УДК 517.948

С. М. Загороднюк (Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

ФОРМУЛА НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ УСЕЧЕННОЙ МАТРИЧНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

This paper is a continuation of our investigation on the truncated matrix trigonometric moment problem begun in Ukr. Mat. Zh. – 2011. – **63**, № 6. – P. 786 – 797. In the present paper, we obtain the Nevanlinna formula for this moment problem in the general case. We assume here that there is more than one moment and the moment problem is solvable and has more than one solution. The coefficients of the corresponding matrix linear fractional transformation are expressed in explicit form via prescribed moments. Simple determinacy conditions for the moment problem are presented.

Ця робота є продовженням дослідження зрізаної матричної тригонометричної проблеми моментів, розпочатого автором (див. Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 6. – С. 786 – 797). У даній роботі одержано формулу Неванлінни для цієї проблеми моментів у загальному випадку. При цьому припускається, що задано більш ніж один момент, проблема моментів розв'язна і має більш ніж один розв'язок. Коефіцієнти відповідного матричного дробово-лінійного перетворення явно виражено через задані моменти. Наведено прості умови визначеності проблеми моментів.

1. Введение. Данная работа является продолжением исследования автора по усеченной матричной тригонометрической проблеме моментов с помощью операторного подхода, начатого в [1]. Усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов (далее сокращенно УМТПМ) состоит в нахождении неубывающей $\mathbb{C}_{N\times N}$-значной функции $M(t) = (m_{k,l})_{k,l=0}^{N-1}$, $t \in [0, 2\pi]$, $M(0) = 0$, которая является непрерывной слева в $(0, 2\pi]$ и такой, что

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dM(t) = S_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, d, \tag{1}$$

где $\{S_n\}_{n=0}^{d}$ — заданная последовательность комплексных $(N\times N)$-матриц (моментов). Здесь $N \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathbb{Z}_+$ являются фиксированными числами. Положим

$$T_d = (S_{i-j})_{i,j=0}^{d} = \begin{pmatrix} S_0 & S_{-1} & S_{-2} & \ldots & S_{-d} \\ S_1 & S_0 & S_{-1} & \ldots & S_{-d+1} \\ S_2 & S_1 & S_0 & \ldots & S_{-d+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_d & S_{d-1} & S_{d-2} & \ldots & S_0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где

$$S_k := S_{-k}^*, \qquad k = -d, -d+1, \ldots, -1,$$

и $\{S_n\}_{n=0}^{d}$ определены в (1). Известно, что условие

$$T_d \geq 0 \tag{3}$$

является необходимым и достаточным для разрешимости проблемы моментов (1) (см., например, [2]).

Проблему моментов (1) называют *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной* — в противном случае. Заметим, что термин „определенная (неопределенная) проблема моментов" является стандартным для ряда классических проблем моментов (см. [3 – 6]). Такая терминология применялась и для усеченной тригонометрической проблемы моментов [7, с. 312; 6, с. 213].

Мы не приводим здесь изложение истории и современных результатов для проблемы моментов (1), так как это содержится в работе [1]. Отметим лишь дополнительно работу [8], не упоминавшуюся нами ранее. Целью настоящего исследования является вывод формулы Неванлинны для УМТПМ в общем случае. Именно, мы предполагаем, что $d \geq 1$, выполнено условие (3) и проблема моментов является неопределенной. Коэффициенты соответствующего матричного дробно-линейного преобразования явно выражаются через заданные моменты. Заметим, что в некоторых случаях (например, при многократном применении) формула Неванлинны имеет то преимущество, что числа строк и столбцов для коэффициентов матричного дробно-линейного преобразования не превышают N. Также получены простые условия определенности УМТПМ в терминах заданных моментов.

Обозначения. Как обычно, обозначаем через $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и целых неотрицательных чисел соответственно; $\mathbb{D} = \{z \in \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Множество всех комплексных матриц размера $m \times n$ обозначаем через $\mathbb{C}_{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Если $M \in \mathbb{C}_{m\times n}$, то M^T обозначает транспонированную матрицу для M, а M^* — комплексно-сопряженную матрицу для M. Единичная матрица из $\mathbb{C}_{n\times n}$ обозначается через I_n, $n \in \mathbb{N}$.

Если H является гильбертовым пространством, то $(\cdot,\cdot)_H$ и $\|\cdot\|_H$ обозначают скалярное произведение и норму в H соответственно. В очевидных случаях индексы можно опускать. Посредством $\mathbb{C}^N$ мы обозначаем конечномерное гильбертово пространство комплексных векторов-столбцов размера N с обычным скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{C}^N} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \overline{y_j}$ для $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^N$, $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^T$, $\vec{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})^T$, $x_j, y_j \in \mathbb{C}$.

Для линейного оператора A в H обозначаем через $D(A)$ его область определения, через $R(A)$ его область значений; A^* обозначает сопряженный оператор, если он существует. Если A обратим, то A^{-1} обозначает обратный оператор для A. Если A ограничен, то $\|A\|$ обозначает его норму. Если некоторое множество M состоит из конечного числа элементов, то количество элементов M обозначается $\mathrm{card}(M)$. Для произвольного набора элементов $\{x_n\}_{n\in I}$ в H обозначаем посредством $\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n\in I}$ линейную оболочку элементов x_n, $n \in I$. Здесь I — произвольное множество индексов. Через E_H обозначаем единичный оператор в H, т. е. $E_H x = x$, $x \in H$. В очевидных случаях индекс H можно опускать. Если H_1 является подпространством в H, то $P_{H_1} = P_{H_1}^H$ обозначает оператор ортогонального проектирования на H_1 в H.

2. Определенность УМТПМ. Формула Неванлинны для УМТПМ. Пусть задана проблема моментов (1) с $d \geq 1$ и выполнено условие (3), где T_d определены в (2). Пусть

$$T_d = (\gamma_{n,m})_{n,m=0}^{(d+1)N-1}, \qquad S_k = (S_{k;s,l})_{s,l=0}^{N-1}, \quad -d \leq k \leq d,$$

где $\gamma_{n,m}, S_{k;s,l} \in \mathbb{C}$. Заметим, что

$$\gamma_{kN+s,rN+l} = S_{k-r;s,l}, \qquad 0 \leq k, r \leq d, \quad 0 \leq s, l \leq N-1. \tag{4}$$

Повторим здесь вкратце некоторые построения из [1]. Рассмотрим комплексное линейное векторное пространство $\mathfrak{H}$, элементами которого являются векторы-строки $\vec{u} = (u_0, u_1, u_2, \ldots \ldots, u_{(d+1)N-1})$ с $u_n \in \mathbb{C}$, $0 \le n \le (d+1)N-1$. Сложение и умножение на скаляр определяются для векторов обычным образом. Положим

$$\vec{\varepsilon}_n = (\delta_{n,0}, \delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,(d+1)N-1}), \qquad 0 \le n \le (d+1)N-1,$$

где $\delta_{n,r}$ — символ Кронекера. В $\mathfrak{H}$ мы определим линейный функционал B посредством соотношения

$$B(\vec{u}, \vec{w}) = \sum_{n,r=0}^{(d+1)N-1} a_n \overline{b_r} \gamma_{n,r},$$

где

$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{(d+1)N-1} a_n \vec{\varepsilon}_n, \qquad \vec{w} = \sum_{r=0}^{(d+1)N-1} b_r \vec{\varepsilon}_r, \quad a_n, b_r \in \mathbb{C}.$$

Пространство $\mathfrak{H}$ с B является квазигильбертовым пространством [5]. Согласно обычной процедуре введения классов эквивалентности (см., например, [5, с. 24]), мы относим два элемента $\vec{u}$, $\vec{w}$ из $\mathfrak{H}$ к одному классу эквивалентности, который обозначается $[\vec{u}]$ или $[\vec{w}]$, если $B(\vec{u} - \vec{w}, \vec{u} - \vec{w}) = 0$. Пространство классов эквивалентности является (конечномерным) гильбертовым пространством. Всюду в дальнейшем мы обозначаем его через H. Положим

$$x_n := [\vec{\varepsilon}_n], \qquad 0 \le n \le (d+1)N-1.$$

Тогда

$$(x_n, x_m)_H = \gamma_{n,m}, \qquad 0 \le n, m \le (d+1)N-1, \tag{5}$$

и $\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{(d+1)N-1} = H$. Пусть $L_N := \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$. Рассмотрим оператор

$$Ax = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_{k+N}, \qquad x = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

$$D(A) = \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1}.$$

Оператор A является изометрическим. Согласно теореме 3 из [1] все решения проблемы моментов (1) имеют вид

$$M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \qquad t \in [0, 2\pi], \tag{7}$$

где $m_{k,j}$ находят из соотношения

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dm_{k,j}(t) = \left([E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]^{-1} x_k, x_j \right)_H, \qquad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{8}$$

Здесь Φ_ζ — аналитическая в $\mathbb{D}$ операторнозначная функция, значениями которой являются линейные сжатия из $H \ominus D(A)$ в $H \ominus R(A)$. Наоборот, каждая аналитическая в $\mathbb{D}$ операторнозначная функция с указанными свойствами посредством соотношений (7), (8) дает решение проблемы моментов (1). Соответствие между всеми аналитическими в $\mathbb{D}$ операторнозначными функциями с вышеуказанными свойствами и решениями проблемы моментов (1) взаимно однозначно.

Поскольку мы предполагаем получить формулу Неванлинны для *неопределенной* УМТПМ, важно установить простые необходимые и достаточные условия определенности УМТПМ.

Теорема 1. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов* (1) *с* $d \geq 1$ *и условие* (3) *с* T_d *из* (2) *выполнено. Пусть оператор* A *в гильбертовом пространстве* H *задан соотношением* (6). *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(A) *проблема моментов* (1) *является определенной*;

(B) *индексы дефекта* A *равны нулю*;

(C) *для каждого фиксированного* r, $dN \leq r \leq dN + N - 1$, *система линейных уравнений*

$$\sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{r,n} \gamma_{n,j} = \gamma_{r,j}, \qquad 0 \leq j \leq dN + N - 1,$$

относительно неизвестных $\alpha_{r,0}, \alpha_{r,1}, \ldots, \alpha_{r,dN-1}$ *имеет решение*; *здесь числа* $\gamma_{\cdot,\cdot}$ *определены в* (4).

Если указанные условия выполнены, то единственное решение проблемы моментов (1) *дается формулой*

$$M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \qquad m_{k,j}(t) = (E_t x_k, x_j)_H,$$

где E_t — *непрерывное слева ортогональное разложение единицы унитарного оператора* A. *Это решение является кусочно-постоянной функцией.*

Доказательство. (A) $\Rightarrow$ (B). Вначале заметим, что дефектные числа оператора A всегда равны, так как он изометрический и действует в конечномерном пространстве. Если дефектные числа больше нуля, можно выбрать единичные векторы $u_1 \in H \ominus D(A)$ и $u_2 \in H \ominus R(A)$. Положим

$$\Phi_\zeta(cu_1 + u) = cu_2, \qquad c \in \mathbb{C},\ u \in (H \ominus D(A)) \ominus \mathrm{Lin}\{u_1\}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

С другой стороны, полагаем $\widetilde{\Phi}_\zeta \equiv 0$. Функции Φ_ζ и $\widetilde{\Phi}_\zeta$ порождают различные решения УМТПМ посредством соотношения (8).

(B) $\Rightarrow$ (A). Если дефектные числа A равны нулю, то единственной допустимой функцией Φ_ζ в соотношении (8) является $\Phi_\zeta \equiv 0$.

Далее, справедлива следующая цепочка:

$$\text{(B)} \Leftrightarrow (D(A) = H) \Leftrightarrow \left(x_{dN}, x_{dN+1}, \ldots, x_{dN+N-1} \in \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x_{dN} = \sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN,n} x_n, \\ x_{dN+1} = \sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN+1,n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{dN+N-1} = \sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN+N-1,n} x_n, \end{cases} \quad \alpha_{dN,n}, \alpha_{dN+1,n}, \ldots, \alpha_{dN+N-1,n} \in \mathbb{C} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} (x_{dN}, x_j)_H = \left(\sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN,n} x_n, x_j \right)_H, \\ (x_{dN+1}, x_j)_H = \left(\sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN+1,n} x_n, x_j \right)_H, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x_{dN+N-1}, x_j)_H = \left(\sum_{n=0}^{dN-1} \alpha_{dN+N-1,n} x_n, x_j \right)_H, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \alpha_{dN,n}, \alpha_{dN+1,n}, \dots \\ \dots \alpha_{dN+N-1,n} \in \mathbb{C}, \\ 0 \le j \le dN+N-1 \end{array} \right) \Leftrightarrow (\mathrm{C}).$$

Теорема 1 доказана.

Продолжим наши рассуждения, начатые перед теоремой 1. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что УМТПМ является неопределенной и оба дефектных числа A равны $\delta = \delta(A)$, $\delta \ge 1$.

Применим процесс ортогонализации Грама – Шмидта к векторам

$$x_0, x_1, \dots, x_{dN+N-1}.$$

Во время этого процесса будем использовать числа $\gamma_{\cdot,\cdot}$, определенные в (4), а также свойство (5).

Шаг j, $0 \le j \le dN + N - 1$. Вычисляем

$$n_j := \left\| x_j - \sum_{k\colon\, 0 \le k \le j-1,\ n_k \ne 0} (x_j, y_k)_H y_k \right\|_H, \tag{9}$$

где сумма в правой части может быть пустой (т. е. не содержать слагаемых и быть равной нулю). Если $n_j \ne 0$, то полагаем

$$y_j := \frac{1}{n_j} \left(x_j - \sum_{k\colon\, 0 \le k \le j-1,\, n_k \ne 0} (x_j, y_k)_H y_k \right). \tag{10}$$

Если $n_j = 0$, переходим к следующему шагу.

***Замечание* 1.** Отметим, что всегда существует ненулевое n_j с $0 \le j \le N-1$. Действительно, в противном случае мы бы получили $\|x_j\|_H^2 = \gamma_{j,j} = 0$, $0 \le j \le N-1$. Следовательно, $S_0 = 0$ и $M(t) \equiv 0$, что противоречит неопределенности УМТПМ.

***Замечание* 2.** С помощью соотношения (10) каждый y_j может быть представлен как линейная комбинация векторов $x_0, x_1, \dots, x_j$. Таким образом, числа n_j вычисляются с использованием заданных моментов посредством соотношений (5) и (4).

Положим $\Omega_1 = \{j\colon 0 \le j \le dN+N-1,\ n_j \ne 0\}$. Тогда $\mathfrak{A} := \{y_j\}_{j\in\Omega_1}$ является ортонормированным базисом в H. Кроме того, $\mathfrak{A}_1 := \{y_j\}_{j\in\Omega_1\colon j \le N-1}$ является ортонормированным базисом в L_N и $\mathfrak{A}_2 := \{y_j\}_{j\in\Omega_1\colon\, j\le dN-1}$ — ортонормированный базис в $\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1} = D(A)$. Следовательно, $\mathfrak{A}_3 := \{y_j\}_{j\in\Omega_1\colon\, dN \le j \le dN+N-1}$ является ортонормированным базисом в $H \ominus D(A)$. Отсюда заключаем, что $\delta \le N$.

Заметим, что $\mathrm{card}(\mathfrak{A}_3) = \delta \ge 1$. Положим $\rho := \mathrm{card}(\mathfrak{A}_1)$, $\tau := \mathrm{card}(\mathfrak{A}_2)$. Отметим, что $1 \le \rho \le N$, $\tau \ge \rho \ge 1$.

Обозначим k-й элемент, считая от нуля, в множестве $\mathfrak{A}$, упорядоченном в порядке построения его элементов, через u_k, $k = 0, 1, \dots, \tau + \delta - 1$. Тогда $\mathfrak{A} = \{u_k\}_{k=0}^{\tau+\delta-1}$, $\mathfrak{A}_1 = \{u_k\}_{k=0}^{\rho-1}$, $\mathfrak{A}_2 = \{u_k\}_{k=0}^{\tau-1}$, $\mathfrak{A}_3 = \{u_k\}_{k=\tau}^{\tau+\delta-1}$.

Нам потребуется еще один ортонормированный базис в H. Заметим, что $\mathfrak{A}_2' := \{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}$, где $v_k := Au_k$, является ортонормированным базисом в $R(A)$. Кроме того, $R(A) = \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=dN}^{dN+N-1}$. Значит, линейная оболочка векторов $\{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}$, $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ равна H. Тогда линейная оболочка векторов $\{v_k\}_{k=0}^{\tau-1}$, $\{u_k\}_{k=0}^{\rho-1}$ также равна H.

Применим процесс ортогонализации Грама – Шмидта к векторам

$$v_0,\ v_1, \ldots, v_{\tau-1},\ u_0, u_1, \ldots, u_{\rho-1}.$$

Как и в предыдущей процедуре ортогонализации, будем использовать числа $\gamma_{\cdot,\cdot}$, определенные в (4), и свойство (5). Заметим, что первые τ элементов уже ортонормированы.

Шаг j, $0 \leq j \leq \rho - 1$. Вычисляем

$$m_j := \left\| u_j - \sum_{l=0}^{\tau-1} (u_j, v_l)_H v_l - \sum_{k:\ 0\leq k\leq j-1,\ m_k\neq 0} (u_j, f_k)_H f_k \right\|_H, \tag{11}$$

где последняя сумма в правой части может быть пустой. Если $m_j \neq 0$, то полагаем

$$f_j := \frac{1}{m_j} \left(u_j - \sum_{l=0}^{\tau-1} (u_j, v_l)_H v_l - \sum_{k:\ 0\leq k\leq j-1,\ m_k\neq 0} (u_j, f_k)_H f_k \right). \tag{12}$$

Если $m_j = 0$, переходим к следующему шагу.

Положим $\Omega_2 = \{j\colon 0 \leq j \leq \rho - 1,\ m_j \neq 0\}$. Тогда $\mathfrak{A}' := \{v_k\}_{k=0}^{\tau-1} \cup \{f_j\}_{j\in\Omega_2}$ является ортонормированным базисом в H. Полагаем $\mathfrak{A}_3' := \{f_j\}_{j\in\Omega_2}$. Заметим, что $\mathrm{card}(\mathfrak{A}_3') = \delta$.

Обозначим k-й элемент, считая от нуля, в множестве $\mathfrak{A}_3'$, упорядоченном в порядке построения его элементов, через $v_{\tau+k}$, $k = 0, 1, \ldots, \delta - 1$. Тогда $\mathfrak{A}' = \{v_k\}_{k=0}^{\tau+\delta-1}$, $\mathfrak{A}_3' = \{v_k\}_{k=\tau}^{\tau+\delta-1}$.

Обозначим через $\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi)$ матрицу оператора $E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)$ в базисе $\mathfrak{A}$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Здесь Φ_ζ является аналитической в $\mathbb{D}$ операторнозначной функцией, значения которой являются линейными сжатиями из $H \ominus D(A)$ в $H \ominus R(A)$. Тогда

$$\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi) = \left(([E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau+\delta-1} = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta} & B_{0,\zeta}(\Phi) \\ C_{0,\zeta} & D_{0,\zeta}(\Phi) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{0,\zeta} = \left(([E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1} = \left((u_k - \zeta A u_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1} =$$

$$= I_\tau - \zeta \left((v_k, u_j)_H \right)_{j,k=0}^{\tau-1}, \tag{13}$$

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = \left(([E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{0\leq j\leq\tau-1,\ \tau\leq k\leq\tau+\delta-1} =$$

$$= \left((u_k - \zeta\Phi_\zeta u_k, u_j)_H \right)_{0\leq j\leq\tau-1,\ \tau\leq k\leq\tau+\delta-1} =$$

$$= -\zeta \left((\Phi_\zeta u_k, u_j)_H \right)_{0\leq j\leq\tau-1,\ \tau\leq k\leq\tau+\delta-1},$$

$$C_{0,\zeta} = \left(([E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{\tau\leq j\leq\tau+\delta-1,\ 0\leq k\leq\tau-1} =$$

$$= \left((u_k - \zeta A u_k, u_j)_H \right)_{\tau \le j \le \tau+\delta-1,\ 0 \le k \le \tau-1} =$$

$$= -\zeta \left((v_k, u_j)_H \right)_{\tau \le j \le \tau+\delta-1,\ 0 \le k \le \tau-1}, \tag{14}$$

$$D_{0,\zeta}(\Phi) = \left(([E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]\, u_k, u_j)_H \right)_{\tau \le j \le \tau+\delta-1,\ \tau \le k \le \tau+\delta-1} =$$

$$= \left((u_k - \zeta \Phi_\zeta u_k, u_j)_H \right)_{\tau \le j \le \tau+\delta-1,\ \tau \le k \le \tau+\delta-1} =$$

$$= I_\delta - \zeta \left((\Phi_\zeta u_k, u_j)_H \right)_{\tau \le j \le \tau+\delta-1,\ \tau \le k \le \tau+\delta-1}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Заметим, что матрица $A_{0,\zeta}$ является обратимой, так как она является матрицей оператора $P_{D(A)}(E_H - \zeta A)P_{D(A)} = E_{D(A)} - \zeta P_{D(A)} A P_{D(A)}$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $D(A)$, в базисе $\mathfrak{A}_2$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Отметим также, что матрицы $A_{0,\zeta}$, $C_{0,\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{D}$, явно вычисляются с использованием соотношений (5) и (4).

Обозначим через F_ζ, $\zeta \in \mathbb{D}$, матрицу оператора Φ_ζ, действующего из $H \ominus D(A)$ в $H \ominus R(A)$, относительно базисов $\mathfrak{A}_3$ и $\mathfrak{A}'_3$:

$$F_\zeta = (f_\zeta(j,k))_{j,k=\tau}^{\tau+\delta-1}, \qquad f_\zeta(j,k) := (\Phi_\zeta u_k, v_j)_H.$$

Тогда

$$\Phi_\zeta u_k = \sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} f_\zeta(l,k) v_l, \quad \tau \le k \le \tau+\delta-1,$$

и

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = -\zeta \left(\left(\sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} f_\zeta(l,k) v_l, u_j \right)_H \right)_{0 \le j \le \tau-1,\ \tau \le k \le \tau+\delta-1} =$$

$$= -\zeta \left(\sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} (v_l, u_j)_H\, f_\zeta(l,k) \right)_{0 \le j \le \tau-1,\ \tau \le k \le \tau+\delta-1}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Положим

$$W := \left((v_l, u_j)_H \right)_{0 \le j \le \tau-1, \tau \le l \le \tau+\delta-1}. \tag{15}$$

Тогда

$$B_{0,\zeta}(\Phi) = -\zeta W F_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Мы можем записать

$$D_{0,\zeta}(\Phi) = I_\delta - \zeta \left(\left(\sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} f_\zeta(l,k) v_l, u_j \right)_H \right)_{\tau \le j \le \tau+\delta-1,\ \tau \le k \le \tau+\delta-1} =$$

$$= I_\delta - \zeta \left(\sum_{l=\tau}^{\tau+\delta-1} (v_l, u_j)_H\, f_\zeta(l,k) \right)_{\tau \le j \le \tau+\delta-1,\ \tau \le k \le \tau+\delta-1}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Пусть

$$T := \big((v_l, u_j)_H\big)_{\tau \le j \le \tau+\delta-1,\ \tau \le l \le \tau+\delta-1}. \tag{16}$$

Тогда

$$D_{0,\zeta}(\Phi) = I_\delta - \zeta T F_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Таким образом, получаем

$$\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi) = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta} & -\zeta W F_\zeta \\ C_{0,\zeta} & I_\delta - \zeta T F_\zeta \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

где $A_{0,\zeta}, C_{0,\zeta}$ задаются соотношениями (13), (14), а W, T заданы в (15), (16). Применим формулу Фробениуса обращения блочной матрицы [9, с. 59]. Тогда

$$\mathcal{M}_{1,\zeta}^{-1}(\Phi) = \begin{pmatrix} A_{0,\zeta}^{-1} - \zeta A_{0,\zeta}^{-1} W F_\zeta H_\zeta^{-1}(\Phi) C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{h_\zeta} A_{0,\zeta}^{+} - \dfrac{\zeta}{h_\zeta^2} A_{0,\zeta}^{+} W F_\zeta H_\zeta^{-1}(\Phi) C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{+} & * \\ * & * \end{pmatrix}, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

где звездочками обозначены блоки матрицы, которые не представляют для нас интереса, и

$$H_\zeta(\Phi) = I_\delta - \zeta T F_\zeta + \zeta C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{-1} W F_\zeta = I_\delta - \zeta T F_\zeta + \frac{\zeta}{h_\zeta} C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{+} W F_\zeta =$$

$$= I_\delta + \left(\frac{\zeta}{h_\zeta} C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{+} W - \zeta T \right) F_\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{17}$$

Здесь $A_{0,\zeta}^{+}$ обозначает матрицу, транспонированную к матрице, составленной из алгебраических дополнений к элементам $A_{0,\zeta}$, т. е. на месте (i,j) матрицы $A_{0,\zeta}^{+}$ стоит алгебраическое дополнение к элементу на месте (j,i) матрицы $A_{0,\zeta}$, и

$$h_\zeta = \det A_{0,\zeta}. \tag{18}$$

Пусть $\zeta \in \mathbb{D}$. Часть матрицы $\mathcal{M}_{1,\zeta}^{-1}(\Phi)$, стоящую на пересечении первых ρ строк и первых ρ столбцов, обозначим через $\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)$, а часть матрицы $A_{0,\zeta}^{+}$, стоящую на пересечении первых ρ строк и первых ρ столбцов, — через $A_{1,\zeta}$. Первые ρ строк матрицы $A_{0,\zeta}^{+}$ обозначим $A_{2,\zeta}$, а первые ρ столбцов — $A_{3,\zeta}$. Тогда

$$\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) = \frac{1}{h_\zeta} A_{1,\zeta} - \frac{\zeta}{h_\zeta^2} A_{2,\zeta} W F_\zeta H_\zeta^{-1}(\Phi) C_{0,\zeta} A_{3,\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{19}$$

Заметим, что $\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)$ является матрицей оператора

$$P_{L_N} \big[E_H - \zeta (A \oplus \Phi_\zeta) \big]^{-1} P_{L_N},$$

рассматриваемого как оператор в L_N, в базисе $\mathfrak{A}_1$, $\zeta \in \mathbb{D}$.

Рассмотрим следующий оператор из $\mathbb{C}^N$ в L_N:

$$K \sum_{n=0}^{N-1} c_n \vec{e}_n = \sum_{n=0}^{N-1} c_n x_n, \qquad c_n \in \mathbb{C},$$

где $\vec{e}_n = (\delta_{n,0}, \delta_{n,1}, \ldots, \delta_{n,N-1}) \in \mathbb{C}^N$. Пусть $\mathcal{K}$ является матрицей K по отношению к базисам $\{\vec{e}_n\}_{n=0}^{N-1}$ и $\mathfrak{A}_1$:

$$\mathcal{K} = \big((K\vec{e}_k, u_j)_H\big)_{0 \le j \le \rho-1,\ 0 \le k \le N-1} = \big((x_k, u_j)_H\big)_{0 \le j \le \rho-1,\ 0 \le k \le N-1}. \tag{20}$$

Тогда можно записать

$$\Big([E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]^{-1} x_k, x_j\Big)_H =$$

$$= \Big(P_{L_N} [E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]^{-1} P_{L_N} K\vec{e}_k, K\vec{e}_j\Big)_H =$$

$$= \Big(K^* P_{L_N} [E_H - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]^{-1} P_{L_N} K\vec{e}_k, \vec{e}_j\Big)_{\mathbb{C}^N}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Заметим, что правая часть последнего выражения равна элементу матрицы $\mathcal{K}^* \mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)\mathcal{K}$, стоящему в j-й строке, k-м столбце. Используя (8), записываем

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dM^T(t) = \mathcal{K}^* \mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)\mathcal{K}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{21}$$

Полагаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_\zeta = \zeta C_{0,\zeta} A_{0,\zeta}^{+} W - \zeta h_\zeta T, \qquad \mathbf{A}_\zeta = \mathcal{K}^* A_{1,\zeta}\mathcal{K}, \\ &\mathbf{B}_\zeta = \mathcal{K}^* A_{2,\zeta} W, \qquad \mathbf{D}_\zeta = C_{0,\zeta} A_{3,\zeta}\mathcal{K}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \end{aligned} \tag{22}$$

Используя (17), (19), (21), получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dM^T(t) = \frac{1}{h_\zeta}\mathbf{A}_\zeta - \frac{\zeta}{h_\zeta^2}\mathbf{B}_\zeta F_\zeta \left(I_\delta + \frac{1}{h_\zeta}\mathbf{C}_\zeta F_\zeta\right)^{-1} \mathbf{D}_\zeta,$$

где $\zeta \in \mathbb{D}$.

Теорема 2. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов* (1) *с* $d \ge 1$ *и условие* (3) *выполнено. Предположим, что проблема моментов является неопределенной. Все решения проблемы моментов* (1) *получаются из соотношения*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dM^T(t) = \frac{1}{h_\zeta}\mathbf{A}_\zeta - \frac{\zeta}{h_\zeta^2}\mathbf{B}_\zeta F_\zeta \left(I_\delta + \frac{1}{h_\zeta}\mathbf{C}_\zeta F_\zeta\right)^{-1} \mathbf{D}_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{23}$$

где $\mathbf{A}_\zeta, \mathbf{B}_\zeta, \mathbf{C}_\zeta, \mathbf{D}_\zeta$ *являются матричными многочленами, определенными соотношением* (22), *со значениями в* $\mathbb{C}_{N\times N}, \mathbb{C}_{N\times\delta}, \mathbb{C}_{\delta\times\delta}, \mathbb{C}_{\delta\times N}$ *соответственно. Скалярный многочлен* h_ζ, $\deg h_\zeta \le$ $\le \tau$, *определяется в* (18). *Здесь* F_ζ *является аналитической в* $\mathbb{D}$ $\mathbb{C}_{\delta\times\delta}$*-значной функцией, такой,* *что* $F_\zeta^* F_\zeta \le I_\delta\ \forall\zeta \in \mathbb{D}$. *Наоборот, произвольная аналитическая в* $\mathbb{D}$ $\mathbb{C}_{\delta\times\delta}$*-значная функция, такая, что* $F_\zeta^* F_\zeta \le I_\delta\ \forall\zeta \in \mathbb{D}$, *порождает согласно соотношению* (23) *некоторое решение проблемы моментов* (1). *Соответствие между всеми аналитическими в* $\mathbb{D}$ $\mathbb{C}_{\delta\times\delta}$*-значными функциями, такими, что* $F_\zeta^* F_\zeta \le I_\delta\ \forall\zeta \in \mathbb{D}$, *и всеми решениями проблемы моментов* (1) *взаимно однозначно.*

Доказательство следует из вышеприведенных рассуждений.

***Пример* 1.** Пусть $N = 3$, $d = 1$, $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим УМТПМ с моментами S_0, S_1. Непосредственно проверяется, что условие (3) выполнено, а условие (C) теоремы 1 не выполняется. Таким образом, УМТПМ разрешима и является неопределенной. Матрица T_1 из (2) имеет вид

$$T_1 = (\gamma_{n,m})_{n,m=0}^{5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть H — гильбертово пространство, построенное так, как это было описано для проблемы моментов после формулы (4), и $\{x_n\}_{n=0}^5$ — элементы этого пространства со свойством (5).

Применим процесс ортогонализации (9), (10) к элементам $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$.

Шаг 0. Вычисляем $n_0 = \|x_0\|_H = \sqrt{(x_0, x_0)_H} = \sqrt{\gamma_{0,0}} = 1 \ne 0$. Полагаем $y_0 = x_0$.

Шаг 1. Вычисляем

$$n_1^2 = \|x_1 - (x_1, y_0)_H y_0\|_H^2 = \|x_1 - (x_1, x_0)_H x_0\|_H^2 = (x_1 - \gamma_{1,0}x_0, x_1 - \gamma_{1,0}x_0)_H =$$

$$= (x_1 - x_0, x_1 - x_0)_H = (x_1, x_1)_H - (x_1, x_0)_H - (x_0, x_1)_H + (x_0, x_0)_H =$$

$$= \gamma_{1,1} - \gamma_{1,0} - \gamma_{0,1} + \gamma_{0,0} = 0.$$

Следовательно, переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Вычисляем

$$n_2^2 = \|x_2 - (x_2, y_0)_H y_0\|_H^2 = \|x_2 - \gamma_{2,0}x_0\|_H^2 = (x_2, x_2)_H = \gamma_{2,2} = 1.$$

Полагаем

$$y_2 = x_2 - (x_2, y_0)_H y_0 = x_2 - \gamma_{2,0} y_0 = x_2.$$

На шаге 3 получим $n_3 = 0$, на шаге 4 — $n_4 = 0$. Наконец, на шаге 5 мы вычислим $n_5 = 1$ и $y_5 = x_5$.

Полагаем $\mathfrak{A} = \{y_0, y_2, y_5\}$. Пусть $u_0 := y_0 = x_0$, $u_1 := y_2 = x_2$, $u_2 := y_5 = x_5$. Тогда $\mathfrak{A} = \{u_k\}_{k=0}^2$. Заметим, что в данном случае $\rho = \tau = 2$, $\delta = 1$.

Полагаем $v_0 := Au_0 = Ax_0 = x_3$, $v_1 := Au_1 = Ax_2 = x_5$. Применим процесс ортогонализации (11), (12) к элементам v_0, v_1, u_0, u_1.

Шаг 0. Вычисляем

$$m_0^2 = \|u_0 - (u_0, v_0)_H v_0 - (u_0, v_1)_H v_1\|_H^2 = \|x_0 - (x_0, x_3)_H x_3 - (x_0, x_5)_H x_5\|_H^2 =$$

$$= \|x_0 - \gamma_{0,3} x_3 - \gamma_{0,5} x_5\|_H^2 = \|x_0 - x_3\|_H^2 = (x_0 - x_3, x_0 - x_3)_H =$$

$$= \gamma_{0,0} - \gamma_{0,3} - \gamma_{3,0} + \gamma_{3,3} = 0.$$

Переходим к следующему шагу.

Шаг 1. Вычисляем

$$m_1^2 = \|u_1 - (u_1, v_0)_H v_0 - (u_1, v_1)_H v_1\|_H^2 =$$

$$= \|x_2 - (x_2, x_3)_H x_3 - (x_2, x_5)_H x_5\|_H^2 = \|x_2 - \gamma_{2,3} x_3 - \gamma_{2,5} x_5\|_H^2 =$$

$$= \|x_2\|_H^2 = (x_2, x_2)_H = \gamma_{2,2} = 1.$$

Полагаем

$$f_1 = u_1 - (u_1, v_0)_H v_0 - (u_1, v_1)_H v_1 =$$

$$= x_2 - (x_2, x_3)_H x_3 - (x_2, x_5)_H x_5 = x_2 - \gamma_{2,3} x_3 - \gamma_{2,5} x_5 = x_2.$$

Положим $\mathfrak{A}' = \{v_0, v_1, f_1\}$. Пусть $v_2 = f_1 = x_2$. Тогда $\mathfrak{A}' = \{v_k\}_{k=0}^2$.

Используя (15), (16), записываем

$$W = \big((v_l, u_j)_H\big)_{0 \le j \le 1,\ 2 \le l \le 2} = \begin{pmatrix} (x_2, x_0)_H \\ (x_2, x_2)_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{2,0} \\ \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T = \big((v_l, u_j)_H\big)_{2 \le j \le 2,\ 2 \le l \le 2} = (v_2, u_2)_H = (x_2, x_5)_H = \gamma_{2,5} = 0.$$

Согласно (13), (14) вычисляем

$$A_{0,\zeta} = I_2 - \zeta\left((v_k, u_j)_H\right)_{j,k=0}^1 = I_2 - \zeta \begin{pmatrix} (x_3, x_0)_H & (x_5, x_0)_H \\ (x_3, x_2)_H & (x_5, x_2)_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{0,\zeta} = -\zeta\left((v_k, u_j)_H\right)_{2 \le j \le 2,\ 0 \le k \le 1} = -\zeta(\gamma_{3,5}, \gamma_{5,5}) = -\zeta(0, 1).$$

Тогда $h_\zeta = \det A_{0,\zeta} = 1 - \zeta$,

$$A_{0,\zeta}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\zeta \end{pmatrix} = A_{1,\zeta} = A_{2,\zeta} = A_{3,\zeta}.$$

Используя (20), записываем

$$\mathcal{K} = \big((x_k, u_j)_H\big)_{0\le j\le 1,\ 0\le k\le 2} = \begin{pmatrix} \gamma_{0,0} & \gamma_{1,0} & \gamma_{2,0} \\ \gamma_{0,2} & \gamma_{1,2} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя (22), вычисляем

$$\mathbf{C}_\zeta = -\zeta^2(1-\zeta), \quad \mathbf{A}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\zeta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\zeta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_\zeta = -\zeta(0,0,1-\zeta).$$

Наконец, с помощью (23) получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} dM^T(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\zeta} & \dfrac{1}{1-\zeta} & 0 \\ \dfrac{1}{1-\zeta} & \dfrac{1}{1-\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\zeta^2\dfrac{F_\zeta}{1-\zeta^2 F_\zeta} \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{24}$$

Любая аналитическая в $\mathbb{D}$ комплексная функция F_ζ такая, что $|F_\zeta| \le 1,\ \zeta \in \mathbb{D}$, порождает согласно соотношению (24) некоторое решение проблемы моментов (1). При этом получаются все решения проблемы моментов, а соответствие между функциями F_ζ и решениями взаимно однозначно. В частности, если положить $F_\zeta \equiv 1$, то

$$M(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{m}(t) & \widetilde{m}(t) & 0 \\ \widetilde{m}(t) & \widetilde{m}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{m}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

где

$$\widetilde{m}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ t = 0, \\ 1, & \text{если } \ t \in (0, 2\pi], \end{cases} \qquad \widehat{m}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ t = 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } \ t \in (0, \pi], \\ 1, & \text{если } \ t \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

является решением УМТПМ.

***Замечание* 3.** В процессе ортогонализации (9), (10), если $n_j = 0$ для некоторого j, то $n_k = 0$ для всех $j+1 \le k \le dN + N - 1$, имеющих вид $k = j + Nr$, $r \in \mathbb{N}$. Это следует из того, что оператор A изометрический. Действительно, если x_j лежит в линейной оболочке предыдущих элементов ортогонализуемой последовательности, то и вышеуказанные элементы тоже, что получается применением оператора A к разложению x_j по элементам линейной оболочки. В частности, в примере 1 мы видели, что $n_1 = 0$, а потому и $n_4 = 0$. Это наблюдение позволяет упростить процесс (9), (10).

Рассмотрим теперь случай определенной УМТПМ (1) и укажем, как пользоваться формулой (23) в этом случае. Согласно теореме 1, в этом случае индексы дефекта соответствующего оператора A в гильбертовом пространстве H равны нулю. Следовательно, $\mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN+N-1} = \mathrm{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1}$. Проводя процесс ортогонализации (9), (10), получаем ортонормированный базис $\mathfrak{A}$ в H. В данном случае базис $\mathfrak{A}_1$ задается так же, как и ранее, базис $\mathfrak{A}_2$ совпадает с $\mathfrak{A}$, а базис $\mathfrak{A}_3$ нам не понадобится. Полагаем $\rho := \mathrm{card}(\mathfrak{A}_1)$, $\tau := \mathrm{card}(\mathfrak{A}_2)$. При этом $1 \le \rho \le \tau \le N$. Еще один ортонормированный базис в H нам не потребуется. Согласно (8), в данном случае решение $M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}$, $t \in [0, 2\pi]$, находится из соотношения

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} dm_{k,j}(t) = \Big([E_H - \zeta A]^{-1} x_k, x_j \Big)_H, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае под матрицей $\mathcal{M}_{1,\zeta}(\Phi)$ понимаем матрицу оператора $E_H - \zeta A$ в базисе $\mathfrak{A}$, $\zeta \in \mathbb{D}$, т. е. матрицу $A_{0,\zeta}$ из соотношения (13). Тогда $A_{0,\zeta}^{-1}$ будет матрицей оператора $(E_H - \zeta A)^{-1}$ в базисе $\mathfrak{A}$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Заметим, что $A_{0,\zeta}^{-1} = \dfrac{1}{h_\zeta} A_{0,\zeta}^{+}$, где h_ζ, $A_{0,\zeta}^{+}$ определяются так, как и раньше. Обозначения $\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi)$ и $A_{1,\zeta}$ имеют тот же смысл, что и ранее. Формула (19) принимает вид

$$\mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) = \frac{1}{h_\zeta} A_{1,\zeta}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Повторяя дословно рассуждения после формулы (19) до (21), получаем соотношение

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} dM^T(t) = \mathcal{K}^* \mathcal{M}_{2,\zeta}(\Phi) \mathcal{K} = \frac{1}{h_\zeta} \mathcal{K}^* A_{1,\zeta} \mathcal{K} = \frac{1}{h_\zeta} \mathbf{A}_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

где $\mathbf{A}_\zeta$ задается так же, как и в (22).

Таким образом, приходим к следующему выводу: *формулой* (23) *можно пользоваться и для определенной УМТПМ* (1)*, опуская последнее слагаемое в правой части и учитывая вышеописанные замечания к общей процедуре построения коэффициентов.*

***Пример* 2.** Пусть $N = 2$, $d = 1$, $S_0 = S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим УМТПМ с моментами S_0, S_1. Непосредственно проверяется, что условие (3) выполнено, и условие (C) теоремы 1 также выполняется. Значит, УМТПМ разрешима и является определенной. Матрица T_1 из (2) имеет вид

$$T_1 = (\gamma_{n,m})_{n,m=0}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть H — гильбертово пространство, построенное так, как это было описано для проблемы моментов после формулы (4), и $\{x_n\}_{n=0}^3$ — элементы этого пространства со свойством (5).

Применим процесс ортогонализации (9), (10) к элементам x_0, x_1, x_2, x_3.

Шаг 0. Вычисляем $n_0 = \|x_0\|_H = \sqrt{(x_0, x_0)_H} = \sqrt{\gamma_{0,0}} = 1 \neq 0$. Полагаем $y_0 = x_0$.

Шаги 1 – 3 приводят к $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Полагаем $\mathfrak{A} = \{y_0\}$. Пусть $u_0 := y_0 = x_0$. Тогда $\mathfrak{A} = \{u_0\}$. Заметим, что в данном случае $\rho = \tau = 1$. Далее вычисляем

$$A_{0,\zeta} = 1 - \zeta,\ h_\zeta = 1 - \zeta,\ A^+_{0,\zeta} = 1 = A_{1,\zeta},$$

$$\mathcal{K} = (1, 1),$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dM^T(t) = \frac{1}{1-\zeta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Следовательно, единственное решение $M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^1$, $t \in [0, 2\pi]$, задается соотношением

$$m_{k,j}(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \leq 2\pi \end{cases} \qquad 0 \leq k, j \leq 1.$$

***Замечание* 4.** В одномерном случае формула Неванлинны для усеченной тригонометрической проблемы моментов была получена М. Е. Чумакиным (см. [10], теорема 2, [7], теорема 2). Формула Чумакина имеет несколько иной вид, отличный от формулы (23), и не было выяснено, можно ли ею пользоваться в вырожденном случае и как это делать. Общая идея построения формулы Неванлинны: использование формулы (8) или ее аналога (см. [10, с. 258, 259; 7, с. 323]) и вычисление соответствующей матрицы оператора в подходящем базисе совпадают, но детали построения и конечный результат у М. Е. Чумакина и в данной статье различны. Вырожденный случай рассматривался М. Е. Чумакиным отдельно, и был получен аналог формулы для решения из теоремы 1 (см. [7], замечание 2).

1. *Загороднюк С. М.* Усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов: операторный подход // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 6. – С. 786 – 797.
2. *Ando T.* Truncated moment problems for operators // Acta sci. math. (Szeged). – 1970. – **31**, № 4. – P. 319 – 334.
3. *Shohat J. A., Tamarkin J. D.* The problem of moments. – New York: Amer. Math. Soc., 1943. – 140 p.
4. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
6. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
7. *Чумакин М. Е.* Решения усеченной тригонометрической проблемы моментов // Учен. зап. Ульянов. пед. ин-та. – 1966. – **20**, вып. 4.- С. 311 – 355.
8. *Ильмушкин Г. М., Турицын А. Б.* Усеченная операторная тригонометрическая проблема моментов // Изв. вузов. Математика. – 1982. – **242**, № 7. – С. 18 – 21.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
10. *Чумакин М. Е.* О решениях усеченной тригонометрической проблемы моментов // Волж. мат. сб. – 1964. – Вып. 2. – С. 254 – 260.

Получено 20.01.12,
после доработки — 29.06.12