УДК 517.956.2

В. Н. Павленко, М. С. Федяшев (Челябин. гос. ун-т, Россия)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ И РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ЛИНЕЙНОГО РОСТА

We consider a resonance problem of the existence of periodic solutions of parabolic equations with discontinuous nonlinearities and a homogeneous Dirichlet boundary condition. It is assumed that the coefficients of the differential operator do not depend on time, and the growth of the nonlinearity at infinity is linear. The operator formulation of the problem reduces it to the problem of the existence of a fixed point of a convex compact mapping. A theorem on the existence of generalized and strong periodic solutions is proved.

Досліджується резонансна задача про існування періодичних розв'язків параболічних рівнянь із розривними нелінійностями та однорідною граничною умовою Діріхле. Припускається, що коефіцієнти диференціального оператора не залежать від часу, а зростання нелінійності на нескінченності є лінійним. Операторна постановка задачі зводить її до проблеми існування нерухомої точки в опуклозначного компактного відображення. Встановлено теореми існування узагальненого і сильного періодичного розв'язку.

1. Введение. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2, $T > 0$ — положительное число и

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x)$$

— равномерно эллиптический дифференциальный оператор в Ω [1] с коэффициентами $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ на $\overline{\Omega}$, $c \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$.

Исследуется проблема существования решения параболического уравнения с разрывной нелинейностью

$$u_t + Lu(x,t) - \lambda_1 u(x,t) + g(x,t,u(x,t)) = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

удовлетворяющего однородному граничному условию Дирихле

$$u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

и условию периодичности

$$u(x,0) = u(x,T),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

где $Q_T = \Omega \times (0,T)$, λ_1 — минимальное собственное значение дифференциального оператора L с граничным условием $u(x) = 0$ на $\partial\Omega$, $f \in L^p(Q_T)$, $p > N+2$. Предполагается, что нелинейность $g(x,t,u)$ удовлетворяет следующим условиям:

(*1) $g\colon Q_T\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева $\pmod 0$ [2], что означает существование множества $l \subset Q_T\times\mathbb{R}$, проекция которого на Q_T имеет меру нуль, и борелевой на $Q_T \times \mathbb{R}$ функции, совпадающей с $g(x,t,u)$ на $(Q_T \times \mathbb{R})\backslash l$;

(*2) для почти всех $(x,t) \in Q_T$ сечение $g(x,t,\bullet)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода и для произвольного $u \in \mathbb{R}$ верно включение $g(x,t,u) \in [g_-(x,t,u), g_+(x,t,u)]$, где

$$g_+(x,t,u) = \limsup_{\eta \to u} g(x,t,\eta),$$

$$g_-(x,t,u) = \liminf_{\eta \to u} g(x,t,\eta);$$

(*3) существуют постоянная $a > 0$ и функция $b \in L^p(Q_T)$ такие, что для почти всех $(x,t) \in Q_T$ выполняется неравенство

$$|g(x,t,u)| \leqslant a|u| + b(x,t) \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

***Замечание* 1.** Условие (*1) гарантирует суперпозиционную измеримость $g(x,t,u)$, т. е. измеримость по Лебегу на Q_T композиции $g(x,t,u(x,t))$ для любой измеримой функции $u(x,t)$ на Q_T [2]. Последнее совместно с условием (*3) обеспечивает принадлежность значений оператора Немыцкого $Gu = g(x,t,u(x,t))$ пространству $L^p(Q_T)$ для любого $u \in L^p(Q_T)$. Кроме того, выполнение условий (*1) – (*3) влечет справедливость важного для дальнейшего описания овыпукливания оператора Немыцкого в $L^p(Q_T)$ [2] $G^{\Box}u = \{z\colon Q_T \to \mathbb{R} \mid z(x,t)$ — измеримая на Q_T функция и для почти всех $(x,t) \in Q_T$ $z(x,t) \in [g_-(x,t,u(x,t)), g_+(x,t,u(x,t))]\}$. Для этого представления $G^{\Box}$ наличие свойства (*2) существенно.

Определение 1. *Сильным решением задачи* (1) – (3) *называется функция* $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$, *для которой выполнены условия* (2), (3) (*в смысле следа функции*) *и которая удовлетворяет почти всюду на* Q_T *уравнению* (1).

***Замечание* 2.** Поскольку $p > N+2$, пространство $W_p^{2,1}(Q_T)$ компактно вложено в $C(\overline{Q}_T)$, в силу чего равенства (2) и (3) для $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$ имеют смысл.

Определение 2. *Обобщенным решение задачи* (1) – (3) *называется функция* $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$, *удовлетворяющая условиям* (2), (3) *и для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *включению*

$$f(x,t) - u_t - Lu(x,t) + \lambda_1 u(x,t) \in [g_-(x,t,u(x,t)), g_+(x,t,u(x,t))]. \tag{5}$$

Определение 3. *Будем говорить, что для функции* $f(x,t)$ *в уравнении* (1) *выполнено* A_1*-условие, если в* $\mathbb{R}^{N+2}$ *найдется не более чем счетное семейство гиперповерхностей* $\{S_j,\ j \in J\}$, $S_j = \{(x,t,u) \mid u = \varphi_j(x,t), (x,t) \in Q_T\}$, $\varphi_j \in W_{2,\mathrm{loc}}^{2,1}(Q_T)$, *такое, что для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *неравенство* $g_-(x,t,u) \neq g_+(x,t,u)$ *влечет существование* $j \in J$, *для которого* $u = \varphi_j(x,t)$ *и либо*

$$(\partial\varphi_j/\partial t + L\varphi_j(x,t) - \lambda_1\varphi_j(x,t) + g_-(x,t,\varphi_j(x,t)) - f(x,t)) \times$$

$$\times (\partial\varphi_j/\partial t + L\varphi_j(x,t) - \lambda_1\varphi_j(x,t) + g_+(x,t,\varphi_j(x,t)) - f(x,t)) > 0, \tag{6}$$

либо

$$\partial\varphi_j/\partial t + L\varphi_j(x,t) - \lambda_1\varphi_j(x,t) + g(x,t,\varphi_j(x,t)) = f(x,t).$$

***Замечание* 3.** Неравенство (6) есть отрицание (5) для $u = \varphi_j(x,t)$. Выделим класс уравнений вида (1), для которого выполнено A_1-условие. Пусть в (1) $c(x)$ и $f(x,t)$ равны нулю, а $g(x,t,u) \equiv g(u)$. Предположим, что $g(u)$ имеет разрывы только первого рода и непрерывна слева на $\mathbb{R}$ или непрерывна справа на $\mathbb{R}$. Тогда $g(u)$ борелева и множество ее точек разрыва не более чем счетно. Обозначим через $\{u_j,\ j \in B\}$ множество точек разрыва функции $g(u)$ (B — подмножество $\mathbb{N}$). Тогда поверхности разрыва нелинейности $g(u)$ представляются в виде $S_j = \{(x,t,u) \mid u \equiv u_j, (x,t) \in Q_T\}, j \in B$. В этом случае выполнение A_1-условия означает, что для любого $j \in B$ либо $(g_-(u_j) - \lambda_1 u_j)(g_+(u_j) - \lambda_1 u_j) > 0$ (т. е. скачок $g(u)$ в точке u_j должен быть или над прямой $v = \lambda_1 u$, или под ней), либо $g(u_j) = \lambda_1 u_j$. Заметим, что если дополнительно предположить, что $g(u)$ имеет линейный рост на бесконечности, то она удовлетворяет условиям (*1)–(*3).

В пространстве $L^p(Q_T)$ определим линейный оператор A с областью определения

$$D(A) = \left\{u \in W_p^{2,1}(Q_T) \mid u \text{ удовлетворяет условиям (*2) и (*3)}\right\}$$

равенством

$$Au = u_t + Lu(x,t) \quad \forall u \in D(A).$$

Заметим, что λ_1 — минимальное собственное значение оператора A. Действительно, если λ — собственное значение оператора A и $u(x,t)$ — собственная функция A, соответствующая λ, то

$$\lambda \int\limits_{Q_T} u^2(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} (Au(x,t))\, u(x,t)dxdt =$$

$$= \int\limits_0 dt \int\limits_\Omega (Lu(x,t))\, u(x,t)dx \geqslant \lambda_1 \int\limits_{Q_T} u^2(x,t)dxdt. \tag{7}$$

Здесь мы воспользовались условием периодичности (3) для $u(x,t)$ и свойством минимального собственного значения оператора L с граничным условием $u|_{\partial\Omega} = 0$ [3]:

$$\int\limits_\Omega (Lu(x))u(x)dx \geqslant \lambda_1 \int\limits_\Omega u^2(x)dx \quad \forall u \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Из неравенства (7) следует, что $\lambda \geqslant \lambda_1$. Кроме этого, если $v(x)$ — собственная функция оператора L с однородным граничным условием Дирихле, соответствующая собственному значению λ_1, то $Av = Lv = \lambda_1 v$, и, значит, λ_1 — собственное значение A. Поскольку λ_1 — минимальное собственное значение оператора A, соответствующее ему собственное подпространство одномерно, причем базисную функцию этого подпространства $v(x)$ можно считать положительной в Ω и $\partial v/\partial\nu < 0$ на $\partial\Omega$, где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ по отношению к Ω [4].

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что*:

1) *для функции* $g(x,t,u)$ *выполнены условия* (*1)–(*3) *с* $p > N + 2$;

2) *для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ $\ g(x,t,u)\operatorname{sgn} u \geqslant d(x,t)$ $\ \forall u \in \mathbb{R}$, *где* $d \in L^1(Q_T)$;

3) для положительного решения задачи Дирихле $Lv = \lambda_1 v$, $v|_{\partial\Omega} = 0$ *имеют место неравенства*

$$\int\limits_{Q_T} \overline{g}_-(x,t)v(x)dxdt < \int\limits_{Q_T} f(x,t)v(x)dxdt < \int\limits_{Q_T} \underline{g}_+(x,t)v(x)dxdt,$$

где $\underline{g}_+(x,t) = \liminf_{u\to+\infty} g(x,t,u)$, $\overline{g}_-(x,t) = \limsup_{u\to-\infty} g(x,t,u)$.

Тогда задача (1) – (3) *имеет обобщенное решение, а если для* $f(x,t)$ *выполнено* A_1*- условие, то обобщенное решение будет сильным.*

Задача о периодических решениях уравнений параболического типа с гладкими или каратеодориевыми нелинейностями изучалась многими авторами. Так, Ю. С. Колесов [5] методом верхних и нижних решений доказал теорему существования классических периодических решений квазилинейных параболических уравнений с граничными условиями Дирихле. Этот подход получил дальнейшее развитие для других краевых условий в работе [6]. И. И. Шмулев [7] доказательство существования классических периодических решений квазилинейного параболического уравнения с неоднородным граничным условием Дирихле провел методом Лере – Шаудера на базе полученных априорных оценок решения. В монографии [8, с. 495 – 498] проблема существования сильных периодических решений квазилинейных параболических уравнений решается методом монотонных операторов, а для уравнения Навье – Стокса реализуется подход А. Пуанкаре, который сводит задачу существования периодического решения к отысканию неподвижных точек специально построенного отображения. В [9] задача (1) – (3) рассматривается в случае, когда нелинейность $g(x,t,u) \equiv g(u)$ гладкая, причем существуют конечные пределы $g(\pm\infty) = \lim_{s\to\pm\infty} g(s)$ и $g(-\infty) < g(s) < g(+\infty)$ $\forall s \in \mathbb{R}$. Получен критерий существования классического периодического решения уравнения (1). В работе [10] теорема существования сильного решения задачи (1) – (3) с каратеодориевой нелинейностью $g(x,t,u)$ получена как следствие общей теоремы существования в гильбертовом пространстве, доказанной авторами. Вопросы существования устойчивых и неустойчивых периодических решений и наличие более одного периодического решения при различных граничных условиях обсуждались в работах [11 – 13]. Сильные решения краевых задач для уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями изучались в работах [14 – 17]. K.-C. Chang [14] применил к исследованию этой проблемы теорию топологической степени многозначных отображений, S. Carl и S. Heikkila [15] использовали технику монотонных итераций, в [16, 17] теоремы существования сильных решений были получены методом верхних и нижних решений. Существованию периодических решений для эволюционных включений в банаховых пространствах посвящено большое количество работ. В некоторых из них в качестве приложения общих теорем исследуется проблема существования обобщенных периодических решений уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями в нерезонансном случае (см., например, [18 – 20]). При этом вопрос о существовании сильных периодических решений в этих работах не рассматривался. В статье авторов [21] задача (1) – (3) изучалась в случае ограниченной нелинейности $g(x,t,u)$, а в [22] — в случае подлинейного роста нелинейности, т. е. когда для почти всех $(x,t) \in Q_T$ справедлива оценка $|g(x,t,u)| \le a|u|^\alpha + b(x,t)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, где $0 \le \alpha < 1$, a — положительная константа и $b \in L^p(Q_T)$.

В данной работе устанавливается существование обобщенных решений резонансной задачи (1) – (3) при допущении линейного роста нелинейности и указаны достаточные условия существования сильных периодических решений уравнения (1) с граничным условием (2).

2. Операторная постановка задачи (1) – (3). Линейный оператор A в пространстве $L^p(Q_T)$, определенный выше, имеет компактную резольвенту [4]. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку λ_1 — минимальная точка спектра оператора A, полуинтервал $[\lambda_1 - \varepsilon, \lambda_1)$ содержится в резольвентном множестве оператора A и оператор $(A-(\lambda_1-\varepsilon)I)^{-1}$ компактен (I — тождественный оператор). Нелинейность $g(x,t,u)$ порождает оператор Немыцкого G в $L^p(Q_T)$, действующий по правилу

$$Gu = g(x,t,u(x,t)) \quad \forall u \in L^p(Q_T).$$

В силу условия (*3) для G выполняется неравенство

$$\|Gu\| \leqslant a\|u\| + \|b\| \quad \forall u \in L^p(Q_T) \tag{8}$$

(измеримость Gu на Q_T следует из условия (*1) [2]). Здесь и далее $\|\ \|$ — норма в $L^p(Q_T)$. Пусть

$$G^{\square}u = \bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{clco}\{z = Gv \mid \|v-u\| < \varepsilon\}$$

— овыпукливание оператора G. В [2] показано, что для любого $u \in L^p(Q_T)$ $G^{\square}u = \{z\colon Q_T \to \to \mathbb{R} \mid z(x,t)$ — измеримая на Q_T функция и для почти всех $(x,t)\in Q_T$ $z(x,t)\in[g_-(x,t,u(x,t)), g_+(x,t,u(x,t))]\}$. Из (8) для произвольного $u \in L^p(Q_T)$ и $z \in G^{\square}(u)$ следует неравенство

$$\|z\| \leqslant a\|u\| + \|b\|. \tag{9}$$

Заметим, что $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда u удовлетворяет включению

$$f - Au + \lambda_1 u \in G^{\square}u.$$

Преобразуем его к виду

$$Au - (\lambda_1-\varepsilon)u \in f - G^{\square}u + \varepsilon u,$$

что равносильно включению

$$u \in (A-(\lambda_1-\varepsilon)I)^{-1}(f - G^{\square}u + \varepsilon u) \equiv \Phi u,$$

т. е. существованию неподвижной точки у многозначного оператора Φ в $L^p(Q_T)$. Как и в [23], проверяется, что значения оператора Φ — выпуклые компакты, он полунепрерывен сверху в $L^p(Q_T)$ и образ любого шара при отображении Φ предкомпактен. Операторы с такими свойствами называют компактными выпуклозначными [24]. Согласно [24, с.107], для доказательства наличия неподвижной точки у отображения Φ достаточно установить ограниченность в $L^p(Q_T)$ множества всех решений семейства включений $u \in \tau\Phi u$, $\tau \in [0,1)$ (принцип Лере–Шаудера для многозначных компактных отображений).

3. Доказательство теоремы 1. ***3.1. Существование обобщенного решения задачи* (1)–(3).** Допустим, что Φ не имеет неподвижных точек. Тогда в силу принципа Лере–Шаудера для многозначных компактных отображений существуют последовательности $(\tau_n) \subset [0,1)$, $(u_n) \subset L^p(Q_T)$ такие, что $u_n \in \tau_n\Phi u_n$ и $\|u_n\| > n$. Отсюда следует для любого натурального n существование функции $z_n \in G^{\square}u_n$, для которой справедливо равенство

$$Au_n - (\lambda_1-\varepsilon)u_n = \tau_n f - \tau_n z_n + \tau_n\varepsilon u_n. \tag{10}$$

Разделив обе части (10) на $\|u_n\|$ и положив $v_n = u_n\|u_n\|^{-1}$, получим

$$(A - (\lambda_1 - \varepsilon)I)v_n = \tau_n f\|u_n\|^{-1} - \tau_n z_n\|u_n\|^{-1} + \tau_n\varepsilon v_n. \tag{11}$$

Поскольку $\tau_n \subset [0,1)$, $\|v_n\| = 1$, $\|z_n\|\|u_n\|^{-1} \leqslant a + \|b\|\|u_n\|^{-1}$ (в силу оценки (9)) и $L^p(Q_T)$ — рефлексивное пространство, можно считать, что $\tau_n \to \tau \in [0,1)$, $v_n \rightharpoonup v$, $z_n\|u_n\|^{-1} \rightharpoonup k$ в $L^p(Q_T)$, переходя при необходимости к подпоследовательности. Поэтому правая часть равенства (11) слабо сходится к $-\tau k + \tau\varepsilon v$. Так как оператор $(A - (\lambda_1 - \varepsilon)I)^{-1}$ компактный, из (11) следует сильная сходимость (v_n) к $v \in D(A)$, и, значит, $\|v\| = 1$. Переходя в (11) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$Av - \lambda_1 v = -(1-\tau)\varepsilon v - \tau k. \tag{12}$$

Умножим обе части последнего равенства на $v(x,t)$ и проинтегрируем по Q_T:

$$\int\limits_{Q_T} (Av(x,t) - \lambda_1 v(x,t))v(x,t)dxdt + (1-\tau)\varepsilon \int\limits_{Q_T} v^2(x,t)dxdt + \tau \int\limits_{Q_T} k_v(x,t)v^2(x,t)dxdt = 0, \tag{13}$$

где $k_v(x,t) = k(x,t)/v(x,t)$, если $v(x,t) \neq 0$, и $k_v(x,t) = 0$, если $v(x,t) = 0$. Заметим, что первое и второе слагаемые в левой части (13) неотрицательные, причем $\int_{Q_T} v^2(x,t)dxdt > 0$. Если установить неотрицательность $k_v(x,t)$ почти всюду на множестве $Q^\circ = \{(x,t) \in Q_T \mid v(x,t) \neq \neq 0\}$, то из (13) непосредственно следует, что $\tau = 1$ и $k_v(x,t) = 0$ почти всюду на Q°. Отсюда с учетом (12) следует равенство нулю $k(x,t)$ почти всюду на Q_T (в силу (12) функция $k(x,t)$ равна нулю почти всюду на $Q_T \backslash Q^\circ$). Таким образом, правая часть равенства (12) окажется равной нулю и, значит, $v(x,t)$ — собственная функция оператора A, соответствующая собственному значению λ_1. Докажем, что почти всюду на Q° функция $k_v(x,t)$ неотрицательна. Поскольку правая часть (11) равномерно по n ограничена в $L^p(Q_T)$, последовательность (v_n) ограничена в $W_p^{2,1}(Q_T)$ [4]. По условию $p > N+2$, поэтому $W_p^{2,1}(Q_T)$ компактно вложено в пространство $C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ функций $u(x,t)$, непрерывных вместе с производными $u_{x_j}(x,t)$, $j = \overline{1,N}$, на $\overline{Q}_T$ [25]. Значит, можно считать, что $v_n \to v$ в $C^{1,0}(Q_T)$. Пусть $Q^\varepsilon = \{(x,t) \in Q_T \mid |v(x,t)| > \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon < \|v\|_{C(\overline{Q}_T)}$, и $\|\ \|^{(\varepsilon)}$ — норма в $L^p(Q^\varepsilon)$. Так как $v_n \to v$ в $C(\overline{Q}_T)$, для любого $0 < \varepsilon < \|v\|_{C(\overline{Q}_T)}$ найдется $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $|v_n(x,t)| > \varepsilon/2$ на Q^ε для произвольного $n > n_0(\varepsilon)$. Для любого $n > n_0(\varepsilon)$ имеем

$$\left\|\frac{z_n}{u_n} - \frac{z_n}{v\|u_n\|}\right\|^{(\varepsilon)} = \left\|\frac{z_n}{\|u_n\|}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v}\right)\right\|^{(\varepsilon)} = \left\|\frac{z_n}{\|u_n\|}\frac{v - v_n}{v_n v}\right\|^{(\varepsilon)} \leqslant \frac{\|z_n\|}{\|u_n\|}\frac{2}{\varepsilon^2}\|v_n - v\|_{C(\overline{Q}^\varepsilon)},$$

из чего заключаем о сильной сходимости $\dfrac{z_n}{u_n} - \dfrac{z_n}{v\|u_n\|}$ к нулю в $L^p(Q^\varepsilon)$, что влечет слабую сходимость $\dfrac{z_n}{u_n}$ к k_v в $L^p(Q^\varepsilon)$. Далее, для любой неотрицательной функции $\varphi \in C(\overline{Q}_T)$ и $\varepsilon \in (0, \|v\|_{C(\overline{Q}_T)})$

$$\int\limits_{Q^\varepsilon} k_v(x,t)\varphi(x,t)dxdt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{Q^\varepsilon} \frac{z_n(x,t)}{u_n(x,t)}\varphi(x,t)dxdt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{Q^\varepsilon} \frac{z_n(x,t)\operatorname{sgn} u_n(x,t)}{\|u_n\||v_n(x,t)|}\varphi(x,t)dxdt.$$

Поскольку последовательность (v_n) сходится в $C(\overline{Q}_T)$, она ограничена в этом пространстве, и, значит, существует постоянная $C > 0$ такая, что $|v_n(x,t)| \leqslant C$ на $\overline{Q}_T$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому с учетом условия 2 теоремы 1 получаем

$$\frac{z_n(x,t)\operatorname{sgn} u_n(x,t)}{\|u_n\||v_n(x,t)|}\varphi(x,t) \geqslant \frac{d(x,t)}{\|u_n\|C}\varphi(x,t).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{Q^\varepsilon} k_v(x,t)\varphi(x,t)dxdt \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{C\|u_n\|}\int\limits_{Q^\varepsilon} d(x,t)\varphi(x,t)dxdt = 0,$$

так как $\|u_n\| \to \infty$ и $d\cdot\varphi \in L^1(Q^\varepsilon)$. Из этого заключаем о неотрицательности $k_v(x,t)$ почти всюду на Q^ε. Поскольку $Q^\circ = \bigcup_{\varepsilon>0} Q^\varepsilon$, неотрицательность $k_v(x,t)$ почти всюду на Q° доказана. Итак, $v(x,t)$ — собственная функция оператора A, соответствующая собственному значению λ_1, $v_n(x,t) \to v(x,t)$ в $C^{1,0}(\overline{Q}_T)$. Как отмечалось выше, $v(x,t) = v(x)$ (не зависит от t), $v(x) = 0$ на $\partial\Omega$, и либо $v(x) > 0$ в Ω и $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} < 0$, либо $v(x) < 0$ в Ω и $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} > 0$, ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ по отношению к Ω. Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $v_n(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) и (3). В таком случае найдется натуральное число m такое, что для любого $n > m$ $v_n(x,t)\operatorname{sgn} v(x) > 0$ на Q_T [4] (лемма 2.2). Умножим обе части равенства (10) на $v(x)$ и проинтегрируем по Q_T. Так как

$$\int\limits_{Q_T} (Au_n(x,t) - \lambda_1 u_n(x,t))\, v(x)\, dxdt = \int\limits_{Q_T} u_n(x,t)\, (Lv(x) - \lambda_1 v(x))\, dxdt = 0,$$

в результате получим

$$\tau_n \int\limits_{Q_T} f(x,t)v(x)\, dxdt = (1-\tau_n)\varepsilon \int\limits_{Q_T} u_n(x,t)v(x)\, dxdt + \tau_n \int\limits_{Q_T} z_n(x,t)v(x)\, dxdt.$$

Поскольку $(\tau_n) \subset [0,1)$ и $\tau_n \to 1$, а

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{Q_T} u_n(x,t)v(x)\, dxdt = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|\int\limits_{Q_T} v_n(x,t)v(x)\, dxdt = +\infty,$$

найдется $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\int\limits_{Q_T} f(x,t)v(x)\, dxdt > \int\limits_{Q_T} z_n(x,t)v(x)\, dxdt \tag{14}$$

для любого $n > m_0$. Для произвольного $n > n_1 = \max\{m, m_0\}$ (14) перепишем в виде

$$\int\limits_{Q_T} f(x,t)v(x)\, dxdt > \int\limits_{Q_T} z_n(x,t)\operatorname{sgn} u_n(x,t)|v(x)|\, dxdt. \tag{15}$$

Из условия 2 теоремы 1 для любого $n > n_1$ $z_n(x,t)\operatorname{sgn} u_n(x,t) \geqslant d(x,t)$ почти всюду на Q_T. В силу леммы Лебега – Фату [26]

$$\liminf_{n\to\infty}\int\limits_{Q_T} z_n(x,t)\operatorname{sgn} u_n(x,t)|v(x)|\,dxdt \geqslant \int\limits_{Q_T}\liminf_{n\to\infty}\left(z_n(x,t)\operatorname{sgn} u_n(x,t)|v(x)|\right)\,dxdt.$$

Отсюда если $v(x) > 0$ на Ω, то

$$\int\limits_{Q_T} f(x,t)v(x)\,dxdt \geqslant \int\limits_{Q_T}\liminf_{n\to\infty} g_-(x,t,u_n(x,t))v(x)\,dxdt = \int\limits_{Q_T}\underline{g}_+(x,t)v(x)\,dxdt,$$

так как $u_n(x,t) = \|u_n\|v_n(x,t) \to +\infty$. Аналогично, если $v(x) < 0$ на Ω, то

$$\int\limits_{Q_T} f(x,t)v(x)\,dxdt \geqslant \int\limits_{Q_T} -\limsup_{n\to\infty} g_+(x,t,u_n(x,t))|v(x)|\,dxdt = -\int\limits_{Q_T}\overline{g}_-(x,t)|v(x)|\,dxdt.$$

Полученное неравенство противоречит условию 3 теоремы 1. Таким образом, установлено существование неподвижной точки у отображения Φ в $L^p(Q_T)$, что равносильно существованию обобщенного решения задачи (1)–(3).

***3.2 Существование сильного решения задачи* (1)–(3).** Пусть для $f(x,t)$ в уравнении (1) выполнено A_1-условие. Покажем, что тогда обобщенное решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) является ее сильным решением. Заметим, что $u(x,t)((x,t)\in Q_T)$ — точка непрерывности $g(x,t,\bullet)$ тогда и только тогда, когда $g_-(x,t,u(x,t)) = g_+(x,t,u(x,t))$. Почти всюду на множестве таких $(x,t)\in Q_T$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Рассмотрим множество $D = \{(x,t)\in Q_T \mid g_-(x,t,u(x,t)) \neq g_+(x,t,u(x,t))\}$. Поскольку f удовлетворяет A_1-условию, с точностью до множества меры нуль $D = \bigcup_{j\in J} D_j$, $D_j = \{(x,t)\in Q_T \mid u(x,t) = \varphi_j(x,t)\}$, причем $D_j = D_j^* + D_j^\circ$ для любого $j\in J$, где

$$D_j^* = \left\{(x,t)\in D_j \mid f(x,t) - \frac{\partial\varphi_j}{\partial t}(x,t) - L\varphi_j(x,t) + \lambda_1\varphi_j(x,t) \notin \right.$$

$$\left. \notin [g_-(x,t,\varphi_j(x,t)), g_+(x,t,\varphi_j(x,t))]\right\},$$

$$D_j^\circ = \left\{(x,t)\in D_j \mid \frac{\partial\varphi_j}{\partial t}(x,t) + L\varphi_j(x,t) + g(x,t,\varphi_j(x,t)) = f(x,t)\right\}.$$

Заметим, что $\operatorname{mes} D_j^* = 0$ для всех $j\in J$, так как $u(x,t)$ удовлетворяет (5) для почти всех $(x,t)\in Q_T$. Поскольку J не более чем счетно, $\bigcup_{j\in J} D_j^*$ — множество меры нуль. Таким образом, $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) для почти всех $(x,t)\in Q_T$ и, значит, $u(x,t)$ — сильное решение задачи (1)–(3).

Теорема 1 доказана.

1. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 540 с.
2. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
3. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
4. *De Coster C., Omari P.* Unstable periodic solutions of a parabolic problem in the presence of non-well-ordered lower and upper solutions // J. Funct. Anal. – 2000. – **175**. – P. 52–88.

5. *Колесов Ю. С.* Об одном признаке существования периодических решений у параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1966. – **170**, № 5. – С. 1013 – 1015.
6. *Amann H.* Periodic solutions of semilinear parabolic equations // Nonlinear Anal. A collection of paper in honor of E. Rothe / Eds L. Cesari, R. Kannan, H. F. Weinberger. – New York: Acad. Press, 1978. – P. 1 – 29.
7. *Шмулев И. И.* Периодические решения первой краевой задачи для параболических уравнений // Мат. сб. – 1965. – **66(108)**, № 3. – С. 398 – 410.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
9. *Castro A., Lazer A. C.* Results on periodic solutions of parabolic equation suggested by elliptic theory // Boll. Unione mat. ital. – 1982. – **B1**. – P. 1089 – 1104.
10. *Brezis H., Nirenberg L.* Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems // Ann. Scuola norm. super Pisa. – 1978. – **5**, № 2. – P. 225 – 325.
11. *Danser E. N., Hess P.* On stable solutions of quasilinear periodic — parabolic problems // Ann. Scuola norm. super. Pisa CL. Sci. Ser. 4. – 1987. – **14**, № 1. – P. 123 – 141.
12. *Hirano N., Kim W. S.* Existence of stable and unstable solutions for semilinear parabolic problems with a jumping nonlinearity // Nonlinear Anal. – 1996. – **26**, № 6. – P. 1143 – 1160.
13. *Kim W. S.* Existence of multiple periodic solutions for semilinear parabolic equations with sublinear growth nonlinearities // J. Korean Math. Soc. – 2009. – **46**, № 4. – P. 691 – 699.
14. *Chang K.-C.* Free boundary problems and set-valued mappings // J. Different. Equat. – 1983. – **49**, № 1. – P. 1 – 28.
15. *Carl S.* On a parabolic boundary value problem with discontinuous nonlinearity // Nonlinear Anal. – 1990. – **15**, № 11. – P. 1091 – 1095.
16. *Павленко В. Н.* О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 520 – 526.
17. *Павленко В. Н., Ульянова О. В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 4. – С. 499 – 504.
18. *Papageorgiou N. S.* Boundary value problem for evolution inclusions // Comment. math. Univ. carol. – 1988. – **29**, № 2. – P. 355 – 363.
19. *Cardinali T., Papageorgiou N. S.* Periodic problems and problems with discontinuities for nonlinear parabolic equations // Czech. Math. J. – 2000. – **50**, № 125. – P. 467 – 497.
20. *Kandilakis D. A., Papageorgiou N. S.* Periodic solutions for nonlinear evolution inclusions // Arch. math. – 1996. – **32**, № 3. – P. 195 – 209.
21. *Павленко В. Н., Федяшев М. С.* Периодические решения параболических уравнений с разрывными нелинейностями // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 27(242). – С. 94 – 102.
22. *Павленко В. Н., Медведев Д. Ю.* Периодические решения параболического уравнения с зависящими от времени коэффициентами и разрывной нелинейностью // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 26(241). – С. 20 – 26.
23. *Павленко В. Н.* Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 1994. – **45**, № 6. – С. 729 – 736.
24. *Борисович Ю. Г. и др.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. – М.: КомКнига, 2005. – 216 с.
25. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
26. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

Получено 17.11.11,
после доработки — 09.06.12