі сталі $c_j>0$, $j=\overline{3,m}$, і дійсні числа $\tau_{j0}>0$, $j=\overline{3,m}$, що з урахуванням записаних вище нерівностей у випадках $j=1$ і $j=2$ для всіх $|\tau_j|>\varepsilon^{\delta_1-1}\tau_{j0}$, $j=\overline{1,m}$, виконується нерівність

$$|f(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_m)|\le\sum_{j=1}^{m}2^j\frac{c_j}{|\tau_j|}. \tag{45}$$

Позначимо $\tau_*=\max\left(\tau_{10},\tau_{20},\,\ldots\,,\tau_{m0}\right)$. Очевидно, що існують такі числа ρ_j, $j=\overline{1,m}$, що для всіх $j=\overline{1,m}$ виконуються нерівності $\rho_j\tau_{j0}>\varepsilon^{\delta_1-1}\tau_*$. Тоді якщо

$$C_1=\sum_{j=1}^{m}c_j\rho_j2^j,$$

то з (45) випливає, що для всіх $(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in\mathcal{T}_{\delta_1}=\{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in\mathbf{R}^m\colon|\tau_k|>\varepsilon^{\delta_1-1}\tau_0\}$ виконується нерівність $|f(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)|\le C_1\varepsilon$.

Лема 2 при $n>1$ доводиться за допомогою аналогічних міркувань з використанням співвідношення (10).

Лему 2 доведено.

Теорема 2. *Нехай функції* $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)$ *обмежені на* $\mathbf{R}\times[0;T]$, $x=\varphi_j(t)$, $t\in[0;T]$, $j=\overline{1,m}$, *— такі нескінченно диференційовні функції, що* $\varphi_k(0)=0$, $k=\overline{1,m}$, *і виконуються умови* (20) – (22) *та умови леми* 1. *Тоді функція*

$$Y_0(x,t,\varepsilon)=u_0(x,t)+V_0\left(t,\frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon},\frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon},\ldots,\frac{x-\varphi_m(t)}{\varepsilon}\right), \tag{46}$$

задовольняє співвідношення (15) *з точністю* $O(\varepsilon)$.

Доведення. Підставимо функцію $Y_0 = Y_0(x,t,\varepsilon)$ у рівняння (8) і домножимо отриманий вираз на ε. Враховуючи рівняння (16) для $u_0 = u_0(x,t)$ і (18) для $V_0 = V_0\left(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m\right)$, в околі довільної кривої $x = \varphi_s(t)$, $s = \overline{1,m}$, знаходимо

$$\varepsilon\left(\varepsilon^2\frac{\partial^3 Y_0}{\partial x^3} - a(x,t,\varepsilon)\frac{\partial Y_0}{\partial t} - b(x,t,\varepsilon)Y_0\,\frac{\partial Y_0}{\partial x}\right) =$$

$$= \varepsilon^3\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \varepsilon a(x,t,\varepsilon)\frac{\partial u_0}{\partial t} - \varepsilon a(x,t,\varepsilon)\frac{\partial V_0}{\partial t} - \varepsilon b(x,t,\varepsilon)(u_0+V_0)\frac{\partial u_0}{\partial x} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\overline{a}(x,t,\varepsilon)\varphi_k' - \overline{b}(x,t,\varepsilon)(u_0+V_0)\right)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k} -$$

$$+\left[(a_0(x,t) - a_0(\varphi_s(t),t))\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k}\right] -$$

$$-\left[(b_0(x,t)u_0(x,t) - b_0(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t))\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k}\right] -$$

$$-\left[(b_0(x,t) - b_0(\varphi_s(t),t))V_0\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k}\right] =$$

$$=: g_0(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)\Bigg|_{\tau_k=\frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon},k=\overline{1,m}} =: g_0(x,t,\varepsilon)\,, \tag{47}$$

де

$$\overline{a} = \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}a_k(x,t), \qquad \overline{b} = \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}b_k(x,t),$$

функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, та її частинні похідні за змінними t і τ_k, $k=\overline{1,m}$, обчислені при значеннях $\tau_k = \dfrac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}$, $k=\overline{1,m}$.

Встановимо асимптотичну оцінку функції $g_0 = g_0(x,t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ для всіх значень $x\in\mathbf{R}$, $t\in[0;T]$.

Розглянемо доданок у (47) вигляду

$$\left[(a_0(x,t) - a_0(\varphi_s(t),t))\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k}\right].$$

В околі кожної кривої $x=\varphi_s(t)$, $s=\overline{1,m}$, відповідно до умов (20) – (22) маємо

$$|a_0(x,t) - a_0(\varphi_s(t),t)| \le C_k|x-\varphi_k| \tag{48}$$

для довільних k, $s=\overline{1,m}$. Більш того, внаслідок обмеженості функцій $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)$ на множині $\mathbf{R}\times[0;T]$ існують такі сталі C_k, $k=\overline{1,m}$, що нерівність (48) виконується для всіх $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$.

Крім того, з умови $V_0 \in G_m^0$ випливає, що має місце співвідношення

$$\lim_{\tau_s \to \pm\infty} \tau_s^n f = 0, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad s = \overline{1, m},$$

де функція $f = \dfrac{\partial V_0}{\partial \tau_s}$, а отже, згідно з властивостями функцій із простору швидко спадних функцій S та просторів S_p, $p \geq 0$ [40, с. 88], функція $\dfrac{\partial V_0}{\partial \tau_s}$ належить простору швидко спадних функцій щодо змінної τ_s для всіх $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{s-1}, \tau_{s+1}, \ldots, \tau_m \in \mathbf{R}$.

Таким чином, існують такі сталі C_{0k}, $k = \overline{1, m}$, що

$$\left[(a_0(x,t) - a_0(\varphi_s(t), t)) \sum_{k=1}^{m} \varphi_k' \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k}\right] \leq \sum_{k=1}^{m} C_{0k}|x - \varphi_k(t)| \left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_k}\right| = \varepsilon \sum_{k=1}^{m} C_{0k}|\tau_k| \left|\frac{\partial V_0}{\partial \tau_k}\right| \leq C\varepsilon.$$

Аналогічні властивості мають місце і для інших доданків функції $g_0 = g_0(x, t, \varepsilon)$.

Враховуючи записані вище оцінки, переконуємося, що функція (46) задовольняє асимптотичну рівність (15) з точністю $O(\varepsilon)$.

Теорему 2 доведено.

Висновки. Розглянуто сингулярно збурене рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами. Запропоновано алгоритм побудови асимптотичних m-фазових солітоноподібних розв'язків даного рівняння, встановлено точність, з якою головний член асимптотики задовольняє це рівняння.

1. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Сов. радио, 1977. – 368 с.
2. *Scott-Russel J.* Report on waves // Repts Fourteenth Meeting Brit. Assoc. Adv. Sci. – London: John Murray, 1834. – P. 311 – 390.
3. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Phil. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
4. *Tappert F. D.* Improved Korteweg – de Vries equation for ion acoustic waves // Phys. Fluids. – 1975. – **15**. – P. 2446 – 2447.
5. *Kever H., Morikawa G. K.* Korteweg – de Vries equation for nonlinear hydromagnetic waves in a warm collision free plasma // Phys. Fluids. – 1969. – **12**. – P. 2090 – 2093.
6. *Zabusky N. J.* Solitons and energy transport in nonlinear lattices // Comput. Phys. Comm. – 1973. – **5**. – P. 1 – 10.
7. *Leibovich S.* Weakly nonlinear waves in rotating fluids // J. Fluid. Mech. – 1970. – **42**. – P. 803 – 822.
8. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
9. *Su C. S., Gardner C. S.* The Korteweg – de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg – de Vries equation and Burger's equation // J. Math. Phys. – 1969. – **10**. – P. 536 – 539.
10. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – **15**. – P. 240 – 243.
11. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095 – 1097.
12. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communs Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**, № 15. – P. 467 – 490. (Переклад рос. мовою: Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика. – 1969. – **13**, № 15. – С. 128 – 150.)
13. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега – де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 4. – С. 18 – 27.
14. *Lax P. D.* Periodic solutions of the Korteweg – de Vries equation // Lect. Appl. Math. – 1974. – **15**. – P. 467 – 490.

15. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега – де Фриза // Мат. сб. – 1974. – **95**, № 3. – С. 331 – 356.
16. *Новиков С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 3. – С. 54 – 66.
17. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* Обобщение метода обратной задачи теории рассеивания // Теор. и мат. физика. – 1976. – **27**, № 3. – С. 283 – 287.
18. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
19. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
20. *Солитоны* / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
21. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
22. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
23. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н.(мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-алгебраические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
24. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 696 с.
25. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 326 с.
26. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
27. *Dye J. M., Parker A.* An inverse scattering scheme for the regularized long-wave equation // J. Math. Phys. – 2000. – **41**, № 5. – P. 2889 – 2904.
28. *Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.* Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечные алгебры. – М.: Изд-во МЦНМО, 2005. – 112 с.
29. *Blacmore D., Prykarpatsky A. K., Samoylenko V. Hr.* Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. Spectral and symplectic integrability analysis. – Singapore: World Sci., 2011. – 564 p.
30. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), № 2. – С. 63 – 124.
31. *Maslov V. P., Omel'yanov G. A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: Amer. Math. Soc., 2001. – 243 p.
32. *Samoylenko Yul.* Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg – de Vries equation // Proc. Fifth Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Math. Phys.". – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2004. – **3**. – P. 1435 – 1441.
33. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – **58**, № 1. – С. 111 – 124.
34. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 1. – С. 122 – 132.
35. *Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малою дисперсією // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 336 – 337. – С. 170 – 177.
36. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 378 – 387.
37. *Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами (загальний випадок) // Мат. вісн. НТШ. – 2010. – **7**. – С. 227 – 242.
38. *Miura R. M.* The Korteweg – de Vries equation: a survey of results // SIAM Rev. – 1976. – **18**, № 3. – P. 412 – 459.
39. *de Kerf F.* Asymptotic analysis of a class of perturbed Korteweg – de Vries initial value problems. – Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1988. – **50**. – 180 p.
40. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.

Одержано 15.07.11,
після доопрацювання — 22.05.12