УДК 517.5

**В. Ф. Бабенко** (Днепропетр. нац. ун-т; Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
**Т. Ю. Лескевич** (Днепропетр. нац. ун-т)

# ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

We determine the exact values of upper bounds of the error of approximation by harmonic splines for functions $u$ defined on an $n$-dimensional parallelepiped $\Omega$ for which $\|\Delta u\|_{L_\infty(\Omega)} \le 1$ and for functions $u$ defined on $\Omega$ for which $\|\Delta u\|_{L_p(\Omega)} \le 1$, $1 \le p \le \infty$. In the first case, the error is estimated in $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$; in the second case, it is estimated in $L_1(\Omega)$.

Знайдено точні значення верхніх меж похибок наближення гармонічними сплайнами заданих на $n$-вимірному паралелепіпеді $\Omega$ функцій $u$ таких, що $\|\Delta u\|_{L_\infty(\Omega)} \le 1$, у просторах $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, та функцій $u$ таких, що $\|\Delta u\|_{L_p(\Omega)} \le 1$, у просторі $L_1(\Omega)$.

**1. Введение.** В пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ рассмотрим параллелепипед $\Omega = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, $a_i < b_i$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $\partial\Omega$ — граница $\Omega$, а $\Omega^\circ$ — его внутренность. Через $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, будем обозначать пространство измеримых, интегрируемых в $p$-й степени (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left( \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \text{ess sup}\{|u(x)| \colon x \in \Omega\}, & p = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Как обычно, везде ниже $p'$ обозначает сопряженный показатель, т. е. $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Через $C(\Omega)$ будем обозначать пространство непрерывных функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max\{|u(x)| \colon x \in \Omega\}.$$

Сплайн-функции занимают важное место в теории аппроксимации функций одной и многих переменных. К числу простейших сплайнов относятся кусочно-линейные функции (ломаные в случае функций одной переменной). Приведем два результата об аппроксимации некоторых классов функций одной переменной интерполяционными ломаными.

Пусть $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, — разбиение отрезка $[a, b]$. Обозначим через $S_P(u; x)$ кусочно-линейную функцию с узлами в точках разбиения $P$, интерполирующую функцию $u$ в точках из $P$. Пусть также $h_k = h_k(P) = x_{k+1} - x_k$ для $k = \overline{0, N-1}$ и $h = h(P) = \max\{h_k \colon 0 \le k \le N-1\}$ — параметр разбиения $P$. Через $\mathcal{P}_N$ будем обозначать совокупность всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ на $N$ частей.

Через $W_p^2([a, b])$ обозначим класс функций $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, что $u'$ абсолютно непрерывна и $\|u''\|_{L_p([a,b])} \le 1$. Для $1 \le p, q \le \infty$ и заданного разбиения $P \in \mathcal{P}_N$ положим

$$\mathcal{E}_P \left( W_p^2([a, b]) \right)_{L_q([a,b])} = \sup_{u \in W_p^2([a,b])} \|u(\cdot) - S_P(u; \cdot)\|_{L_q([a,b])}.$$

Пусть также

$$\mathcal{E}_N\left(W_p^2([a,b])\right)_{L_q([a,b])} = \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \mathcal{E}_P\left(W_p^2([a,b])\right)_{L_q([a,b])}.$$

Для $k=\overline{0,N-1}$ положим

$$G_k(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(x_{k+1}-x)(t-x_k)}{x_{k+1}-x_k}, & t\in[x_k,x],\\[2mm] \dfrac{(x_{k+1}-t)(x-x_k)}{x_{k+1}-x_k}, & t\in[x,x_{k+1}]. \end{cases}$$

Пусть $F_1(x)=\dfrac{x^2}{2}$ и $M_{1,p}=\left(\dfrac{\Gamma^2(p+1)}{\Gamma(2p+2)}\right)^{1/p}$, $1\le p<\infty$.

Отметим, что для $x\in(x_k,x_{k+1})$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_k(x,t)dt = \frac{(x-x_k)(x_{k+1}-x)}{2} = \left|F_1(x)-S_P(F_1;x)\right|$$

и для $q\in[1,\infty]$

$$\left\|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_k(x,t)dt\right\|_{L_q([x_k,x_{k+1}])} = \|F_1(\cdot)-S_P(F_1;\cdot)\|_{L_q([x_k,x_{k+1}])} = \frac{M_{1,q}}{2}h_k^{2+(1/q)}.$$

**Теорема A.** *Пусть $q\in[1,\infty]$ и $N\in\mathbb{N}$. Тогда для любого разбиения $P\in\mathcal{P}_N$*

$$\mathcal{E}_P\left(W_\infty^2([a,b])\right)_{L_q([a,b])} = \|F_1(\cdot)-S_P(F_1;\cdot)\|_{L_q([a,b])} = \frac{M_{1,q}}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} h_k^{2q+1}\right)^{1/q}, \tag{2}$$

*если $q<\infty$, и*

$$\mathcal{E}_P\left(W_\infty^2([a,b])\right)_{L_\infty([a,b])} = \|F_1(\cdot)-S_P(F_1;\cdot)\|_{L_\infty([a,b])} = \frac{h^2}{8}. \tag{3}$$

**Теорема B.** *Пусть $p\in[1,\infty]$ и $N\in\mathbb{N}$. Тогда для любого разбиения $P\in\mathcal{P}_N$*

$$\mathcal{E}_P\left(W_p^2([a,b])\right)_{L_1([a,b])} = \|F_1(\cdot)-S_P(F_1;\cdot)\|_{L_{p'}([a,b])} = \frac{M_{1,p'}}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} h_k^{2p'+1}\right)^{1/p'}, \tag{4}$$

*если $p>1$, и*

$$\mathcal{E}_P\left(W_1^2([a,b])\right)_{L_1([a,b])} = \|F_1(\cdot)-S_P(F_1;\cdot)\|_{L_\infty([a,b])} = \frac{h^2}{8}. \tag{5}$$

***Замечание* 1.** Равномерное разбиение $h_0=h_1=\ldots=h_{N-1}=h$ доставляет минимум правым частям соотношений (2)–(5), и результаты теорем A и B в этом случае будут иметь вид

$$\mathcal{E}_N\left(W_\infty^2([a,b])\right)_{L_q([a,b])} = \frac{M_{1,q}}{2}\frac{(b-a)^{2+(1/q)}}{N^2}, \quad 1\le q<\infty,$$

$$\mathcal{E}_N\left(W_p^2([a,b])\right)_{L_1([a,b])} = \frac{M_{1,p'}}{2}\frac{(b-a)^{2+(1/p')}}{N^2}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$\mathcal{E}_N\left(W_\infty^2([a,b])\right)_{L_\infty([a,b])} = \mathcal{E}_N\left(W_1^2([a,b])\right)_{L_1([a,b])} = \frac{(b-a)^2}{8N^2}.$$

Соотношения (2) – (5) хорошо известны (см., например, [1, 2], гл. 4, 7), однако мы приведем такие их доказательства, которые смогут послужить основой для обобщения результатов теорем А и В на случай аппроксимации классов функций многих переменных кусочно-гармоническими функциями.

В обоих случаях будем использовать следующее интегральное представление для $u \in W_p^2([a,b])$, $1 \le p \le \infty$ : если $x \in [x_k, x_{k+1}]$, то

$$u(x) = u(x_k)\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} + u(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_k(x,t)u''(t)dt =$$

$$= u(x_k)\frac{\partial G_k}{\partial t}(x,x_k) - u(x_{k+1})\frac{\partial G_k}{\partial t}(x,x_{k+1}) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_k(x,t)u''(t)dt. \tag{6}$$

Используя (6) и учитывая, что

$$S_P(u;x) = u(x_k)\frac{\partial G_k}{\partial t}(x,x_k) - u(x_{k+1})\frac{\partial G_k}{\partial t}(x,x_{k+1}), \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

для $u \in W_\infty^2([a,b])$ при любом $k$ и любом $x \in [x_k, x_{k+1}]$ получаем

$$u(x) - S_P(u;x) = -\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_k(x,t)u''(t)dt, \tag{7}$$

так что

$$|u(x) - S_P(u;x)| = \left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_k(x,t)u''(t)dt\right| \le \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_k(x,t)dt = |F_1(x) - S_P(F_1;x)|.$$

Таким образом, для любого $q \in [1,\infty)$

$$\mathcal{E}_P\left(W_\infty^2([a,b])\right)_{L_q([a,b])} \le \|F_1(\cdot) - S_P(F_1;\cdot)\|_{L_q([a,b])} = \frac{M_{1,q}}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} h_k^{2q+1}\right)^{1/q}.$$

В случае $q = \infty$

$$\mathcal{E}_P\left(W_\infty^2([a,b])\right)_{L_\infty([a,b])} \le \|F_1(\cdot) - S_P(F_1;\cdot)\|_{L_\infty([a,b])} = \max_{0\le k\le N-1}\frac{h_k^2}{8} = \frac{h^2}{8}.$$

Так как $F_1 \in W_\infty^2([a,b])$, для любого $q \in [1,\infty]$ получаем

$$\mathcal{E}_P\left(W_\infty^2([a,b])\right)_{L_q([a,b])} = \|F_1(\cdot) - S_P(F_1;\cdot)\|_{L_q([a,b])}.$$

Соотношения (2) и (3) доказаны.

Соотношение (4) в случае $p = \infty$ содержится в теореме A. Для доказательства (4) в случае $1 \le p < \infty$ запишем для $u \in W_p^2([a,b])$ (снова с учетом (7))

$$\|u(\cdot) - S_P(u;\cdot)\|_{L_1([a,b])} = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u''(t) G_k(x,t)dt \right| dx \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |u''(t)| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_k(x,t)dxdt = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |u''(t)||F_1(t) - S_P(F_1;t)|dt. \tag{8}$$

Отсюда в случае $p > 1$ получаем

$$\|u(\cdot) - S_P(u;\cdot)\|_{L_1([a,b])} \le \sum_{k=0}^{N-1} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |u''(t)|^p dt \right)^{1/p} \left( \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |F_1(t) - S_P(F_1;t)|^{p'} dt \right)^{1/p'} \le$$

$$\le \|u''\|_{L_p([a,b])} \|F_1(\cdot) - S_P(F_1;\cdot)\|_{L_{p'}([a,b])}.$$

В случае $p = 1$ оценку (8) продолжим следующим образом:

$$\left\|u(\cdot) - S_P(u;\cdot)\right\|_{L_1([a,b])} \le \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |u''(t)||F_1(t) - S_P(F_1;t)|dt \le$$

$$\le \max_{0\le k\le N-1} \max_{t\in[x_k,x_{k+1}]} |F_1(t) - S_P(F_1;t)| \|u''\|_{L_1([a,b])} \le \max_{0\le k\le N-1} \frac{h_k^2}{8} = \frac{h^2}{8}.$$

На доказательстве точности равенств (4) и (5) мы не останавливаемся.

Естественными многомерными обобщениями кусочно-линейных функций являются кусочно-аффинные функции, порожденные заданной триангуляцией области определения (ряд точных результатов по аппроксимации классов функций многих переменных такими функциями можно найти в [3 – 6], кусочно-полилинейные функции (некоторые результаты см. в [7 – 12]) и, наконец, кусочно-гармонические функции. Направление, связанное с кусочно-гармонической аппроксимацией, активно развивается в течение последних десятилетий (см., например, [13, 14]), в частности, в связи с методом конечных элементов [15].

В данной статье получены точные результаты по аппроксимации кусочно-гармоническими функциями класса функций $u$, заданных на $n$-мерном параллелепипеде $\Omega$ и таких, что $\|\Delta u\|_{L_\infty(\Omega)} \le 1$, где $\Delta$ — оператор Лапласа, в метрике пространств $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$ (эти результаты уточняют и обобщают результаты работы [13]), а также класса функций $u$ таких, что $\|\Delta u\|_{L_p(\Omega)} \le 1$, в метрике пространства $L_1(\Omega)$.

**2. Гармонические сплайны**. Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $a_i < b_i$, $i = \overline{1,n}$, $n \ge 2$. Отрезки $[a_i, b_i]$ разобьем на части точками $a_i = x_i^0 < x_i^1 < \ldots < x_i^{N_i} = b_i$. Для $j = (j_1, \ldots, j_n)$, $j_i \in \{0, \ldots, N_i - 1\}$, положим $\Omega_j = \prod_{i=1}^n [x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}]$. Пусть также $N = (N_1, \ldots, N_n)$. Ясно, что $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$, причем множества (параллелепипеды) $\Omega_{j'}$ и $\Omega_{j''}$ при $j' \ne j''$ не имеют общих внутренних точек. Совокупность $\{\Omega_j\}$ множеств $\Omega_j$ будем называть разбиением параллелепипеда $\Omega$ и обозначать через $P$. Совокупность всевозможных разбиений параллелепипеда $\Omega$, порожденных разбиениями отрезков $[a_i, b_i]$ на $N_i$, $i = \overline{1, n}$, частей, будем обозначать через $\mathcal{P}_N$.

Как обычно, через $\Delta$ будем обозначать оператор Лапласа, т. е.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Для $1 \le p \le \infty$ через $W_p^{\Delta}(\Omega)$ обозначим следующий класс функций:

$$W_p^{\Delta}(\Omega) = \left\{u \in C^2(\Omega^\circ) \cap C^1(\Omega) \colon \|\Delta u\|_{L_p(\Omega)} \le 1\right\},$$

где $C^1(\Omega)$ — множество непрерывно дифференцируемых на $\Omega$ функций, а $C^2(\Omega^\circ)$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых в области $\Omega^\circ$ функций.

Пусть заданы вектор $N = (N_1, \ldots, N_n)$ и разбиение $P \in \mathcal{P}_N$. Каждой функции $u \in W_p^{\Delta}(\Omega)$ сопоставим кусочно-гармоническую функцию (гармонический сплайн) $S_P^n$, положив для любого $j$

$$S_P^n(u; x) = u_{\Omega_j}(x), \quad x \in \Omega_j,$$

где функция $u_{\Omega_j}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_{\Omega_j}(x) = 0, \quad x \in \Omega_j^\circ, \tag{9}$$

и краевому условию

$$u_{\Omega_j}(x) = u(x), \quad x \in \partial\Omega_j. \tag{10}$$

Как известно (см., например, [16, с. 130]), краевая задача (9), (10) однозначно разрешима. Ясно также, что функция $S_P^n(u; x)$ принадлежит $C(\Omega)$. Заметим, что введенные в пункте 1 сплайны $S_P$ можно рассматривать как сплайны $S_P^1$.

Положим

$$F_n(x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{11}$$

Ясно, что $F_n(x) \in W_\infty^{\Delta}(\Omega)$.

Как известно (см., например, [16, 17]), для любого $j$ функция $u \in C^2(\Omega_j^\circ) \cap C^1(\Omega_j)$ может быть представлена в виде

$$u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega_j} \frac{\partial G_{\Omega_j}(x; y')}{\partial n_{y'}} u(y') dy' - \int\limits_{\Omega_j} G_{\Omega_j}(x; y) \Delta u(y) dy, \quad x \in \Omega_j^\circ, \tag{12}$$

где $G_{\Omega_j}(x; y)$ — функция Грина области $\Omega_j^\circ$, а $\dfrac{\partial G_{\Omega_j}(x; y')}{\partial n_{y'}}$ — ее производная по направлению внешней нормали $n_{y'}$ к поверхности $\partial\Omega_j$ в точке $y'$.

Из представления (12), в частности, следует, что решение задачи (9), (10) можно записать следующим образом:

$$u_{\Omega_j}(x) = -\int\limits_{\partial\Omega_j} \frac{\partial G_{\Omega_j}(x;y')}{\partial n_{y'}} u(y')dy'. \tag{13}$$

Комбинируя равенства (12), (13), получаем

$$u(x) - u_{\Omega_j}(x) = -\int\limits_{\Omega_j} G_{\Omega_j}(x;y)\Delta u(y)dy, \quad x \in \Omega_j. \tag{14}$$

Отметим, что если $u(x) = F_n(x)$, то для любых $y \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega_j$ из (14) получим

$$F_n(x) - S_P^n(F_n;x) = F_n(x-y) - S_P^n(F_n(\cdot - y);x) = -\int\limits_{\Omega_j} G_{\Omega_j}(x;y)dy. \tag{15}$$

Для $1 \leq p,\, q \leq \infty$ и заданного разбиения $P \in \mathcal{P}_N$ положим

$$\mathcal{E}_P(W_p^\Delta(\Omega))_{L_q(\Omega)} = \sup_{u \in W_p^\Delta(\Omega)} \left\| u(\cdot) - S_P^n(u;\cdot) \right\|_{L_q(\Omega)}.$$

Цель данной работы состоит в вычислении величин $\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_q(\Omega)}$, $1 \leq q \leq \infty$, и $\mathcal{E}_P(W_p^\Delta(\Omega))_{L_1(\Omega)}$, $1 \leq p \leq \infty$. Полученные результаты можно рассматривать как многомерные обобщения теорем A и B, а также как обобщение и уточнение относящихся к случаю $n = 2$ результатов работы В. Т. Клименко [13]. Приведем эти результаты, использовав обозначения, близкие к обозначениям работы [13] и приспособленные к двумерному случаю. Точки прямоугольника $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ будем обозначать через $(x, y)$ и $(\xi, \eta)$. Прямоугольники, на которые разбивается прямоугольник $\Omega$ для определения гармонических сплайнов, будем обозначать через $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Пусть еще $l_i = x_{i+1} - x_i$, $h_j = y_{j+1} - y_j$, $i = \overline{0, N_1 - 1}$, $j = \overline{0, N_2 - 1}$, $N = (N_1, N_2)$, $\alpha_{ki} = k\pi/l_i$, $\beta_{kj} = k\pi/h_j$ и

$$J(s-t) := \begin{cases} 1, & t \leq s, \\ 0, & t > s, \end{cases}$$

— функция Хевисайда. Нам понадобятся следующие явные выражения для функций Грина прямоугольников $\Omega_{ij}^\circ$ :

$$G^1_{\Omega_{ij}}(x,y;\xi,\eta) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\mathrm{sh}(\alpha_{ki}h_j)} \left(J(y-\eta)\,\mathrm{sh}(\alpha_{ki}(y-y_{j+1}))\,\mathrm{sh}(\alpha_{ki}(\eta-y_i)) + \right.$$

$$\left. + J(\eta-y)\,\mathrm{sh}(\alpha_{ki}(y-y_j))\,\mathrm{sh}(\alpha_{ki}(\eta-y_{j+1}))\right)\sin(\alpha_{ki}(x-x_i))\sin(\alpha_{ki}(\xi-x_i)), \tag{16}$$

$$G^2_{\Omega_{ij}}(x,y;\xi,\eta) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\mathrm{sh}(\beta_{ki}l_i)} \left(J(x-\xi)\,\mathrm{sh}(\beta_{ki}(x-x_{i+1}))\,\mathrm{sh}(\beta_{ki}(\xi-x_i)) + \right.$$

$$\left. + J(\xi-x)\,\mathrm{sh}(\beta_{ki}(x-x_i))\,\mathrm{sh}(\beta_{ki}(\xi-x_{i+1}))\right)\sin(\beta_{ki}(y-y_j))\sin(\beta_{ki}(\eta-y_j)). \tag{17}$$

В [13] получены следующие оценки уклонения функций $u \in W_\infty^\Delta(\Omega)$ от гармонических сплайнов $S_P^2(u;x)$:

$$|u(x,y) - u_{\Omega_{ij}}(x,y)| \le \left( \frac{l_i^2}{8} - \frac{4l_i^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left(\frac{(2k+1)\pi h_j}{2l_i}\right)} \right) \max_{(x,y)\in\Omega_{ij}} |\Delta u(x,y)|,$$

$$|u(x,y) - u_{\Omega_{ij}}(x,y)| \le \left( \frac{h_j^2}{8} - \frac{4h_j^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left(\frac{(2k+1)\pi l_i}{2h_j}\right)} \right) \max_{(x,y)\in\Omega_{ij}} |\Delta u(x,y)|.$$

Поскольку $F_2 \in W_\infty^\Delta\big([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\big)$, нетрудно проверить, что приведенные оценки являются неулучшаемыми на классе $W_\infty^\Delta\big([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\big)$, т. е. фактически в [13] доказано, что

$$\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]))_{L_\infty(\Omega)} = \frac{l_i^2}{8} - \frac{4l_i^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left(\dfrac{(2k+1)\pi h_j}{2l_i}\right)}$$

и

$$\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]))_{L_\infty(\Omega)} = \frac{h_j^2}{8} - \frac{4h_j^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3 \operatorname{ch}\left(\dfrac{(2k+1)\pi l_i}{2h_j}\right)}.$$

**3. Вычисление величин $\boldsymbol{\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_q(\Omega)}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}_P(W_p^\Delta(\Omega))_{L_1(\Omega)}}$.**

**Теорема 1.** *Для любой функции $u \in W_\infty^\Delta(\Omega)$, любого разбиения $P \in \mathcal{P}_N$ и любого $x \in \Omega$*

$$|u(x) - S_P^n(u;x)| \le |F_n(x) - S_P^n(F_n;x)|, \tag{18}$$

*и, следовательно, для любого $1 \le q \le \infty$*

$$\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_q(\Omega)} = \|F_n(\cdot) - S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_q(\Omega)} = \left( \sum_j \| I_j(\cdot)\|_{L_q(\Omega_j)}^q \right)^{1/q}, \tag{19}$$

*где*

$$I_j(x) = \int_{\Omega_j} G_{\Omega_j}(x;y)dy.$$

***Замечание* 2.** Соотношение (19), конечно, непосредственно следует из соотношения (18). Более того, если мы соотношением (1) определим величину $\|\cdot\|_{L_q(\Omega)}$ и при $q \in (0,1)$, то эта величина перестанет быть нормой, однако величина $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}^q$ породит метрику в пространстве измеримых функций, для которых она конечна. При этом соотношение (19) останется очевидно справедливым и при $q \in (0,1)$. Оно также останется верным и для более общих метрик в пространстве измеримых функций.

***Замечание* 3.** Если мы положим

$$\|u\|_{L_0(\Omega)} := e^{\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \ln|u(x)|dx},$$

где $|\Omega|$ — объем $\Omega$, то в силу соотношения $\|u\|_{L_q(\Omega)} \to \|u\|_{L_0(\Omega)},\ q \to 0$, получим, что соотношение (19) остается справедливым и при $q = 0$.

***Замечание* 4.** В соотношении (19) $L_p(\Omega)$-норму, конечно, можно заменить любой монотонной нормой в пространстве измеримых функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

***Доказательство теоремы* 1.** Для произвольной функции $u(x) \in W^{\Delta}_{\infty}(\Omega)$ и произвольного параллелепипеда $\Omega_j$ разбиения $P$ с учетом соотношений (14), (15) и положительности функции Грина имеет место оценка

$$|u(x) - u_{\Omega_j}(x)| \le \int\limits_{\Omega_j} G_{\Omega_j}(x,y)dy = |F_n(x) - S^n_P(F_n;x)|, \quad x \in \Omega_j, \tag{20}$$

откуда следует, что для всех $x \in \Omega$

$$|u(x) - S^n_P(u;x)| \le |F_n(x) - S^n_P(F_n;x)|. \tag{21}$$

Из последнего неравенства непосредственно получаем, что при всех $q \in [1,\infty]$

$$\|u(\cdot) - S^n_P(u;\cdot)\|_{L_q(\Omega)} \le \|F_n(\cdot) - S^n_P(F_n;\cdot)\|_{L_q(\Omega)}.$$

Поскольку приведенная оценка справедлива для всех функций $u(x) \in W^{\Delta}_{\infty}(\Omega)$, то

$$\sup_{u \in W^{\Delta}_{\infty}(\Omega)} \|u(\cdot) - S^n_P(u;\cdot)\|_{L_q(\Omega)} \le \|F_n(\cdot) - S^n_P(F_n;\cdot)\|_{L_q(\Omega)}.$$

Так как функция $F_n(x)$ принадлежит классу $W^{\Delta}_{\infty}(\Omega)$, в последней оценке имеет место равенство, т. е.

$$\sup_{u \in W^{\Delta}_{\infty}(\Omega)} \|u(\cdot) - S^n_P(u;\cdot)\|_{L_q(\Omega)} = \|F(\cdot) - S^n_P(F;\cdot)\|_{L_q(\Omega)}.$$

Заметим, что при $1 \le q < \infty$ последнее соотношение можно записать в виде

$$\sup_{u \in W^{\Delta}_{\infty}(\Omega)} \|u(\cdot) - S^n_P(u;\cdot)\|_{L_q(\Omega)} = \left( \sum_j \| I_j(\cdot)\|^q_{L_q(\Omega_j)} \right)^{1/q},$$

а при $q = \infty$ — в виде

$$\sup_{u \in W^{\Delta}_{\infty}(\Omega)} \|u(\cdot) - S^n_P(u;\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} = \max_j \| I_j(\cdot)\|_{L_\infty(\Omega_j)}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Для всех* $1 \le p \le \infty$ *и любого разбиения* $P \in \mathcal{P}_N$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_P(W^{\Delta}_p(\Omega))_{L_1(\Omega)} = \|F_n(\cdot) - S^n_P(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)},. \tag{22}$$

***Доказательство.*** В случае $p = \infty$ утверждение теоремы содержится в теореме 1. Найдем значения уклонения в норме пространства $L_1(\Omega)$ произвольной функции $u(x)$ из класса $W^{\Delta}_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, от аппроксимирующего ее кусочно-гармонического сплайна $S^n_P(u;x)$. Используя равенства (14) и (15), получаем

$$\|u(\cdot) - S^n_P(u;\cdot)\|_{L_1(\Omega)} = \sum_j \|u(\cdot) - u_{\Omega_j}(\cdot)\|_{L_1(\Omega_j)} =$$

$$= \sum_j \int\limits_{\Omega_j} \left| \int\limits_{\Omega_j} G_{\Omega_j}(x;y)\Delta u(y)dy \right| dx \leq \sum_j \int\limits_{\Omega_j} \int\limits_{\Omega_j} G_{\Omega_j}(x,y)dx|\Delta u(y)|dy =$$

$$= \sum_j \int\limits_{\Omega_j} |F_n(y) - S_P^n(F_n;y)||\Delta u(y)|dy = \int\limits_{\Omega} |F_n(y) - S_P^n(F_n;y)||\Delta u(y)|dy.$$

Таким образом,

$$\|u(\cdot) - S_P^n(u;\cdot)\|_{L_1(\Omega)} \leq \int\limits_{\Omega} |F_n(y) - S_P^n(F_n;y)||\Delta u(y)|dy. \tag{23}$$

Применяя неравенство Гельдера, при любом $p \in [1,\infty)$ имеем

$$\|u(\cdot) - S_P^n(u;\cdot)\|_{L_1(\Omega)} \leq \|F_n(\cdot) - S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}\|\Delta u\|_{L_p(\Omega)} \leq \|F_n(\cdot) - S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

Значит, при любом $p \in [1,\infty)$

$$\mathcal{E}_P(W_p^\Delta(\Omega))_{L_1(\Omega)} \leq \|F_n(\cdot) - S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}. \tag{24}$$

Покажем, что в последнем соотношении имеет место равенство. Пусть сначала $p = 1$. Рассмотрим семейство функций

$$\omega_\varepsilon(y) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |y|^2}}, & |y| \leq \varepsilon, \\ 0, & |y| > \varepsilon, \end{cases}$$

где константы $C_\varepsilon$ выбираются из условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(y)dy = 1.$$

Обозначим через $y_0 \in \Omega^\circ$ точку, в которой

$$|F_n(y_0) - S_P^n(F_n;y_0)| = \max_{y\in\Omega} |F_n(y) - S_P^n(F_n;y)|.$$

Пусть $j'$ таково, что $y_0 \in \Omega_{j'}^\circ$. Выберем $\varepsilon_0$ настолько малым, чтобы supp $\omega_{\varepsilon_0}(\cdot - y_0) \subset \Omega_{j'}$.

Для каждого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ определим функцию $u_\varepsilon(y)$ как произвольное решение уравнения

$$\Delta u_\varepsilon(y) = \omega_\varepsilon(y - y_0), \quad y \in \Omega^\circ.$$

Поскольку $u_\varepsilon(y) \in W_1^\Delta(\Omega)$ и неравенство (23) для функций $u_\varepsilon(y)$ обращается в равенство, то

$$\sup_{u \in W_1^\Delta(\Omega)} \|u(\cdot) - S_P^n(u;\cdot)\|_{L_1(\Omega)} \geq \|u_\varepsilon(\cdot) - S_P^n(u_\varepsilon;\cdot)\|_{L_1(\Omega)} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} |F_n(y) - S_P^n(F_n;y)|\Delta u_\varepsilon(y)dy = \int\limits_{\Omega} |F_n(y) - S_P^n(F_n;y)|\, \omega_\varepsilon(y - y_0)dy. \tag{25}$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\Omega}|F_n(y)-S_P^n(F_n;y)|\,\omega_\varepsilon(y-y_0)dy=|F_n(y_0)-S_P^n(F_n;y_0)|,$$

из (25) в пределе при $\varepsilon\to+0$ получаем

$$\sup_{u\in W_1^\Delta(\Omega)}\|u(\cdot)-S_P^n(u;\cdot)\|_{L_1(\Omega)}\geq|F_n(y_0)-S_P^n(F_n;y_0)|=\|F_n(\cdot)-S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Значит, неравенство (24) при $p=1$ превращается в равенство.

Пусть теперь $1<p<\infty$. Покажем, что

$$\sup_{u\in W_p^\Delta(\Omega)}\|u(\cdot)-S_P^n(u;\cdot)\|_{L_1(\Omega)}=\|F_n(\cdot)-S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

Для этого рассмотрим функцию $\tilde u(x)$, которую определим как произвольное решение уравнения

$$\Delta\tilde u(x)=\left(\frac{|F_n(x)-S_P^n(F_n;x)|}{\|F_n(\cdot)-S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}}\right)^{p'-1},\quad x\in\Omega^\circ.$$

Функция $\tilde u(x)$ очевидно принадлежит классу $W_p^\Delta(\Omega)$ при каждом $1<p<\infty$. С использованием равенств (14) и (15) преобразуем $L_1$-норму отклонения функции $\tilde u(x)$ от приближающего ее гармонического сплайна. Имеем

$$\|\tilde u(x)-S_P^n(\tilde u;x)\|_{L_1(\Omega)}=\sum_j\|\tilde u(x)-S_P^n(\tilde u;x)\|_{L_1(\Omega_j)}=$$

$$=\sum_j\int\limits_{\Omega_j}\int\limits_{\Omega_j}G_{\Omega_j}(x,y)\left(\frac{|F_n(y)-S_P^n(F_n;y)|}{\|F_n(\cdot)-S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}}\right)^{p'-1}dydx=$$

$$=\frac{1}{\|F_n(\cdot)-S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}^{p'-1}}\sum_j\int\limits_{\Omega_j}|F_n(x)-S_P^n(F_n;x)|^{p'-1}\int\limits_{\Omega_j}G_{\Omega_j}(x,y)dxdy=$$

$$=\frac{1}{\|F_n(\cdot)-S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}^{p'-1}}\sum_j\int\limits_{\Omega_j}|F_n(x)-S_P^n(F_n;x)|^{p'}dy=\|F_n(\cdot)-S_P^n(F_n;\cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

Теорема доказана.

**4. Некоторые следствия.** В [13] показано, что для функций $G^1_{\Omega_{ij}}(x,y;\xi,\eta)$ и $G^2_{\Omega_{ij}}(x,y;\xi,\eta)$ (см. соотношения (16) и (17))

$$I^1_{ij}(x,y)=\int\limits_{\Omega_{ij}}G^1_{\Omega_{ij}}(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\alpha^2_{2k+1,i}\operatorname{sh}(\alpha_{2k+1,i}h_j)}\times$$

$$\times(\operatorname{sh}(\alpha_{2k+1,i}(y-y_{j+1}))+\operatorname{sh}(\alpha_{2k+1,i}h_j)-\operatorname{sh}(\alpha_{2k+1,i}(y-y_j)))\sin(\alpha_{2k+1,i}(x-x_i)),$$

$$I_{ij}^2(x,y) = \int\limits_{\Omega_{ij}} G_{\Omega_{ij}}^2(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\beta_{2k+1,i}^2\operatorname{sh}(\beta_{2k+1,i}l_i)}\times$$

$$\times(\operatorname{sh}(\beta_{2k+1,i}(x-x_{i+1}))+\operatorname{sh}(\beta_{2k+1,i}l_i)-\operatorname{sh}(\beta_{2k+1,i}(x-x_i)))\sin(\beta_{2k+1,i}(y-y_j)).$$

Используя эти соотношения, легко убедиться в том, что

$$\|I_{ij}^1(\cdot,\cdot)\|_{L_1(\Omega_{ij})} = \frac{16}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_i^4}{(2k+1)^5}\left(\frac{(2k+1)\pi h_j}{2l_i} - \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi h_j}{2l_i}\right)\right),$$

$$\|I_{ij}^2(\cdot,\cdot)\|_{L_1(\Omega_{ij})} = \frac{16}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_j^4}{(2k+1)^5}\left(\frac{(2k+1)\pi l_i}{2h_j} - \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi l_i}{2h_j}\right)\right).$$

Тогда из теоремы 1 получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\Omega = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ *и* $N=(N_1,N_2)$. *Тогда для любого* $P\in\mathcal{P}_N$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_1(\Omega)} =$$

$$= \frac{16}{\pi^5}\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_i^4}{(2k+1)^5}\left(\frac{(2k+1)\pi h_j}{2l_i} - \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi h_j}{2l_i}\right)\right) \tag{26}$$

*и*

$$\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_1(\Omega)} =$$

$$= \frac{16}{\pi^5}\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_j^4}{(2k+1)^5}\left(\frac{(2k+1)\pi l_i}{2h_j} - \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi l_i}{2h_j}\right)\right). \tag{27}$$

Минимизируя правые части соотношений (26) и (27) при ограничениях $\sum_{j=0}^{N_2-1} h_j = b_2-a_2$ и $\sum_{i=0}^{N_1-1} l_i = b_1-a_1$ соответственно $\big($для этого можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа и учесть, что функция

$$u = v - \tanh v$$

и ее производная

$$u' = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v}$$

строго возрастают с ростом $v>0\big)$, получаем, что наименьшие значения достигаются при равномерных разбиениях отрезков $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$, т. е. в случае $h_0=h_1=\ldots=h_{N_2-1}$ и $l_0=l_1=\ldots=l_{N_1-1}$. В частности, имеет место такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть* $N = (N_1, N_2)$ *и* $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_N(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_1(\Omega)} = \frac{16}{\pi^5}\frac{N_2}{N_1^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\left(\frac{(2k+1)\pi N_1}{2N_2} - \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi N_1}{2N_2}\right)\right)$$

*и, в частности, при* $N_1 = N_2$

$$\mathcal{E}_N(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_1(\Omega)} = \frac{16}{\pi^5}\frac{1}{N_1^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} - \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\right).$$

Приведем далее некоторые следствия из теоремы 1 для пространств произвольной размерности.

Прежде всего отметим, что в случае разбиения $P \in \mathcal{P}_N$ области $\Omega$ на неравные области найдется параллелепипед разбиения, имеющий наибольшие линейные размеры (обозначим через $\Omega_{j'}$ какой-нибудь такой параллелепипед).

***Следствие* 3.** *Имеет место следующее равенство*:

$$\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_\infty(\Omega)} = \max_{x\in\Omega_{j'}}|F_n(x) - S_P^n(F_n; x)| = \max_{x\in\Omega_{j'}} I_{j'}(x).$$

***Доказательство.*** Пусть $\Omega_{j'}$ — параллелепипед разбиения $P$, имеющий наибольшие линейные размеры, и $\Omega_j$ — параллелепипед, один из линейных размеров которого строго меньше соответствующего линейного размера параллелепипеда $\Omega_{j'}$. Напомним, что через $u_{\Omega_j}$ мы обозначаем гармоническую в области $\Omega_j$ функцию, совпадающую с функцией $u$ для $x \in \partial\Omega_j$.

Для параллелепипеда $\Omega_j = \prod_{i=1}^{n}[x_i^{j_i}, x_i^{j_i+1}]$ положим $x^j = (x_1^{j_1}, \ldots, x_n^{j_n})$. Учитывая (15), видим, что для всех $x \in \Omega_j$ имеет место равенство

$$F_n(x - x^j) - (F_n)_{\Omega_j - x^j}(x - x^j) = F_n(x) - (F_n)_{\Omega_j}(x). \tag{28}$$

Поэтому для доказательства следствия 3 достаточно для $y \in \Omega_j - x^j$ сравнить значения

$$F_n(y) - (F_n)_{\Omega_j - x^j}(y) \qquad \text{и} \qquad F_n(y) - (F_n)_{\Omega_{j'} - x^{j'}}(y).$$

Ясно, что в силу (28) для $y \in \partial\Omega_j - x^j$

$$(F_n)_{\Omega_{j'} - x^{j'}}(y) - F_n(y) \geq (F_n)_{\Omega_j - x^j}(y) - F_n(y), \tag{29}$$

и, следовательно,

$$(F_n)_{\Omega'_j - x^{j'}}(y) - (F_n)_{\Omega_j - x^j}(y) \geq 0,$$

причем если $x_i^{j_i+1} - x_i^{j_i} < x_i^{j'_i+1} - x_i^{j'_i}$, то на внутренности той грани области $\Omega_j - x^j$, которая лежит в гиперплоскости $x_i = x_i^{j_i+1} - x_i^{j_i}$, в (29) будет иметь место строгое неравенство.

В силу принципа максимума для гармонических функций строгое неравенство в (29) будет иметь место для любого $y \in \Omega_j^\circ - x^j$.

Следствие 3 доказано.

Из следствия 3 легко выводится такое следствие.

***Следствие* 4.** *Пусть вектор* $N = (N_1, \ldots, N_n)$ *задан и* $\Omega(N) = \prod_{i=1}^{n} \left[0, \dfrac{b_i - a_i}{N_i}\right]$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_N(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_\infty(\Omega)} = \max_{x\in\Omega(N)} |F_N(x) - S_{\tilde{P}}^n(F_n; x)| = \max_{x\in\Omega(N)} \int\limits_{\Omega(N)} G_{\Omega(N)}(x, y)dy.$$

В заключение приведем следствия из теорем 1 и 2, касающиеся случая разбиения области $\Omega$ на $N$ равных частей. Пусть $\tilde{\Omega} = \prod_{i=1}^{n}[0, c_i]$ — параллелепипед единичного объема такой, что элементы соответствующего разбиения $P = \mathcal{P}_N$ области $\Omega$ имеют вид

$$d^j + \gamma\tilde{\Omega}, \qquad d^j \in \mathbb{R}^n, \quad \gamma > 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Тогда $\gamma = \left(\dfrac{|\Omega|}{N}\right)^{1/n} = \left(\dfrac{1}{N}\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\right)^{1/n}$. Учитывая, что для функции Грина области $\tilde{\Omega}$ справедливы соотношения

$$G_{\gamma\widetilde{\Omega}}(x; y) = \frac{1}{\gamma^{n-2}} G_{\widetilde{\Omega}}\left(\frac{x}{\gamma}; \frac{y}{\gamma}\right), \qquad x \in \gamma\widetilde{\Omega}, \quad y \in \gamma\widetilde{\Omega}, \tag{30}$$

$$G_{\widetilde{\Omega}+d}(x; y) = G_{\widetilde{\Omega}}(x - d; y - d), \qquad x \in \widetilde{\Omega} + d, \quad y \in \widetilde{\Omega} + d, \tag{31}$$

преобразуем правую часть выражения (19) с помощью равенства (15). В результате получим

$$\|F_n(\cdot) - S_P^n(F_n; \cdot)\|_{L_q(\Omega)}^q = \sum_j \int\limits_{\Omega_j} \left(\int\limits_{\Omega_j} G_{\Omega_j}(x; y)dy\right)^q dx.$$

Учитывая (30) и (31), имеем

$$\|F_n(\cdot) - S_P^n(F_n; \cdot)\|_{L_q(\Omega)}^q = N \int\limits_{\gamma\widetilde{\Omega}} \left(\int\limits_{\gamma\widetilde{\Omega}} G_{\gamma\widetilde{\Omega}}(x; y)dy\right)^q dx =$$

$$= N \int\limits_{\gamma\widetilde{\Omega}} \left(\int\limits_{\gamma\widetilde{\Omega}} \frac{1}{\gamma^{n-2}} G_{\widetilde{\Omega}}\left(\frac{x}{\gamma}; \frac{y}{\gamma}\right) dy\right)^q dx = N\gamma^n \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(\gamma^n \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \frac{1}{\gamma^{n-2}} G_{\widetilde{\Omega}}(x; y)dy\right)^q dx =$$

$$= N\gamma^{n+2q} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(\int\limits_{\widetilde{\Omega}} G_{\widetilde{\Omega}}(x; y)dy\right)^q dx = N\left(\frac{|\Omega|}{N}\right)^{\frac{n+2q}{n}} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(\int\limits_{\widetilde{\Omega}} G_{\widetilde{\Omega}}(x; y)dy\right)^q dx.$$

Таким образом, доказано такое следствие.

***Следствие* 5.** *При* $1 \le q < \infty$ *для* $P = \mathcal{P}_N$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_P(W_\infty^\Delta(\Omega))_{L_q(\Omega)} = N^{-\frac{2}{n}} \left(\prod_{i=1}^{n} b_i - a_i\right)^{\frac{1}{q}+\frac{2}{n}} \left\|\int\limits_{\widetilde{\Omega}} G_{\widetilde{\Omega}}(\cdot; y)dy\right\|_{L_q(\widetilde{\Omega})}.$$

Аналогично из теоремы 2 выводится такое утверждение.

***Следствие* 6.** *При* $1 \le p < \infty$ *для* $P = \mathcal{P}_N$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_P(W_p^{\Delta}(\Omega))_{L_1(\Omega)} = N^{-\frac{2}{n}} \left( \prod_{i=1}^{n} b_i - a_i \right)^{\frac{1}{p'} + \frac{2}{n}} \left\| \int\limits_{\widetilde{\Omega}} G_{\widetilde{\Omega}}(\cdot; y) dy \right\|_{L_{p'}(\widetilde{\Omega})}.$$


1. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций // Изв. АН СССР Сер. мат. – 1973. – **37**, № 1. – С. 165 – 185.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
3. *Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Об интерполяции многогранными функциями // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 6. – С. 803 – 814.
4. *Бабенко В. Ф.* Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 1. – С. 43 – 52.
5. *Субботин Ю. Н.* Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на $n$-симплексах // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 4. – С. 88 – 99.
6. *Килижеков Ю. А.* Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами первой степени на $n$-симплексах // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 4. – С. 504 – 510.
7. *Сторчай В. Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями в равномерной метрике // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск, 1975. – С. 82 – 89.
8. *Вакарчук С. Б.* К интерполяции билинейными сплайнами // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 5. – С. 26 – 30.
9. *Шабозов М. Ш.* О погрешности интерполяции билинейными сплайнами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1554 – 1560.
10. *Шабозов М. Ш.* Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 1. – С. 142 – 152.
11. *Вакарчук С. Б., Мыскин К. Ю.* Некоторые вопросы одновременной аппроксимации функций двух переменных и их производных интеполяционными билинейными сплайнами // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 2. – С. 147 – 157.
12. *Бабенко В. Ф., Лескевич Т. Ю.* Погрешность при интерполяции некоторых классов функций полилинейными сплайнами // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2010. – **18**, № 6/1. – С. 28 – 37.
13. *Клименко В. Т.* Аппроксимация гармоническими сплайнами функций двух переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1190 – 1196.
14. *Kounchev O.* Multivariate polysplines: applications to numerical and wavelet analysis. – Acad. Press, 2001. – 460 p.
15. *Hoppe V.* Finite elements with harmonic interpolation functions // Proc. Conf. MAFELAP / Ed. J. R. Whiteman. – London: Acad. Press, 1973. – P. 131 – 142.
16. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 488 с.
17. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ, 2005. – 260 с.


Получено 14.04.11