УДК 517.911

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ЩІЛЬНІСТЬ МНОЖИНИ ЗАДАЧ КОШІ З НЕЄДИНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ У МНОЖИНІ ВСІХ ЗАДАЧ КОШІ

We prove the following theorem: Let E be an arbitrary Banach space, G be an open set in the space $\mathbb{R}\times E$, and $f: G \to E$ be an arbitrary continuous mapping. Then, for an arbitrary point $(t_0, x_0) \in G$ and an arbitrary number $\varepsilon > 0$, there exists a continuous mapping $g\colon G \to E$ such that

$$\sup_{(t,x)\in G} \|g(t,x) - f(t,x)\| \leqslant \varepsilon$$

and the Cauchy problem

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(t, z(t)),\ z(t_0) = x_0$$

has more than one solution.

Доказана следующая теорема. Пусть E — произвольное банахово пространство, G — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}\times E$ и $f: G \to E$ — произвольное непрерывное отображение. Тогда для произвольных точки $(t_0, x_0) \in G$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое непрерывное отображение $g\colon G \to E$, что

$$\sup_{(t,x)\in G} \|g(t,x) - f(t,x)\| \leqslant \varepsilon$$

и задача Коши

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(t, z(t)),\ z(t_0) = x_0$$

имеет более чем одно решение.

Нехай E — довільний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, G — область у просторі $\mathbb{R}\times E$ і $f\colon G \to E$ — неперервне відображення.

Зафіксуємо довільну точку $(t_0, x_0) \in G$ і розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Для цієї задачі важливим є наступне твердження.

Теорема 1 (Пеано). *При виконанні наведених умов у випадку скінченновимірного простору E задача Коші* (1) *має хоча б один розв'язок.*

Доведення цієї теореми або її окремих випадків містяться в багатьох книгах із теорії звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [1–4]).

Зазначимо, що в теоремі Пеано вимога скінченної розмірності простору E є суттєвою, що підтверджується наступним твердженням.

Теорема 2 [5]. *Кожний банахів простір, в якому справджується теорема Пеано, є скінченновимірним.*

Згідно з цією теоремою для кожного нескінченновимірного банахового простору E існують неперервне відображення $f\colon G \to E$ і точка $(t_0, x_0) \in G$, для яких задача Коші (1) не має жодного розв'язку (таке відображення наведено в [5]). Те, що існують банахові простори, в яких теорема Пеано є хибною, показав у 1950 р. Ж. Дьєдонне [6] (таку властивість має простір c_0).

Аналог теореми Годунова справджується і для довільного ненормованого простору Фреше, що показано С. Г. Лобановим [7] і С. А. Шкаріним [8]. Сильніший результат встановлено у статті С. Г. Лобанова і О. Г. Смолянова [9], де показано, що для довільного ненормованого простору Фреше E існує таке неперервне відображення $f\colon E \to E$, що рівняння $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ не має розв'язків.

Таким чином, прикладів задач Коші без розв'язків є достатньо багато. Автором було показано, що *у випадку нескінченновимірного банахового простору E множина задач Коші* (1) *з порожньою множиною розв'язків є щільною у множині всіх задач Коші* [10]. Справедливим є таке твердження.

Теорема 3 [10]. *Нехай E і $f\colon \mathbb{R}\times E \to E$ — довільні нескінченновимірний банахів простір і неперервне відображення відповідно.*

Тоді для довільних точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times E$ і числа $\varepsilon > 0$ існує таке неперервне відображення $g : \mathbb{R}\times E \to E$, що

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times E} \|g(t,x) - f(t,x)\| \leqslant \varepsilon$$

і задача

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(t, z(t)), \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad z(t_0) = z_0$$

не має жодного розв'язку для кожного $\delta > 0$.

У цій теоремі множину $\mathbb{R}\times E$ можна замінити областю G.

Зазначимо, що у випадку виконання умов теореми Пеано задача Коші може мати неєдиний розв'язок, що підтверджується наступним відомим прикладом.

Приклад. Розв'язками задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$$

є функції

$$x = 0,$$

$$x = \begin{cases} -4^{-1}(t - c_1)^2, & \text{якщо} \quad t < c_1, \\ 0, & \text{якщо} \quad t \geqslant c_1, \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t < c_2, \\ 4^{-1}(t - c_2)^2, & \text{якщо} \quad t \geqslant c_2, \end{cases}$$

і

$$x = \begin{cases} -4^{-1}(t - c_1)^2, & \text{якщо} \quad t < c_1, \\ 0, & \text{якщо} \quad c_1 \leqslant t \leqslant c_2, \\ 4^{-1}(t - c_2)^2, & \text{якщо} \quad t > c_2, \end{cases}$$

де c_1 і c_2 — довільні числа із проміжків $(-\infty, 0]$ і $[0, +\infty)$ відповідно.

Зауважимо, що якщо задача Коші має більше ніж один розв'язок, то у випадку скінченновимірного простору E вона має незліченну множину розв'язків (див. теорему Кнезера [3, с. 28 – 30; 11]).

Задачі Коші з неєдиними розв'язками не є рідкістю. *Такі задачі утворюють множину, що є щільною у множині всіх задач Коші*. Це ми покажемо далі у випадку довільного банахового простору E.

Основним результатом цієї статті є наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай G — область у просторі $\mathbb{R} \times E$ і $f: G \to E$ — довільне неперервне відображення (банахів простір E може мати довільну розмірність).*

Тоді для довільних точки $(t_0, x_0) \in G$ і числа $\varepsilon > 0$ існує таке неперервне відображення $g: G \to E$, що

$$\sup_{(t,x)\in G} \|g(t,x) - f(t,x)\| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

і задача Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

має більше ніж один розв'язок.

Зазначимо, що у випадку $E = \mathbb{R}$ аналогічне твердження міститься у статті А. Бека [12] (теорема 5.1), де побудовано, зокрема, приклад рівняння, що має континуум різних скрізь визначених еволюційних (розв'язуючих) відображень, кожне з яких є неперервним.

При доведенні теореми 4 використаємо приклад неєдиності Ф. Хартмана [3, с. 31 – 35; 13]. Ф. Хартманом побудовано неперервну функцію $U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таку, що для кожної точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ задача Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = U(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

має більше ніж один розв'язок на кожному із відрізків $[t_0, t_0 + \gamma]$ і $[t_0 - \gamma, t_0]$ при довільному $\gamma > 0$.

Очевидно, що аналогічну властивість має і задача Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = U(t + \alpha, x(t) + \beta), \quad x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

для довільних дійсних чисел α і β.

Перший приклад такого типу запропоновано М. А. Лаврентьєвим [14].

***Доведеня теореми* 4.** Спочатку розглянемо випадок, коли банахів простір E є дійсним і $\dim E \geqslant 2$.

Зафіксуємо довільний нормований вектор $a \in E$. Розглянемо підпростір $E_1 = \{ta\colon t \in \mathbb{R}\}$ простору E. Оскільки підпростір E_1 скінченновимірний ($\dim E_1 = 1$), то підпростір E_1 має пряме доповнення [15, с. 100], тобто існує такий підпростір E_2 простору E, що $E = E_1 \oplus E_2$. Нехай P_1 — оператор проектування на E_1 паралельно E_2 і P_2 — оператор проектування на E_2 паралельно E_1 [16, с. 33].

Розглянемо дійсні числа $x_{0,1}$ і $f_1(t_0, x_0)$, що визначаються рівностями

$$P_1 x_0 = x_{0,1} a$$

і

$$P_1 f(t_0, x_0) = f_1(t_0, x_0) a. \tag{6}$$

Нехай δ_1, δ_2 і δ_3 — такі дійсні числа, що

$$|\delta_1| < \varepsilon, \tag{7}$$

$$f_1(t_0, x_0) + \delta_1 \neq 0$$

і

$$U(t_0 + \delta_2, x_{0,1} + \delta_3) \neq 0,$$

де U — функція, що й у задачі Коші (4). Розглянемо число

$$k = \frac{f_1(t_0, x_0) + \delta_1}{U(t_0 + \delta_2, x_{0,1} + \delta_3)} \tag{8}$$

і неперервну функцію

$$q_r(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |t - t_0| + \|x - x_0\| \leqslant r, \\ 2 - \dfrac{|t - t_0| + \|x - x_0\|}{r}, & \text{якщо} \quad r < |t - t_0| + \|x - x_0\| < 2r, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t - t_0| + \|x - x_0\| \geqslant 2r, \end{cases}$$

де $r \in (0, +\infty)$.

Визначимо неперервне відображення $g\colon G \to E$ за допомогою рівностей

$$P_1 g(t,x) = q_r(t,x) k U(t_0 + \delta_2 + k(t - t_0), x_1 + \delta_3) a + (1 - q_r(t,x)) P_1 f(t,x)$$

і

$$P_2 g(t,x) = q_r(t,x) P_2 f(t_0, x_0) + (1 - q_r(t,x)) P_2 f(t,x),$$

де x_1 — таке дійсне число, що

$$P_1 x = x_1 a.$$

Із цих рівностей, (6) і (8) випливає

$$P_1(g(t,x) - f(t,x)) = q_r(t,x)(kU(t_0 + \delta_2 + k(t - t_0), x_1 + \delta_3)a - P_1 f(t,x)) =$$

$$= q_r(t,x)\left(\frac{f_1(t_0,x_0) + \delta_1}{U(t_0 + \delta_2, x_{0,1} + \delta_3)} U(t_0 + \delta_2 + k(t - t_0), x_1 + \delta_3)a - P_1 f(t,x)\right) =$$

$$= q_r(t,x)\left((f_1(t_0,x_0) + \delta_1)\left(\frac{U(t_0 + \delta_2 + k(t - t_0), x_1 + \delta_3)}{U(t_0 + \delta_2, x_{0,1} + \delta_3)} - 1\right) + \delta_1\right) a +$$

$$+ q_r(t,x) P_1(f(t_0,x_0) - f(t,x))$$

і

$$P_2(g(t,x) - f(t,x)) = q_r(t,x) P_2(f(t_0,x_0) - f(t,x)).$$

Тому

$$g(t,x) - f(t,x) = P_1(g(t,x) - f(t,x)) + P_2(g(t,x) - f(t,x)) =$$

$$= q_r(t,x)\left((f_1(t_0,x_0) + \delta_1)\left(\frac{U(t_0 + \delta_2 + k(t - t_0), x_1 + \delta_3)}{U(t_0 + \delta_2, x_{0,1} + \delta_3)} - 1\right) + \delta_1\right) a +$$

$$+q_r(t,x)(f(t_0,x_0)-f(t,x)),$$

оскільки P_1+P_2 — одиничний оператор.

Отже,

$$\|g(t,x)-f(t,x)\| \leqslant$$

$$\leqslant q_r(t,x)\left(|f_1(t_0,x_0)+\delta_1|\left|\frac{U(t_0+\delta_2+k(t-t_0),x_1+\delta_3)}{U(t_0+\delta_2,x_{0,1}+\delta_3)}-1\right|+|\delta_1|\right)+$$

$$+q_r(t,x)\|f(t_0,x_0)-f(t,x)\|.$$

Звідси, з означення $q_r(t,x)$, нерівності (7) та з неперервності f і U випливає, що виконується співвідношення (2) для всіх $r\in(0,r^*]$, де r^* — достатньо мале додатне число. Будемо вважати, що число r^* є настільки малим, що відкрита куля

$$B((t_0,x_0),r^*)=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times E: |t-t_0|+\|x-x_0\|<r^*\}$$

є підмножиною області G.

Далі для побудованого відображення $g\colon G\to E$ при $r=r^*$ розглянемо задачу Коші (3). Цю задачу на кулі $B((t_0,x_0),r^*)$ можна подати у вигляді

$$\begin{gathered}\frac{dx_1(t)}{dt}\,a=kU(t_0+\delta_2+k(t-t_0),x_1(t)+\delta_3)\,a,\qquad x_1(t_0)=x_{0,1},\\ \frac{dP_2x(t)}{dt}=P_2f(t_0,x_0),\qquad P_2x(t_0)=P_2x_0,\end{gathered}\tag{9}$$

де $x_1(t)$ — функція зі значеннями в $\mathbb{R}$, для якої $P_1x(t)=x_1(t)a$. Використаємо нову змінну $\tau=t_0+k(t-t_0)$. Враховуючи, що $t=t_0+k^{-1}(\tau-t_0)$, отримуємо, що задача Коші (9) по відношенню до нових функцій

$$w_1(\tau)=x_1(t_0+k^{-1}(\tau-t_0))\tag{10}$$

і

$$w_2(\tau)=P_2x(t_0+k^{-1}(\tau-t_0))\tag{11}$$

має вигляд

$$\begin{gathered}\frac{dw_1(\tau)}{d\tau}\,a=U(\tau+\delta_2,w_1(\tau)+\delta_3)\,a,\quad w_1(t_0)=x_{0,1},\\ \frac{dw_2(\tau)}{d\tau}=k^{-1}P_2f(t_0,x_0),\quad w_2(t_0)=P_2x_0.\end{gathered}\tag{12}$$

Перше рівняння задачі (12) для кожного достатньо малого числа $\gamma>0$ має на кожному із відрізків $[t_0,t_0+\gamma]$ і $[t_0-\gamma,t_0]$ більше ніж один розв'язок, оскільки $a\neq 0$ і аналогічну властивість має задача (5). Друге рівняння задачі (12), очевидно, для кожного достатньо малого числа $\gamma>0$ має єдиний розв'язок $w_2(\tau)=P_2x_0+(\tau-t_0)k^{-1}P_2f(t_0,x_0)$ на відрізку $[t_0-\gamma,t_0+\gamma]$. Тому згідно з (10) і (11) задача Коші (9) для кожного достатньо малого числа $\gamma>0$ має на кожному із відрізків $[t_0,t_0+\gamma]$ і $[t_0-\gamma,t_0]$ більше ніж один розв'язок.

Отже, задача Коші (3) має більше ніж один розв'язок.

Таким чином, у випадку дійсного простору E і $\dim E \geqslant 2$ теорему 4 доведено.

Розглянемо випадок комплексного простору E, для якого $\dim E \geqslant 1$. У цьому випадку можна використати декомплексифікацію простору E [17, с. 17, 18]. Тоді задача (3) в комплексному просторі E рівносильна аналогічній задачі в деякому дійсному просторі $\hat{E}$, розмірність якого не менша 2. Тому можна скористатися розглянутим вище випадком дійсного простору.

Якщо простір E дійсний і $\dim E = 1$, то доведення теореми суттєво спрощується (у наведених вище міркуваннях потрібно вважати, що $E_1 = E$). Доведення теореми у цьому випадку з використанням прикладу неєдиності Ф. Хартмана наведено у [18].

Теорему 4 доведено.

1. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.
2. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
5. *Годунов А. Н.* О теореме Пеано в банаховых пространствах // Функцион. анализ и его прил. – 1975. – **9**, вып. 1. – P. 59 – 60.
6. *Dieudonné J.* Deux exemples singuliers d'équvations différentielles // Acta. Sci. Math. – 1950. – **12**, Pt B. – P. 38 – 40.
7. *Лобанов С. Г.* Теорема Пеано неверна для любого бесконечномерного пространства Фреше // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 2. – P. 83 – 86.
8. *Шкарин С. А.* Об одной проблеме О. Г. Смолянова, связанной с бесконечномерной теоремой Пеано // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 6. – С. 1092.
9. *Лобанов С. Г., Смолянов О. Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, вып 3 (297). – С. 93 – 168.
10. *Слюсарчук В. Е.* Плотность множества неразрешимых задач Коши во множестве всех задач Коши в случае бесконечномерного банахова пространства // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, № 1. – С. 86 – 89.
11. *Kneser H.* Ueber die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen das der Lipschitzschen Begingung nicht genügt // S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. – 1923. – P. 171 – 174.
12. *Beck A.* Uniqueness of flow solutions of differential equations // Lect. Notes Math. – 1973. – **318**. – P. 30 – 50.
13. *Hartman P.* A differential equation with nonunique solutions // Amer. Math. Monthly. – 1963. – **70**. – P. 255 – 259.
14. *Lavrentjev M. A.* Sur une équation différentielle du premier ordre // Math. Z. – 1925. – **23**. – S. 197 – 209.
15. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
16. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
17. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
18. *Слюсарчук В. Ю.* Задача Коші з неєдиними розв'язками // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2011. – **1**, № 4. – P. 117 – 118.

Одержано 30.12.10,
після доопрацювання — 12.03.12