УДК 517.9

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНІ m-ФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. II

We consider the problem of the construction of higher terms of asymptotic many-phase soliton-type solutions of the singular perturbed Korteweg – de Vries equation with variable coefficients. The accuracy with which the obtained asymptotic solution satisfies the original equation is determined.

Рассматривается задача о построении старших членов асимптотического многофазового солитоноподобного решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами. Установлена оценка, с которой построенное асимптотическое решение удовлетворяет исходному уравнению.

Дана стаття є продовженням праці [41], тому у ній продовжено нумерацію формул, тверджень і посилань з [41].

***4.2. Необхідні умови існування розв'язків системи рівнянь для визначення сингулярної частини асимптотики* (11), (12) *у просторі* G_m^0.** Сингулярна частина асимптотики (11), (12) — функції $V_j(x, t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $j = \overline{1, N}$, визначаються з лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами [41], які в околі кривої $x = \varphi_s(t)$, $s = \overline{1, m}$, мають вигляд

$$\sum_{p,q,r=1}^{m} \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial\tau_p \partial\tau_q \partial\tau_r} = \sum_{k=1}^{m} \left[-a_0(\varphi_s(t), t)\varphi_k'(t) + b_0(\varphi_s(t), t) u_0(\varphi_s(t), t) \right] \frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_k} +$$

$$+ b_0(\varphi_s(t), t) \sum_{k=1}^{m} \left(V_0 \frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_k} + V_{js} \frac{\partial V_0}{\partial \tau_k} \right) + \mathcal{F}_{js}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), \quad j = \overline{1, N}, \quad s = \overline{1, m}. \tag{49}$$

Тут значення функцій $\mathcal{F}_{js} = \mathcal{F}_{js}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, m}$, знаходяться рекурентним чином після відповідного визначення функцій $V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $V_{1s}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), \ldots$ $\ldots, V_{j-1,s}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$. При цьому функції $\mathcal{F}_{js}$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, m}$, також залежать (певним чином) від коефіцієнтів рівняння (8).

У першій частині даної праці [41] зроблено припущення (20) – (23) щодо коефіцієнтів асимптотичних розкладів для коефіцієнтів (9), членів регулярної частини асимптотичного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза (8), функцій $\mathcal{F}_{js}$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, m}$, згідно з якими неоднорідності у правих частинах рівнянь (49) — функції $\mathcal{F}_{js}$, $j = \overline{1, N}$, збігаються між собою при всіх значеннях $s = \overline{1, m}$. Зрозуміло, що у такому випадку можна вважати, що функції $V_{js}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, N}$, також задовольняють цю умову, тобто збігаються між собою при всіх значеннях $s = \overline{1, m}$. Тому у подальшому при записі функцій $\varphi_s(t)$, $\mathcal{F}_{js}$, $V_{js}(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, m}$, індексом s нехтуємо.

Має місце наступна теорема, яка встановлює необхідні умови існування розв'язку рівнянь (49) у просторі G_m^0.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (20) – (22), *функція* $\mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ *належить простору* G_m^0, $j = \overline{1, N}$. *Тоді якщо рівняння* (49) *має розв'язок* $V_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in G_m^0$,

$j=\overline{1,N}$, то для кожного $k=\overline{1,m}$ виконується умова ортогональності вигляду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\ldots\lim_{\tau_{k-1}\to\pm\infty}\lim_{\tau_{k+1}\to\pm\infty}\ldots\lim_{\tau_m\to\pm\infty}\left[\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\times\right.$$

$$\left.\times V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\right]d\tau_k=0,\quad j=\overline{1,N},\tag{50}$$

де позначення $\lim_{\tau_n\to\pm\infty}(\cdot)$, $n=\overline{1,m}$, $n\neq k$, у повторних границях означає, що аргумент τ_n прямує або до $+\infty$, або ж до $-\infty$.

Доведення. Не втрачаючи загальності, вважаємо $k=\overline{1,m}$ фіксованим. Оскільки $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ належить простору G_m^0, $j=\overline{1,N}$, то очевидно, що при кожному $j=\overline{1,N}$ функція

$$f_j(t,\tau_k):=\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\ldots\lim_{\tau_{k-1}\to\pm\infty}\lim_{\tau_{k+1}\to\pm\infty}\ldots\lim_{\tau_m\to\pm\infty}\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\tag{51}$$

належить простору G_1^0.

Аналогічно, оскільки згідно з теоремою 1 [41] $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in G_m^0$, функція

$$v_0(t,\tau_k):=\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\lim_{\tau_2\to\pm\infty}\ldots\lim_{\tau_{k-1}\to\pm\infty}\lim_{\tau_{k+1}\to\pm\infty}\ldots\lim_{\tau_m\to\pm\infty}V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\tag{52}$$

належить простору G_1^0 і, отже, $f_j(t,\tau_k)v_0(t,\tau_k)\in G_1^0$, $j=\overline{1,N}$.

Розглянемо рівняння (49). Домножимо це рівняння на функцію $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ і від правої та лівої частин отриманого співвідношення обчислимо повторні границі при $\tau_1\to\pm\infty$, $\tau_2\to\pm\infty$, ... , $\tau_{k-1}\to\pm\infty$, $\tau_{k+1}\to\pm\infty$, ..., $\tau_m\to\pm\infty$ вигляду (50). В результаті з урахуванням позначень (20) – (22) отримаємо співвідношення

$$v_0\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau_k^3}=-a_0(t)\varphi_k'(t)v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau_k}+b_0(t)\left(u_0(t)v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau_k}+v_0^2\frac{\partial v_j}{\partial\tau_k}+v_0v_j\frac{\partial v_0}{\partial\tau_k}\right)+v_0f_j(t,\tau_k),\tag{53}$$

де $v_0=v_0(t,\tau_k)\in G_1^0$, $v_j=v_j(t,\tau_k)\in G_1^0$, $j=\overline{1,N}$.

Зінтегруємо рівняння (53) по τ_k в межах від $-\infty$ до $+\infty$ і виконаємо інтегрування частинами в лівій частині отриманого виразу. Тоді, враховуючи властивість $v_0(t,\tau_k)\in G_1^0$ і те, що функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ задовольняє рівняння (18), отримуємо співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_j(t,\tau_k)v_0(t,\tau_k)d\tau_k=0,\quad j=\overline{1,N},$$

яке з урахуванням позначень (51), (52) еквівалентне (50).

Теорему 3 доведено.

Зауваження 1. Незважаючи на те, що функції $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $j=\overline{1,N}$, поліноміально залежать від функцій $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $V_1(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, ... , $V_{j-1}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in$ $\in G_m^0$ (це випливає з запису рівняння (8), (9)), функції $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $j=\overline{1,N}$, не обов'язково є елементами простору G_m^0, тобто умова теореми 3 про належність цієї функції простору G_m^0 потребує перевірки для кожного розглядуваного випадку. Тому в подальшому припускаємо, що умова $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in G_m^0$, $j=\overline{1,N}$, має місце.

***Зауваження* 2.** У випадку $m = 1$ функції, що визначають сингулярну частину асимптотики сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза (8), при будь-якому значенні $\mu > 0$ досить швидко (див. п. 1^0 в означенні простору G_1 в [41]) прямують до нуля поза μ-околом Φ_μ кривої $x = \varphi(t)$.

Аналогічно, у випадку $m > 1$ при виконанні умов $\varphi_s(0) = 0$, $s = \overline{1,m}$, функція $V_j = V_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in G_m^0$, $j = \overline{1,N}$, що є розв'язком рівняння (49), відповідно до властивостей функцій із простору G_m^0 при $|\tau_k| = |x - \varphi_k(t)|/\varepsilon > \mu/\varepsilon$ досить швидко прямує до нуля поза множиною $\Phi_\mu = \bigcup_{s=1}^m \Phi_{s\mu}$ при будь-якому значенні $\mu > 0$, де $\Phi_{s\mu}$ — μ-окіл кривої $x = \varphi_s(t)$, $s = \overline{1,m}$.

Питання про існування у просторі G_m^0 розв'язків рівнянь (49) потребує додаткового вивчення.

4.3. Визначення функцій $V_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), j = \overline{1,N}$, сингулярної частини асимптотики. Як зазначено вище, функції сингулярної частини асимптотики (11), (12) рівняння (8), що є функціями від багатьох ($m > 2$) змінних, визначаються з лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними третього порядку зі змінними коефіцієнтами (49), загальних методів побудови класичних розв'язків яких не існує.

Для визначення функцій сингулярної частини асимптотики (11), (12) скористаємося тим, що задача побудови асимптотичних розв'язків рівняння (8) пов'язана зі знаходженням лише частинних розв'язків рівнянь (49), і тим, що простір G_m^0 в якості підпростору містить простір функцій, що є швидко спадними за кожною із змінних $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$, і побудуємо наближені (в певному сенсі) розв'язки рівнянь (49), які задовольняють це рівняння в області

$$\Gamma_\mu = \left\{(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in \mathbf{R}^m \colon |\tau_k| = \frac{|x - \varphi_k(t)|}{\varepsilon} < \frac{\mu}{\varepsilon}\right\}, \quad \mu > 0,$$

а за межами цієї області швидко (в сенсі простору швидко спадних функцій S) прямують до нуля.

З цією метою при кожному $j = \overline{1,m}$ у подальшому розглядаємо допоміжне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними третього порядку, коефіцієнтами якого є сталі або швидко спадні функції і яке (в певному сенсі) є апроксимацією рівняння (49). Застосовуючи до допоміжного рівняння перетворення Фур'є за $m - 1$ змінною, отримуємо лінійне неоднорідне інтегро-диференціальне рівняння, що містить похідні третього порядку від невідомої функції, розв'язок якого будується за допомогою методу послідовних наближень. Далі показуємо, що отриманий розв'язок є нескінченно диференційовним і певним чином вкладається у простір швидко спадних функцій. Після цього застосовуємо обернене перетворення Фур'є і встановлюємо оцінку відхилу побудованого за допомогою описаного вище способу розв'язку для диференціального рівняння (49). На завершення цього пункту, як підсумок, сформульовано теорему про точність побудованого асимптотичного розв'язку рівняння (8), (9).

4.3.1. Допоміжне для* (49) *диференціальне рівняння та існування його розв'язку. Припустимо, що функція $\mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ належить S, $j = \overline{1,N}$, де S — простір швидко спадних за змінними $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$ функцій. Згідно з лемою [40, с. 16] для функції $V_0 = V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ існує така нескінченно диференційовна та фінітна щодо змінних $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ функція $\bar{V}_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, що виконується співвідношення

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \begin{cases} V_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), & |\tau_k| < \bar{\tau}_0, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \\ 0, & |\tau_k| \geq \bar{\tau}_0 + \delta, \quad k = \overline{1, m-1}, \end{cases} \tag{54}$$

де $\bar{\tau}_0$, δ — довільні (фіксовані) додатні дійсні числа, $j = \overline{1, N}$.

Одночасно з рівнянням (49) розглянемо допоміжне диференціальне рівняння вигляду

$$\sum_{p,q,r=1}^{m} \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_p \partial \tau_q \partial \tau_r} = \sum_{k=1}^{m} \left[-a_0(t) \varphi_k'(t) + b_0(t) u_0(t) \right] \frac{\partial V_j}{\partial \tau_k} +$$

$$+ b_0(t) \left[\bar{V}_0 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V_j}{\partial \tau_k} + V_j \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \tau_k} \right] + \mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), \quad j = \overline{1, N}, \tag{55}$$

де використано позначення (20) – (22).

Рівняння (55) є диференціальним рівнянням з частинними похідними третього порядку, коефіцієнти якого є сталими або належать простору нескінченно диференційовних і фінітних функцій $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$, і збігається з (49) з точністю до виразу

$$R_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = b_0(t) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \tau_k} \left[(\bar{V}_0 - V_0) V_j \right], \quad j = \overline{1, N}. \tag{56}$$

Для побудови загального розв'язку рівняння (55) скористаємося перетворенням Фур'є [40] за $m-1$ змінною, наприклад за змінними $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m-1}$, і зведемо це рівняння до лінійного неоднорідного інтегро-диференціального рівняння вигляду

$$\frac{d^3 \mathrm{v}_j}{d\tau^3} - 3i\xi \frac{d^2 \mathrm{v}_j}{d\tau^2} - \left(3\xi^2 + \gamma(t)\right) \frac{d\mathrm{v}_j}{d\tau} + i \left(\xi^3 + \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \gamma_k(t) \right) \mathrm{v}_j +$$

$$+ \frac{i b_0(t) \xi}{(2\pi)^{m-1}} \widehat{\bar{V}_0} * \mathrm{v}_j - \frac{b_0(t)}{(2\pi)^{m-1}} \frac{d}{d\tau} \left(\widehat{\bar{V}_0} * \mathrm{v}_j \right) = \widehat{\mathcal{F}}_j(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \tau), \quad j = \overline{1, N}, \tag{57}$$

де $\tau = \tau_m$, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{m-1}$, $\gamma = \gamma_m(t)$, i — уявна одиниця,

$$\mathrm{v}_j(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \tau) = \int\limits_{\mathbf{R}^{m-1}} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \tau_k \right) \times$$

$$\times v_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m-1}, \tau) \, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_{m-1}, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\widehat{\bar{V}_0}(t, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, \tau) = \int\limits_{\mathbf{R}^{m-1}} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \tau_k \right) \times$$

$$\times \bar{V}_0(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m-1}, \tau) \, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_{m-1},$$

$$\widehat{\mathcal{F}_j}(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \tau) = \int\limits_{\mathbf{R}^{m-1}} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \tau_k \right) \times$$

$$\times\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{m-1},\tau)\ d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_{m-1},\quad j=\overline{1,N},$$

$$\widehat{f}*\widehat{g}=\int\limits_{\mathbf{R}^{m-1}}\widehat{f}(t,s_1,s_2,\ldots,s_{m-1},\tau)\times$$

$$\times\widehat{g}(t,\xi_1-s_1,\xi_2-s_2,\ldots,\xi_{m-1}-s_{m-1},\tau)\,ds_1ds_2\ldots ds_{m-1}.$$

Тут використано властивість згортки $\widehat{fg}=(2\pi)^{-(m-1)}\widehat{f}*\widehat{g}$.

Для знаходження розв'язку рівняння (57) при кожному $j=\overline{1,N}$ застосуємо метод послідовних наближень, будуючи послідовні наближення за рекурентними формулами

$$\frac{d^3\mathrm{v}_j^{(n)}}{d\tau^3}-3i\xi\frac{d^2\mathrm{v}_j^{(n)}}{d\tau^2}-\left(3\xi^2+\gamma\right)\frac{d\mathrm{v}_j^{(n)}}{d\tau}+i\left(\xi^3+\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\gamma_k\right)\mathrm{v}_j^{(n)}+$$

$$+\frac{b_0(t)}{(2\pi)^{m-1}}\left(i\xi\widehat{\widehat{V}_0}*\mathrm{v}_j^{(n-1)}-\frac{d}{d\tau}\left(\widehat{\widehat{V}}_0*\mathrm{v}_j^{(n-1)}\right)\right)=\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau),\quad n\in\mathbf{N},\qquad(58)$$

$$\mathrm{v}_j^{(0)}\equiv 0.\qquad(59)$$

Вважаючи змінні t, ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_{m-1} параметрами, рівняння (58) для функцій $\mathrm{v}_j^{(n)}(\cdot,\tau)$, $n\in\mathbf{N}$, $j=\overline{1,N}$, можна розглядати як лінійні неоднорідні диференціальні рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами, розв'язки яких, як відомо, можна побудувати в явному вигляді.

Розглянемо відповідне (58) характеристичне рівняння

$$(\lambda-i\xi)^3-\gamma\lambda+i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\gamma_k=0.\qquad(60)$$

Рівняння (60) має один чисто уявний λ_1 і два комплексних корені λ_2, λ_3, для яких $\mathrm{Re}\ \lambda_2=$ $=-\mathrm{Re}\ \lambda_3$, і його розв'язки можна записати за допомогою формул Кардано [42, с. 43, 44], звівши попередньо це рівняння до випадку дійсних коефіцієнтів.

У п. 4.1, при зведенні диференціального рівняння для головного члена сингулярної частини асимптотики (11), (12) до рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами, використано умову про те, що

$$\gamma_s(t)=-a_0(t)\varphi_s'(t)+b_0(t)u_0(t)>0,\quad t\in[0;T],\quad s=\overline{1,m}.$$

У цьому випадку для кубічного рівняння (60) маємо так званий звідний випадок [42], оскільки

$$p=\gamma(t)>0,\quad Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0,$$

де $q=\xi\gamma(t)-\sum_{k=1}^{m}\xi_k\gamma_k(t)$, $t\in[0;T]$ вважається параметром.

При цьому, як легко бачити, характеристичні корені є простими.

Розв'язки характеристичного рівняння (60) можна записати за допомогою формул

$$\lambda_k = i\xi + iy_k, \quad k = \overline{1,3}, \tag{61}$$

де

$$y_1 = -2\left(\frac{p}{3}\right)^{1/2} \operatorname{ctg} 2\alpha, \quad y_{2,3} = \left(\frac{p}{3}\right)^{1/2} \left(\operatorname{ctg} 2\alpha \pm i\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\alpha\right), \tag{62}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2}{q}\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}, \tag{63}$$

а величини α, β задовольняють умови $|\alpha| \leq \pi/4$, $|\beta| \leq \pi/2$.

Зауважимо, що

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2}\left(a^{-\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{6}}\right), \quad \operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{6}} + a^{-\frac{1}{6}}\right)^2, \tag{64}$$

де

$$a = \frac{\frac{q^2}{2} + \left(\frac{p}{3}\right)^3 - q\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}{\left(\frac{p}{3}\right)^3}. \tag{65}$$

З'ясуємо тепер питання про диференційовність загального розв'язку кожного з рівнянь (58). Загальний розв'язок рівняння (58) за відомими значеннями характеристичних коренів рівняння (60) зображується формулою

$$\mathrm{v}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) = c_{1n}e^{\lambda_1\tau} + c_{2n}e^{\lambda_2\tau} + c_{3n}e^{\lambda_3\tau} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{\tau_0}^{\tau} \widehat{\Phi}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\sigma)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1} e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}\,d\sigma, \tag{66}$$

де τ_0 — довільна (фіксована) початкова точка, c_{1n}, c_{2n}, c_{3n}, $n = 0, 1, \ldots,$ — довільні сталі,

$$\widehat{\Phi}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) = \widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) - \frac{i\xi b_0(t)}{(2\pi)^{m-1}}\widehat{\overline{V}_0} * \mathrm{v}_j^{(n-1)} +$$

$$+\frac{b_0(t)}{(2\pi)^{m-1}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\widehat{\overline{V}_0} * \mathrm{v}_j^{(n-1)}\right), \quad j = \overline{1,N}. \tag{67}$$

Справедливою є наступна лема.

Лема 3. *Нехай $\gamma(t) > 0$ для всіх $t \in [0;T]$. Тоді при кожному $n \in \mathbf{N}$ функція $\mathrm{v}_j^{(n)}(t,\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $j = \overline{1,N}$, що визначена формулою* (66), *є нескінченно диференційовною щодо змінних $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau$ для всіх $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) \in \mathbf{R}^m$.*

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. Розглянемо функцію $\mathrm{v}_j^{(n)}(t,\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $j = \overline{1,N}$, при $n = 1$. Маємо

$$\mathrm{v}_j^{(1)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) = c_{11}e^{\lambda_1\tau} + c_{21}e^{\lambda_2\tau} + c_{31}e^{\lambda_3\tau} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{\tau_0}^{\tau} \widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\sigma)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1} e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}\,d\sigma. \tag{68}$$

З властивостей перетворення Фур'є випливає, що функція $\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\sigma)$, $j = \overline{1,N}$, є нескінченно диференційовною за змінними $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\sigma) \in \mathbf{R}^m$. Тоді кожна з функцій

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\sigma) \left(\frac{d}{d\lambda} \prod_{r=1}^{3} (\lambda - \lambda_r) \Bigg|_{\lambda=\lambda_k} \right)^{-1} e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}\, d\sigma, \quad k = \overline{1,3}, \tag{69}$$

є також нескінченно диференційовною, а отже, $\mathrm{v}_j^{(1)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $j = \overline{1,N}$, — нескінченно диференційовна по ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{m-1}, τ функція.

Властивість нескінченної диференційовності функцій $\mathrm{v}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $j = \overline{1,N}$, щодо змінних $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau \in \mathbf{R}^m$ при $n \geq 2$ випливає з формул (66), (67), якщо взяти до уваги властивості перетворення Фур'є, нескінченну диференційовність функцій $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots$ $\ldots,\tau_m)$, $\mathrm{v}_j^{(k)}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $j = \overline{1,N}$, $k = \overline{0,n-1}$, та властивості згортки.

Лему 3 доведено.

Формула (66) при кожному $n \in \mathbf{N}$ містить довільні сталі c_{1n}, c_{2n}, c_{3n}, які можна знайти з початкових умов для частинного розв'язку рівняння (58) і які, в свою чергу, певним чином визначаються деяким (відповідним) розв'язком рівняння (57). З огляду на те, що для побудови асимптотичного розв'язку (11), (12) рівняння (8), (9) потрібно знайти лише частинний розв'язок рівняння (58), можна вважати, що набір сталих c_{1n}, c_{2n}, c_{3n} не залежить від n, тобто при всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується умова $c_{1n} = c_1$, $c_{2n} = c_2$, $c_{3n} = c_3$.

Для побудови розв'язку рівняння (57) розглянемо послідовність функцій вигляду

$$\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) = \mathrm{v}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\eta_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1}), \tag{70}$$

де $n = 0,\, 1, \ldots,\, j = \overline{1,N}$, функція

$$\eta_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1}) = \begin{cases} 1, & |\xi| < 1 - \delta_1, \\ 0, & |\xi| \geq 1, \end{cases} \qquad j = \overline{1,N},$$

є нескінченно диференційовною і задовольняє нерівності $0 \leq \eta_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1}) \leq 1$, $(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1}) \in [0;T] \times \mathbf{R}^{m-1}$, $j = \overline{1,N}$, $\delta_1 \in (0;1)$ — довільне число. Такі функції, як відомо, існують [40].

З'ясуємо питання про збіжність послідовності функцій $\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)} = \bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $n = 0, 1, \ldots,\, j = \overline{1,N}$, при $n \to \infty$ в області

$$D_{\mathcal{T}} = \left\{ (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) :\; |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2 < 1,\, |\tau - \tau_0| < \mathcal{T} \right\},$$

де $\mathcal{T}$ — деяке довільне (фіксоване) додатне число. Змінна t вважається параметром.

Оцінимо вираз $\left|\, \bar{\mathrm{v}}_j^{(n)} - \bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)} \right|$, $n \in \mathbf{N}$, $j = \overline{1,N}$, при $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) \in D_{\mathcal{T}}$. Маємо

$$\left|\, \bar{\mathrm{v}}_j^{(n)} - \bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)} \right| = \frac{|b_0(t)|}{(2\pi)^{m-1}} \left| \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \left[-i\xi\widehat{\widetilde{V}_0} * \left(\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)} - \bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)} \right) + \right.\right.$$

$$+\ \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\widehat{\overline{V}_0} * \left(\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)} - \bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}\right)\right)\Bigg]\ \left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\Bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1} e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}\,d\sigma\Bigg| \le$$

$$\le (A+B)\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}\left|\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)} - \bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}\right|, \tag{71}$$

де

$$A = \frac{|b_0(t)|}{(2\pi)^{m-1}}\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\Bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right|^{-1}\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}\Bigg(\left|e^{-\lambda_k(\tau_0-\tau)}\widehat{\overline{V}_0}(t,s,\tau_0)\right| +$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\left|e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}\widehat{\overline{V}_0}(t,s,\sigma)\right|\,d\sigma\Bigg)\,ds\,, \tag{72}$$

$$B = \frac{|b_0(t)|}{(2\pi)^{m-1}}\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\Bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right|^{-1}\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}\Bigg(\left|\widehat{\overline{V}_0}(t,s,\tau_0)\right| +$$

$$+|\lambda_k|\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\left|e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}\widehat{\overline{V}_0}(t,s,\sigma)\right|\,d\sigma\Bigg)\,ds\,. \tag{73}$$

Зауважимо, що супремум у правій частині нерівності (71) існує за лемою 3.

Таким чином, має місце таке твердження.

Лема 4. *Нехай* $A+B<1$, *де числа* A, B *визначено згідно з формулами* (72), (73). *Тоді функціональний ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\bar{\mathrm{v}}_j^{(n+1)} - \bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}\right)$$

збігається абсолютно та рівномірно в області $D_{\mathcal{T}}$.

Сталі A, B у формулі (71) залежать лінійним чином від функції $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ — головного члена асимптотичного ряду (13), (14), яка визначається з диференціального рівняння (18). Явний вигляд даної функції задається формулою (36), де сталі $c_1(0)$, $c_2(0)$, $\ldots$, $c_m(0)$ є довільними додатними числами. Звідси, зокрема, випливає, що за допомогою належного вибору цих сталих можна досягти виконання умови леми 4 про те, що $A+B<1$.

Лема 5. *Нехай* $\gamma(t)>0$ *для всіх* $t\in[0;T]$, $A+B<1$, *де числа* A, B *визначено згідно з формулами* (72), (73). *Тоді послідовність функцій* $\{\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}, n\in\mathbf{N}\}$, $j=\overline{1,N}$, *збігається в області* $D_{\mathcal{T}}$ *до деякої нескінченно диференційовної щодо змінних* ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_{m-1}, τ *функції.*

Доведення. Нескінченна диференційовність щодо змінних ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_{m-1} граничної функції послідовності $\{\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}, n\in\mathbf{N}\}$, $j=\overline{1,N}$, випливає безпосередньо з формули для похідних $D_\xi^\alpha\,\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1})\in(\mathbf{N}\cup\{0\})^{m-1}$, $n\in\mathbf{N}$, $j=\overline{1,N}$, і рівномірної збіжності при $n\to\infty$ послідовності цих похідних.

Покажемо, що гранична функція є нескінченно диференційовною по τ. Розглянемо похідну $\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}/\partial\tau$, $n\in\mathbf{N}$, $j=\overline{1,N}$. Маємо

$$\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}}{\partial\tau}=c_1\lambda_1e^{\lambda_1\tau}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2\tau}+c_3\lambda_3e^{\lambda_3\tau}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\widehat{\Phi}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1}+$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\widehat{\Phi}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\sigma)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1}e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}d\sigma.$$

Оцінимо різницю

$$\left|\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}}{\partial\tau}-\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}}{\partial\tau}\right|=$$

$$=\frac{|b_0(t)|}{(2\pi)^{m-1}}\left[\left|\sum_{k=1}^{3}(-i\xi)\widehat{\widehat{V}}_0*\left(\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1}\right|+\right.$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{3}(-i\xi)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\widehat{\widehat{V}}_0*\left(\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}\right)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1}\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\left(-i\xi\widehat{\widehat{V}}_0*\left(\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}\right)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1}e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}d\sigma\right|+$$

$$\left.+\left|\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\widehat{\widehat{V}}_0*\left(\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}\right)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\bigg|_{\lambda=\lambda_k}\right)^{-1}e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}d\sigma\right|\right]\le$$

$$\le\frac{|b_0(t)|}{(2\pi)^{m-1}}\left[\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_T}|\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}|\;\left[\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\right|_{\lambda=\lambda_k}\right|^{-1}\times\right.\right.$$

$$\times\left\{\left(1+|\lambda_k|+|\lambda_k|\;e^{-\lambda_k(\tau_0-\tau)}\right)\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}|\widehat{\widehat{V}}_0(t,s,\tau)|ds+\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}|\widehat{\widehat{V}}_{0\tau}(t,s,\tau)|ds+\right.$$

$$\left.\left.+\;\left(|\lambda_k|+|\lambda_k|^2\right)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}\left|e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}\,\widehat{\widehat{V}}_0(t,s,\sigma)\right|ds\,d\sigma\right\}\right]+$$

$$+\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}\left|\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}}{\partial\tau}-\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}}{\partial\tau}\right|\left[\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\right|_{\lambda=\lambda_k}\right|^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}|\widehat{\widehat{V}}_0(t,s,\tau)|ds\Bigg].$$

Звідси отримуємо

$$\left|\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}}{\partial\tau}-\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}}{\partial\tau}\right|\le A_1\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}|\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}|+$$

$$+B_1\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}\left|\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}}{\partial\tau}-\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}}{\partial\tau}\right|\le\ldots$$

$$\ldots\le A_1\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}|\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-1)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}|+B_1A_1\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}\left|\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-2)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-3)}\right|+$$

$$+B_1^2A_1\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}|\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-3)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(n-4)}|+\ldots$$

$$\ldots+B_1^{n-3}A_1\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}|\bar{\mathrm{v}}_j^{(2)}-\bar{\mathrm{v}}_j^{(1)}|+B_1^{n-2}A_1\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}|\bar{\mathrm{v}}_j^{(1)}|+$$

$$+B_1^{n-1}\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}\left|\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(1)}}{\partial\tau}\right|\le$$

$$\le A_1\frac{(A+B)^{n-1}-B_1^{n-1}}{A+B-B_1}\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}|\bar{\mathrm{v}}_j^{(1)}|+B_1^{n-1}\sup_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in D_{\mathcal{T}}}\left|\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_j^{(1)}}{\partial\tau}\right|,\qquad(74)$$

де

$$A_1=\frac{|b_0(t)|}{(2\pi)^{m-1}}\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{d}{d\lambda}\prod_{r=1}^{3}(\lambda-\lambda_r)\right|_{\lambda=\lambda_k}\right|^{-1}\left[\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}|\widehat{\widehat{V}}_{0\tau}(t,s,\tau)|ds+\right.$$

$$+\left(1+|\lambda_k|+|\lambda_k|\,e^{-\lambda_k(\tau_0-\tau)}\right)\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}|\widehat{\widehat{V}}_0(t,s,\tau)|ds+$$

$$\left.+\left(|\lambda_k|+|\lambda_k|^2\right)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}}\left|e^{-\lambda_k(\sigma-\tau)}\,\widehat{\widehat{V}}_0(t,s,\sigma)\right|\,ds\,d\sigma\right],$$

$$B_1 = \frac{|b_0(t)|}{(2\pi)^{m-1}} \int\limits_{s\in\mathbf{R}^{m-1}} |\widehat{\widehat{V}}_0(t,s,\tau)|ds \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{d}{d\lambda} \prod_{r=1}^{3} (\lambda-\lambda_r) \Big|_{\lambda=\lambda_k} \right|^{-1}.$$

З (74) випливає, що у випадку $B_1 < 1$ послідовність $\left\{ \dfrac{\partial \bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}}{\partial\tau}, n\in\mathbf{N} \right\}$, $j=\overline{1,N}$, збігається при $n\to\infty$ рівномірно в області $D_{\mathcal{T}}$. Враховуючи нерівність $B_1 < B < 1$, переконуємося, що умова $B_1 < 1$ виконується.

Аналогічно показуємо, що у випадку $B_1 < 1$ при кожному $k\in\mathbf{N}$ послідовність

$$\left\{ \frac{\partial^k \bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}}{\partial\tau^k}, n\in\mathbf{N} \right\}, \quad j=\overline{1,N}, \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

збігається рівномірно в області $D_{\mathcal{T}}$.

Лему 5 доведено.

З лем 3 – 5 випливає, що послідовність функцій $\{\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau),\ n\in\mathbf{N}\}$, $j = \overline{1,N}$, є нескінченно диференційовною щодо $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\in\mathbf{R}^{m-1}\times(\tau_0-\mathcal{T},\tau_0+\mathcal{T})$ і при $n\to\infty$ збігається рівномірно разом з усіма своїми похідними в області $\mathbf{R}^{m-1}\times(\tau_0-\mathcal{T},\tau_0+\mathcal{T})$. Це означає, що послідовність функцій $\{\bar{\mathrm{v}}_j^{(n)}(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau), n\in\mathbf{N}\}$, $j=\overline{1,N}$, при $n\to\infty$ збігається рівномірно до розв'язку $\bar{\mathrm{v}}_j = \bar{\mathrm{v}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $j=\overline{1,N}$, рівняння (57) при $\tau\in(\tau_0-\mathcal{T},\tau_0+\mathcal{T})$.

***4.3.2. Оцінка відхилу для допоміжного рівняння* (55).** Підставимо функцію $\bar{\mathrm{v}}_j$, $j=\overline{1,N}$, у рівняння (57). Маємо

$$\frac{d^3\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau^3} - 3i\xi\frac{d^2\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau^2} - \left(3\xi^2+\gamma\right)\frac{d\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau} + \left(i\xi^3 + i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\gamma_k\right)\bar{\mathrm{v}}_j + \frac{i\xi b_0(t)}{(2\pi)^{m-1}}\widehat{\widehat{V}_0} * \bar{\mathrm{v}}_j -$$

$$-\frac{b_0(t)}{(2\pi)^{m-1}}\frac{d}{d\tau}\left(\widehat{\widehat{V}_0} * \bar{\mathrm{v}}_j\right) + \bar{R}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) = \widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau), \tag{75}$$

де $\bar{R}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $j=\overline{1,N}$, — функція відхилу, що визначена формулою

$$\bar{R}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) = \widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) - \frac{d^3\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau^3} + 3i\xi\frac{d^2\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau^2} +$$

$$+\left(3\xi^2+\gamma\right)\frac{d\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau} - \left[i\xi^3 + i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\gamma_k\right]\bar{\mathrm{v}}_j - \frac{b_0(t)}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\left(i\xi\widehat{\widehat{V}_0} * \bar{\mathrm{v}}_j - \frac{d}{d\tau}\left(\widehat{\widehat{V}_0} * \bar{\mathrm{v}}_j\right)\right). \tag{76}$$

Застосувавши до співвідношення (76) обернене перетворення Фур'є, отримаємо

$$\frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int\limits_{\mathbf{R}^{m-1}} \exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\bar{R}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\,d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_{m-1} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int\limits_{|\xi|<1-\delta_1} \exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\left[\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau) - \frac{d^3\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau^3} + \right.$$

$$+3i\xi\frac{d^2\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau^2}+\left(3\xi^2+\gamma\right)\frac{d\bar{\mathrm{v}}_j}{d\tau}-\left(i\xi^3+i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\gamma_k\right)\bar{\mathrm{v}}_j-$$

$$-\frac{b_0(t)}{(2\pi)^{m-1}}\left(i\xi\widehat{\overline{V}_0}*\bar{\mathrm{v}}_j-\frac{d}{d\tau}\left(\widehat{\overline{V}_0}*\bar{\mathrm{v}}_j\right)\right)\Bigg]\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int\limits_{1-\delta_1<|\xi|<1}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\bar{R}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int\limits_{|\xi|>1}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int\limits_{1-\delta_1<|\xi|<1}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\bar{R}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int\limits_{|\xi|>1}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}.$$

Очевидно, що функція $\bar{\mathrm{v}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $j=\overline{1,N}$, задовольняє нерівність

$$|\bar{\mathrm{v}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)|<C_1,\quad (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1})\in\mathbf{R}^{m-1},\quad \tau\in(\tau_0-\mathcal{T},\tau_0+\mathcal{T}).$$

З (76) випливає нерівність

$$\left|\bar{R}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\right|<C,\quad (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1})\in\mathbf{R}^{m-1},\quad \tau\in(\tau_0-\mathcal{T},\tau_0+\mathcal{T}),$$

а отже,

$$\left|\int\limits_{1-\delta_1<|\xi|<1}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\bar{R}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}\right|<C\delta_1,$$

$$\tau\in(\tau_0-\mathcal{T},\tau_0+\mathcal{T}).$$

Оцінимо величину

$$\int\limits_{|\xi|>1}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}.$$

Має місце таке твердження.

Лема 6. *Функція* $\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)$, $j=\overline{1,N}$, *при кожному* $k\in\mathbf{N}$ *задовольняє нерівність*

$$\left|\int\limits_{|\xi|>1}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k\tau_k\right)\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\,d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}\right|\le\frac{C_k}{(1+\tau^2)^k},$$

де C_k, $k\in\mathbf{N}$, — *деякі додатні не залежні від* τ *сталі.*

Доведення випливає з властивостей швидко спадних функцій.

Лема 7. *Нехай виконується умова*

$$\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},0)=0. \tag{77}$$

Тоді має місце нерівність

$$\int\limits_{|\xi|>1}\left|\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\right|d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}\Bigg|_{\tau=\frac{x-\varphi_m(t)}{\varepsilon}}<C\varepsilon^N,$$

де

$$\tau\in\{\tau\in\mathbf{R}:|\tau|>\varepsilon^{\alpha_0-1}T_1\}\cup\{\tau\in\mathbf{R}:|\tau|<\varepsilon^NT_1\},$$

$\alpha_0\in(0;1)$, $T_1>0$ — *деякі числа.*

Доведення. Згідно з лемою 6 має місце нерівність

$$\int\limits_{|\xi|>1}\left|\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\right|d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}\le\frac{C_k}{(1+\tau^2)^k},\quad k\in\mathbf{N}.$$

Якщо натуральне число k задовольняє при фіксованому N нерівність $2k>N$, то $\alpha_0:=$ $:=1-N/(2k)\in(0;1)$ і при $|\tau|>\varepsilon^{\alpha_0-1}T_1$ виконується нерівність

$$\int\limits_{|\xi|>1}\left|\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\right|d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}\Bigg|_{\tau=\frac{x-\varphi_m(t)}{\varepsilon}}<C\varepsilon^N,$$

де C — деяка стала, що не залежить від ε.

Згідно з (77) і теоремою про середнє отримуємо

$$\int\limits_{|\xi|>1}\left|\widehat{\mathcal{F}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau)\right|d\xi_1d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}\Bigg|_{\tau=\frac{x-\varphi_m(t)}{\varepsilon}}<C\varepsilon^N$$

при $|\tau|<\varepsilon^NT_1$.

Лему 7 доведено.

Таким чином, поклавши $T_1=\mathcal{T}$, $\tau_0=0$, отримаємо, що функція $(\bar{\mathrm{v}}_j(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1},\tau))^\vee$, $j=\overline{1,N}$, задовольняє допоміжне рівняння (55) з точністю $O(\varepsilon^N)$ в області $D=D_1\cup D_2$, де

$$D_1=\{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\in\mathbf{R}^m\colon|\tau_m|>\varepsilon^{\alpha_0-1}\mathcal{T}\},$$

$$D_2 = \{(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in \mathbf{R}^m \colon |\tau_m| < \varepsilon^N \mathcal{T}\}.$$

4.3.3. Оцінка функції відхилу $R_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $j = \overline{1, N}$. Функція відхилу $R_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $j = \overline{1, N}$, має вигляд (56) і є різницею правих частин диференціальних рівнянь (49) і (55). При цьому рівняння (49) — це рівняння, яке розглядається на кривих $x = \varphi_s(t)$, $s = \overline{1, m}$, а (55) — це апроксимуюче для (49) диференціальне рівняння, яке отримано за умов (20) – (22) з (49) заміною деяких коефіцієнтів у правій частині (49) на їх апроксимації фінітними функціями. Оцінку функції відхилу $R_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, $j = \overline{1, N}$, встановлює наступна лема.

Лема 8. *Нехай $A + B < 1$, де числа A, B визначено згідно з формулами* (72), (73). *Тоді існує таке число $T_2 > 0$, що має місце нерівність*

$$\left| R_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \Big|_{\tau_k = \frac{x - \varphi_k(t)}{\varepsilon},\, k = \overline{1, m}} \right| < C\varepsilon^N, \quad j = \overline{1, N},$$

де вектор $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ належить області

$$\mathbf{R}^{m-1} \times (-\mathcal{T}, \mathcal{T}) \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} \left\{ (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in \mathbf{R}^{m-1} \times (-\mathcal{T}, \mathcal{T}) : |\tau_m| < \varepsilon^{\alpha_0 - 1} T_2 \right\},$$

$\alpha_0 \in (0; 1)$ — *деяке число, що визначено згідно з лемою* 7.

Доведення. З (56), (57), (70) випливає, що при кожному $j = \overline{1, N}$ функція

$$R_j(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = b_0(t) \left[(\bar{\mathrm{v}}_j)^\vee \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(\bar{V}_0 - V_0)}{\partial \tau_k} + (\bar{V}_0 - V_0) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\, (\bar{\mathrm{v}}_j)^\vee}{\partial \tau_k} \right]$$

належить S-простору швидко спадних щодо змінних $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in \mathbf{R}^m$ функцій. Тоді, якщо $\tau_m \in \{\tau_m \in (-\mathcal{T}, \mathcal{T}) : |\tau_m| > \varepsilon^{\alpha_0 - 1} T_2\}$, з леми 6 маємо

$$\left| (\bar{\mathrm{v}}_j)^\vee \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(\bar{V}_0 - V_0)}{\partial \tau_k} \right| \le \frac{C_n}{\delta} \frac{m-1}{\left(1 + \tau_1^2 + \ldots + \tau_{m-1}^2\right)^n} =$$

$$= \frac{C_n}{\delta} \frac{m-1}{\left(1 + \left(\frac{x - \varphi_1(t)}{\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{x - \varphi_2(t)}{\varepsilon}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x - \varphi_{m-1}(t)}{\varepsilon}\right)^2\right)^n}, \tag{78}$$

де $T_2 > 0$ — деяке число, $f^\vee$ — обернене перетворення Фур'є за змінними $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$ функції $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \tau_m)$, $n \in \mathbf{N}$ — довільне число.

При $\delta := \varepsilon$ в (78) отримаємо твердження леми 8.

Таким чином, поклавши $T_2 := \bar{\tau}_0 := \mathcal{T}$, $\delta_1 := \varepsilon^N$, де $\bar{\tau}_0$ визначено згідно з (54), отримаємо, що функція $(\bar{\mathrm{v}}_j)^\vee$, $j = \overline{1, N}$, задовольняє в області D рівняння (49) з точністю $O(\varepsilon^N)$.

Як підсумок, використовуючи умови статті [41], отримуємо таке твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 2, *умови* (24) – (26), *функції $a_{0xx}(x, t)$, $b_{0xx}(x, t)$, $a_1(x, t)$, $b_1(x, t)$, $u_1(x, t)$ обмежені на множині $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]$, має місце нерівність $A + B < 1$, де числа A, B визначено згідно з формулами* (72), (73).

Тоді функція

$$Y_1(x,t,\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{1} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\right], & (\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \in D_3, \\ \sum\limits_{j=0}^{1} \varepsilon^j u_j(x,t) + V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m), & (\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \in D_4, \end{cases} \tag{79}$$

де

$$V_1(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = (\bar{\mathrm{v}}_1)^{\vee}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m),$$

$$D_3 = \{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \in \mathbf{R}^{m-1} \times (-\mathcal{T};\mathcal{T}) : |\tau_m| < \varepsilon\mathcal{T}\},$$

$$D_4 = \{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \in \mathbf{R}^{m} : |\tau_m| > \varepsilon^{\alpha_0 - 1}\mathcal{T}\},$$

$$\tau_1 = \frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = \frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon}, \quad \ldots, \quad \tau_m = \frac{x-\varphi_m(t)}{\varepsilon},$$

задовольняє співвідношення (15) *з точністю* $O(\varepsilon^2)$ *на множині* $\{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T] \colon |x - \varphi_m(t)| < \varepsilon^2\mathcal{T}\} \cup \{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T] \colon |x - \varphi_m(t)| > \varepsilon^{\alpha_0}\mathcal{T}\}$, *де* $\alpha_0 \in (0;1)$ — *деяке число, що визначено згідно з лемою* 7.

Доведення. Підставимо функцію $Y_1(x,t,\varepsilon)$ у рівняння (8) та домножимо на ε. Враховуючи рівняння (16), (17) для визначення регулярної частини асимптотики та рівняння (18), (19), отримуємо

$$\varepsilon^3 \left[\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \varepsilon \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{p,q,r=1}^{m} \frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_p \partial\tau_q \partial\tau_r} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{p,q,r=1}^{m} \frac{\partial^3 V_1}{\partial\tau_p \partial\tau_q \partial\tau_r}\right] -$$

$$-\varepsilon a(x,t,\varepsilon) \left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{p=1}^{m} \varphi_p' \frac{\partial V_0}{\partial \tau_p} - \sum_{p=1}^{m} \varphi_p' \frac{\partial V_1}{\partial \tau_p}\right] -$$

$$-\varepsilon b(x,t,\varepsilon) \left[u_0 + \varepsilon u_1 + V_0 + \varepsilon V_1\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial V_0}{\partial \tau_p} + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial V_1}{\partial \tau_p}\right] =: g(x,t,\varepsilon).$$

Оцінимо тепер величину $g(x,t,\varepsilon)$. Враховуючи рівняння (18), (19) та процедуру побудови розв'язку рівняння (19), переконуємося, що на множині $D_3 \cup D_4$ має місце співвідношення

$$g(x,t,\varepsilon) =$$

$$= \left[a_0(x,t) + \varepsilon a_1(x,t) - a_0(\varphi_s(t),t) - \varepsilon\tau_s a_{0x}(\varphi_s(t),t) - \varepsilon a_1(\varphi_s(t),t)\right] \sum_{p=1}^{m} \varphi_p' \frac{\partial V_0}{\partial \tau_p} +$$

$$+\left[b_0(\varphi_s(t),t)+\varepsilon\tau_s b_{0x}(\varphi_s(t),t)+\varepsilon b_1(\varphi_s(t),t)-b_0(x,t)-\varepsilon b_1(x,t)\right]V_0\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}+$$

$$+\Bigg[b_0(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t)+\varepsilon\tau_s\left(b_0(x,t)u_0(x,t)\right)_x\Big|_{x=\varphi_s(t)}-b_0(x,t)u_0(x,t)+$$

$$+\varepsilon b_0(\varphi_s(t),t)u_1(\varphi_s(t),t)+\varepsilon b_1(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t)-$$

$$-\varepsilon b_0(x,t)u_1(x,t)-\varepsilon b_1(x,t)u_0(x,t)\Bigg]\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}+$$

$$+\varepsilon\left[b_0(\varphi_s(t),t)u_{0x}(\varphi_s(t),t)-b_0(x,t)u_{0x}(x,t)\right]V_0+\varepsilon\left[a_0(\varphi_s(t),t)-a_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial t}+$$

$$+\varepsilon\left[a_0(\varphi_s(t),t)-a_0(x,t)\right]\sum_{p=1}^{m}(-\varphi_p')\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}+$$

$$+\varepsilon\left[b_0(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t)-\varepsilon b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\sum_{k=1}^{m}\left(V_0\frac{\partial V_1}{\partial\tau_p}+V_1\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}\right)+O(\varepsilon^2).$$

Розглянемо доданок

$$\left[a_0(x,t)+\varepsilon a_1(x,t)-a_0(\varphi_s(t),t)-\varepsilon\tau_s a_{0x}(\varphi_s(t),t)-\varepsilon a_1(\varphi_s(t),t)\right]\sum_{p=1}^{m}\varphi_p'\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}.$$

На підставі умов (20)–(22), (24)–(26), враховуючи обмеженість функцій $a_0(x,t)$, $a_{0xx}(x,t)$ на множині $\mathbf{R}\times[0;T]$, одержуємо оцінку

$$\left|\left[a_0(x,t)+\varepsilon a_1(x,t)-a_0(\varphi_s(t),t)-\varepsilon\tau_s a_{0x}(\varphi_s(t),t)-\varepsilon a_1(\varphi_s(t),t)\right]\sum_{p=1}^{m}\varphi_p'\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}\right|=$$

$$=\left|\left[a_0(x,t)+\varepsilon a_1(x,t)-a_0(\varphi_s(t),t)-\varepsilon a_1(\varphi_s(t),t)\right]\sum_{p=1}^{m}\varphi_p'\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}\right|\le$$

$$\le\varepsilon^2\sum_{p=1}^{m}C_{1p}\tau_p^2\left|\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}\right|+\varepsilon^2\sum_{p=1}^{m}C_{2p}|\tau_p|\left|\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}\right|,$$

звідки, використовуючи властивості функцій $\dfrac{\partial V_0}{\partial\tau_p}$, зокрема те, що функція $\dfrac{\partial V_0}{\partial\tau_p}$, $p=\overline{1,m}$, належить простору швидко спадних функцій, як і при доведенні теореми 2, знаходимо

$$\varepsilon^2\sum_{p=1}^{m}C_{1p}\tau_p^2\left|\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}\right|+\varepsilon^2\sum_{p=1}^{m}C_{2p}|\tau_p|\left|\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}\right|<C\varepsilon^2.$$

Оскільки функція $\mathcal{F}_1(t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ належить простору S, то враховуючи умови (24) – (26), переконуємося, що функція $\dfrac{\partial V_0}{\partial t}$ теж належить простору S. Тоді з міркувань, що використані при доведенні теореми 2, отримуємо

$$\left|\varepsilon\left[a_0(x,t) - a_0(\varphi_s(t),t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial t}\right| < C\varepsilon^2$$

для деякої сталої C.

Аналогічно встановлюємо оцінку

$$\left|\varepsilon\left[a_0(x,t) - a_0(\varphi_s(t),t)\right]V_1\right| < C_1\varepsilon^2.$$

Проводячи аналогічні міркування для оцінки інших доданків функції $g(x,t,\varepsilon)$, як підсумок, отримуємо асимптотичну рівність $g(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$.

Очевидно, що на множині D_4 функція $\sum_{j=0}^{1}\varepsilon^j u_j(x,t) + V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ задовольняє співвідношення (15) з точністю $O(\varepsilon^2)$, оскільки $V_1(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $\mathcal{F}_1(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \in S$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 3.** Аналогічні твердження можна довести і для випадку $Y_N(x,t,\varepsilon)$, $N \geq 2$.

Висновки. Запропоновано алгоритм побудови асимптотичного багатофазового солітоноподібного розв'язку сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами. Отримано системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для регулярної і сингулярної частин асимптотичного розв'язку.

Для знаходження розв'язків системи диференціальних рівнянь для сингулярної частини асимптотики запропоновано процедуру побудови їх наближених розв'язків за допомогою деяких апроксимуючих рівнянь і отримано оцінку відхилу для таких розв'язків.

Наведено обґрунтування запропонованого алгоритму.

41. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 7. – С. 970 – 987.
42. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 832 с.

Одержано 14.12.11