УДК 517.5

В. М. Дільний (Львів. нац. ун-т; Дрогобиц. держ. пед. ун-т)

ПРО ЗГОРТКУ ФУНКЦІЙ У КУТОВИХ ОБЛАСТЯХ

We obtain analogs of the Parseval theorem, convolution theorem, and some other properties of the convolution of functions from the Hardy – Smirnov spaces in an arbitrary convex unbounded polygon.

Установлены аналоги равенства Парсеваля, теоремы о свертке и некоторые другие свойства свертки функций из классов Гарди – Смирнова в произвольном выпуклом неограниченном многоугольнике.

1. Вступ. Одним із глибоких результатів спектральної теорії функцій є класична теорема Лакса – Бьорлінга (див [1, 2]) про опис замикання лінійної оболонки системи $\{G(z)e^{\tau z}\colon \tau \leq 0\}$ у просторах Гарді H^2 у півплощині. Ця теорема має різноманітні застосування в спектральній теорії лінійних операторів, що продемонстровано у низці монографій (див. [3 – 6]), зокрема до дослідження рівняння (див. [7])

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(u+\tau)g(u)du = 0, \quad \tau \leq 0.$$

Ці застосування базуються на класичній теоремі про згортку та рівності Парсеваля для перетворення Фур'є. Спроби знайти повний аналог цієї теорії для вагових просторів із вагою степеневого характеру були, зокрема, в роботах [8 – 11]. Б. Винницький розглянув [13] простори Гарді у півплощині з експоненціальною вагою $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ (див. нижче). При цьому він описав послідовності нулів цього класу функцій, увів поняття перетворення Фур'є – Лапласа і встановив аналоги теореми про згортку та рівності Парсеваля. Виходячи з цих результатів, автор [22, 23, 25] знайшов критерій того, щоб замикання лінійної оболонки системи $\{G(z)e^{\tau z}\colon \tau \leq 0\}$, $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, збігалося з простором $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, що є частковим поширенням теорії Лакса – Бьорлінга на простори $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. При цьому з'ясувалося, що існують якісні відмінності класичного випадку $\sigma = 0$ і $\sigma > 0$. Це виявилося, зокрема, в тому, що множення функції G на функцію e^{cz}, $c < 0$, не впливає на апроксимаційні властивості цієї системи у випадку $\sigma > 0$ і тому створює труднощі для опису замикання її лінійної оболонки. Глибинні причини цього вловити важко. Розгляд ширшого класу просторів, імовірно, може привести до осмислення цього. Саме розгляду ширшого класу просторів, ніж $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, присвячено дану статтю.

Нехай D — необмежений опуклий n-кутник, $n \in \mathbb{N}$, що лежить у деякому куті комплексної площини, величина якого є меншою за π і межа якого складається з півпрямих l_1 і l_{n+1} та, можливо, відрізків $l_2, \ldots, l_n$, нумерація і орієнтація яких відповідає додатному обходу ∂D. Далі, нехай $D^* = \mathbb{C}\backslash\overline{D}$, а $E^p[D]$ і $E^p_*[D]$ — простори функцій, аналітичних відповідно в D і D^*, для яких

$$\sup\left\{\int\limits_{\gamma} |f(z)|^p |dz|\right\}^{1/p} < +\infty$$

(тут під $|dz|$ розуміємо елемент довжини), де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать в D (відповідно, в D^*). В останньому означенні замість відрізків γ супремум можна брати також за всіма ламаними, що містяться в D (чи, відповідно, в D^*), сторони яких паралельні сторонам (відрізкам чи прямим) ∂D. Ці простори розглядалися в [14, 15]. Там, зокрема, показано, що функції з цих просторів мають майже скрізь на ∂D кутові граничні значення і $f \in L^p(\partial D)$. У випадку, коли D є областями $\mathbb{C}(\alpha, \beta) = \{z \colon \alpha < \arg z < \beta\}$ чи $D_\sigma = \{z \colon \mathrm{Re} z < 0, |\mathrm{Im}\, z| < \sigma\}$, вказані простори збігаються з досліджуваними відповідно у [12] та [13]. У [16, 21] встановлено аналоги рівності Парсеваля та теореми про згортку для просторів $E^2[D_\sigma]$ і $E_*^2[D_\sigma]$. Питання про аналоги цих тверджень для довільного необмеженого опуклого многокутника залишалося відкритим. Метою цієї статті є встановлення аналога теореми про згортку та знаходження умов повноти деяких систем функцій. Основними результатами цієї статті є теореми 2 та 4.

2. Основні позначення. Нехай $\overline{m, n} = [m; n] \cap \mathbb{Z}$. Позначимо через $a_j,\ j = \overline{1, n}$, скінченні вершини області D, через $\alpha_j,\ j \in \overline{1, n+1}$, величини кутів, що рахуються в додатному обході, між додатним напрямом осі абсцис і напрямним вектором променя чи відрізка l_j, який визначається раніше вибраним обходом ∂D, а через l_j^* пряму, що проходить через сторону l_j. Нехай $\dfrac{\pi}{\beta}$, $1 < \beta \leqslant +\infty$, — величина кута $\pi - \alpha_{n+1} + \alpha_1$. Через $\overrightarrow{b}$ при $\beta < +\infty$ позначимо вектор з початком у точці перетину прямих l_1^* і l_{n+1}^*, який лежить на бісектрисі l_1^* і l_{n+1}^* та напрямлений в сторону області D. Якщо ж $\beta = +\infty$, то через $\overrightarrow{b}$ позначатимемо вектор, напрям якого збігається з вибраним напрямом сторони l_{n+1}. Нехай φ_*, $0 \leqslant \varphi_* < 2\pi$, — кут між додатним напрямом дійсної осі і вектором $\overrightarrow{b}$, який вимірюється від цієї осі у додатному напрямі. Через $\pi_*(l_j)$ позначимо півплощину, утворену прямою l_j^*, що не містить області D. Нехай також $1/\alpha + 1/\beta = 1$ (якщо $\beta = +\infty$, то вважаємо, що $\alpha = 1$) і $h(\theta) = h(\theta, D)$, де

$$h(\theta, D) = \sup \left\{ \mathrm{Re}\, \left(z e^{-i\theta} \right) \colon z \in \overline{D} \right\}.$$

Функція h є неперервною на проміжку $\triangle_{\alpha, \varphi_*} = \{\theta \colon\ |\theta - \pi + \varphi_*| \leqslant \pi/(2\alpha)\}$. Позначимо через $H^p(D_\times, h)$, $1 \leqslant p < +\infty$, простір функцій f, аналітичних в куті $D_\times = \big\{z \colon\ |\arg z - \pi + \varphi_*| < < \pi/(2\alpha)\big\}$, для яких

$$\|f\|^p := \sup_{|\varphi - \pi + \varphi^*| < \pi/(2\alpha)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-prh(\varphi)} dr \right\} < +\infty.$$

Нехай W_σ^2 — простір Вінера цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$, звуження яких на $\mathbb{R}$ належать простору $L^2(\mathbb{R})$, а $H^2(\mathbb{C})$ — простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_- = \{z \colon \mathrm{Re}\, z < 0\}$. Нехай далі $D_\times^- = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\times$. Через $T^2(D_\times^-)$ позначимо множину всіх упорядкованих наборів $F = (F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})$, де $F_1(ze^{-i\alpha_1}) e^{a_1 z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_{n+1}(ze^{i(\pi - \alpha_{n+1})}) e^{a_{n+1} z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, а $F_j\left(ze^{-i(\alpha_j - \pi/2)}\right) e^{\frac{a_j + a_{j-1}}{2} z} \in W^2_{\left|\frac{a_j - a_{j-1}}{2}\right|}$, до того ж

$$\sum_{j=1}^{n+1} F_j(z) = 0, \quad z \in D_\times^-. \tag{1}$$

Простір $T^2(D_\times^-)$ можна розглядати як нормований простір з нормою $\|F\| = \max\left\{\max\left\{\|F_j\|_{W^2},\ j\in\overline{2,n}\right\};\ \|F_1\|_{H^2};\ \|F_{n+1}\|_{H^2}\right\}$, де під $\|F_j\|_{H^2}$ та $\|F_j\|_{W^2}$ розуміємо норми у відповідних просторах Гарді та Вінера. Властивості просторів $E^2[D]$ та $T^2(D_\times^-)$ відзначено у [14], а $H^2(D_\times, h)$ та $E_*^2[D]$ — у [15]. Зокрема, в [14] показано, що рівності

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_j} f(w)e^{-zw}dw, \qquad f\in E^2[D], \quad j\in\overline{1,n+1}, \tag{2}$$

задають взаємно однозначне відображення простору $E^2[D]$ на $T^2(D_\times^-)$, а у [15] — що рівність

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty e^{i\theta_*}} G(z)e^{-zw}dz, \qquad w\in\{\omega = u+iv\colon u\cos\theta_* - v\sin\theta_* > h(\theta_*)\}, \tag{3}$$

де θ_* — довільне число, яке задовольняє умову $|\theta_* - \pi + \varphi_*| < \dfrac{\pi}{2\alpha}$, задає взаємно однозначне відображення простору $H^2(D_\times, h)$ на $E_*^2[D]$.

Зазначимо, що при доведенні теореми 1 ми використовуємо рівність Парсеваля у формі (див. [17, c. 62])

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)G(x)dx = \frac{1}{i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)G(t)dt,$$

де $f\in L^2(-\infty;\infty)$, $g\in L^2(-\infty;\infty)$,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iut}dt, \qquad G(u) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-iut}dt.$$

3. Рівність Парсеваля.

Теорема 1 (рівність Парсеваля). *Нехай* $f\in E^2[D]$, $g\in E_*^2[D]$ *і* $\varphi_j = \alpha_j - \pi/2$. *Тоді*

$$\int\limits_{\partial D} f(w)g(w)dw = \sum_{j=1}^{n+1}\int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_j}} F_j(z)G(z)dz.$$

Доведення. Позначимо

$$f_1^*(a_1 + re^{i\alpha_1}) = \begin{cases} f(a_1+re^{i\alpha_1}), & r\leqslant 0,\\ 0, & r>0,\end{cases}$$

$$F_1^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(a_1+re^{i\alpha_1})e^{-itr}dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} f(a_1+re^{i\alpha_1})e^{-itr}dr,$$

$$G_1^*(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_1+re^{i\alpha_1})e^{itr}dr. \tag{4}$$

Тоді, використавши рівність Парсеваля, отримаємо

$$\int\limits_{l_1} f(w)g(w)dw = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(a_1 + re^{i\alpha_1})g(a_1 + re^{i\alpha_1})e^{i\alpha_1}dr = e^{i\alpha_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(t)G_1^*(t)dt. \qquad (5)$$

Але

$$F_1^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{l_1} f(w)e^{-it(w-a)e^{-i\alpha_1}}d((w-a_1)e^{-i\alpha_1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha_1}e^{ita_1e^{-i\alpha_1}}\int\limits_{l_1} f(w)e^{-itwe^{-i\alpha_1}}dw,$$

тому

$$F_1^*(-ite^{i\alpha_1}) = e^{-i\alpha_1}e^{ta_1}\int\limits_{l_1} f(w)e^{-tw}dw.$$

Звідси за теоремою Пелі – Вінера на підставі останньої рівності з (2) для майже всіх $t \in \mathbb{R}$ функція $F_1^*(te^{i\alpha_1 - \pi/2})$ збігається з кутовими граничними значеннями на прямій $\left\{z\colon z = te^{i(\alpha_1 - \pi/2)}\right\}$, $t \in \mathbb{R}$, функції $e^{za_1 - i\alpha_1}F_1(z)$. Формула (3) залишається справедливою і при $|\theta_* - \pi + \varphi_*| = \dfrac{\pi}{2\alpha}$; в останньому випадку під $G(z)$ розуміємо відповідні кутові граничні значення функції G на ∂D_*. Тому, зокрема, при $\theta_* = \pi - \varphi_* + \dfrac{\pi}{2\alpha}$ одержимо

$$g(w) = \frac{e^{\pi-\varphi_*+\pi/2\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} G(re^{\pi-\varphi_*+\pi/2\alpha})e^{-r\exp(i(\pi-\varphi_*+\pi/2\alpha))w}dr, \quad w \in \pi_*(l_1).$$

Оскільки $\varphi_* = \alpha_1 + \pi - \dfrac{\pi}{2\beta}$, то $\pi - \varphi_* + \dfrac{\pi}{2\alpha} = -\alpha_1 + \dfrac{\pi}{2}$. Отже,

$$g(a_1 + \rho e^{i\alpha_1}) = \frac{e^{-i\varphi_1}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_1})e^{-re^{-i\varphi_1}(a_1+\rho e^{i\alpha_1})}dr =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi_1}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_1})e^{-a_1re^{-i\varphi_1}}e^{-i\rho r}dr.$$

Оскільки $h(-\varphi_1) = \sup_{z\in\overline{D}}\left\{\mathrm{Re}\,\left(ze^{-i(\alpha_1-\pi/2)}\right)\right\} = \mathrm{Re}\,\left(a_1e^{-i\varphi_1}\right) = \mathrm{Re}\,a_1\cos\varphi_1 + \mathrm{Im}\,a_1\sin\varphi_1$, то $G(re^{-i\varphi_1})e^{-a_1re^{-i\varphi_1}} \in L^2(0;+\infty)$. Тому, врахувавши, що функція g належить простору Гарді H^2 у півплощині $\pi_*(l_1)$, за теоремою Пелі – Вінера та оберненою формулою для перетворення Лапласа маємо

$$G(re^{-i\varphi_1})e^{-a_1re^{-i\varphi_1}} = \frac{e^{i\varphi_1}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_1 + \rho e^{i\alpha_1})e^{ir\rho}d\rho, \quad r > 0.$$

Порівнявши останню рівність з (4), одержимо $G_1^*(t) = iG(te^{-i\varphi_1})e^{-a_1te^{-i\varphi_1}}e^{-i\varphi_1}$ для майже всіх $t \geqslant 0$. Крім того, оскільки g належить простору Гарді у півплощині $\pi^*(l_1)$, то [18, с. 88] з (4) маємо $G_1^*(t) = 0$ для всіх $t < 0$. Отже, з (5) отримаємо

$$\int\limits_{l_1} f(w)g(w)dw = e^{i\alpha_1}\int\limits_0^{+\infty} F_1(te^{-i\varphi_1})G(te^{-i\varphi_1})e^{-i\alpha_1}e^{-i\varphi_1}dt = \int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_1}} F_1(z)G(z)dz.$$

Аналогічно, позначивши

$$f_{n+1}^*(a_n + re^{i\alpha_{n+1}}) = \begin{cases} f_{n+1}(a_n + re^{i\alpha_{n+1}}), & r \geqslant 0, \\ 0, & r < 0, \end{cases}$$

$$F_{n+1}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(a_n + re^{i\alpha_{n+1}})e^{-itr}dr, G_{n+1}^*(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} g(a_n + re^{i\alpha_{n+1}})e^{itr}dr, \tag{6}$$

одержимо

$$\int\limits_{l_{n+1}} f(w)g(w)dw = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}^*(a_n + re^{i\alpha_{n+1}})g(a_n + re^{i\alpha_{n+1}})e^{i\alpha_{n+1}}dr =$$

$$= \frac{e^{i\alpha_{n+1}}}{i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{n+1}^*(t)G_{n+1}^*(t)dt. \tag{7}$$

Але

$$F_{n+1}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{l_{n+1}} f(w)e^{-it(w-a_n)e^{-i\alpha_{n+1}}}d\left((w-a_n)e^{-i\alpha_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha_{n+1}}e^{ita_ne^{-i\alpha_{n+1}}}\int\limits_{l_{n+1}} f(w)e^{-itwe^{-i\alpha_{n+1}}}dw,$$

тому

$$F_{n+1}^*(-ite^{i\alpha_{n+1}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha_{n+1}}e^{ta_n}\int\limits_{l_{n+1}} f(w)e^{-tw}dw.$$

Згідно з теоремою Пелі – Вінера, порівнюючи останню рівність з другою рівністю (6), переконуємося, що функція $F_{n+1}^*(te^{i(\alpha_{n+1}-\pi/2)})$ збігається з кутовими граничними значеннями на прямій $\left\{z\colon z = te^{i(\alpha_{n+1}-\pi/2)},\ t \in \mathbb{R}\right\}$ функції $e^{-i\alpha_{n+1}}e^{za_n}F_{n+1}(z)$. Далі, покладаючи в (3) $\theta_* = \pi - \varphi_* - \dfrac{\pi}{2\alpha}$, маємо

$$g(w) = \frac{e^{i(\pi-\varphi_*-\pi/2\alpha)}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} G(re^{i(\pi-\varphi_*-\pi/2\alpha)})\,e^{-r\exp(i(\pi-\varphi_*-\pi/2\alpha))w}dr, \quad w \in \pi_*(l_{n+1}).$$

Оскільки $\pi - \varphi_* - \dfrac{\pi}{2\alpha} = -\varphi_{n+1}$, то

$$g(a_n + \rho e^{i\alpha_{n+1}}) = \frac{e^{-i\varphi_{n+1}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{-re^{-i\varphi_{n+1}}(a_n+\rho e^{i\alpha_{n+1}})} dr =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi_{n+1}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{-a_n re^{-i\varphi_{n+1}}} e^{-ir\rho} dr.$$

Врахувавши, що $h(-\varphi_{n+1}) = \sup\left\{\mathrm{Re}\left(ze^{-i(\alpha_{n+1}-\pi/2)}\right) : z \in \overline{D}\right\} = \mathrm{Re}\left(a_n e^{-i\varphi_{n+1}}\right) = \mathrm{Re}\, a_n \cos\varphi_{n+1} + \mathrm{Im}\, a_n \sin\varphi_{n+1}$, одержимо $G(re^{-i\varphi_{n+1}})\, e^{-a_n re^{-i\varphi_{n+1}}} \in L^2(0;+\infty)$. Оскільки функція g належить простору Гарді H^2 у півплощині $\pi_*(l_{n+1})$, за теоремою Пелі–Вінера та оберненою формулою для перетворення Лапласа знову маємо

$$G(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{-a_n re^{-i\varphi_{n+1}}} = \frac{e^{i\varphi_{n+1}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_n + \rho e^{i\alpha_{n+1}}) e^{ir\rho} d\rho, \quad r > 0.$$

Порівнявши цю рівність з (6) і врахувавши, що $G^*_{n+1}(t) = 0$ для всіх $t < 0$, з (7) одержимо

$$\int\limits_{l_{n+1}} f(w)g(w)dw = \int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_{n+1}}} F_{n+1}(z)G(z)dz.$$

Нехай

$$f^*_j(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) = \begin{cases} f(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}), & r \in [0; |a_j - a_{j-1}|], \\ 0, & r \in \mathbb{R} \setminus [0; |a_j - a_{j-1}|], \end{cases} \qquad j \in \overline{2,n},$$

$$F^*_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^*_j(a_{j-1} + re^{i\alpha_j})\, e^{-itr} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{|a_j - a_{j-1}|} f^*_j(a_{j-1} + re^{i\alpha_j})\, e^{-itr} dr, \tag{8}$$

$$G^*_j(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) e^{itr} dr.$$

За рівністю Парсеваля отримаємо

$$\int\limits_{l_j} f(w)g(w)dw = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^*_j(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) g(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) e^{i\alpha_j} dr =$$

$$= \frac{e^{i\alpha_j}}{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^*_j(t) G^*_j(t) dt, \quad j \in \overline{2,n},$$

але

$$F_j^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_j} f(w) e^{-it(w-a_{j-1})e^{-i\alpha_j}} d\left((w-a_{j-1})e^{-i\alpha_j}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha_j} e^{ita_{j-1}e^{-i\alpha_j}} \int\limits_{l_j} f(w)\, e^{-itwe^{-i\alpha_j}} dw.$$

За іншою теоремою Пелі – Вінера [19, с. 26]

$$F_j^*(t) = e^{-i\alpha_j} e^{ita_{j-1}e^{-i\alpha_j}} F_j\left(te^{-i(\alpha_j-\pi/2)}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $g \in \pi_*(l_j)$, то $G_j^*(t) = 0$, $t < 0$. Взявши в (3) $\theta_* = -\varphi_j$, одержимо

$$g(w) = \frac{e^{-i\varphi_j}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_j}) e^{-re^{-i\varphi_j}w} dr.$$

Тому

$$g(a_{j-1} + \rho e^{i\alpha_j}) = \frac{e^{-i\varphi_j}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_j})\, e^{-re^{-i\varphi_j}(a_{j-1}+\rho e^{i\alpha_j})} dr =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi_j}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_j})\, e^{-a_{j-1}re^{-i\varphi_j}} e^{-i\rho r} dr.$$

Оскільки $h(-\varphi_j) = \sup\left\{\mathrm{Re}\,\left(ze^{-i\varphi_j}\right) : z \in \overline{D}\right\} = \mathrm{Re}\,\left(a_{j-1}e^{-i\varphi_j}\right)$, то $G(re^{-i\varphi_j})e^{-a_{j-1}re^{-i\varphi_j}} \in$ $\in L^2(0; +\infty)$. Тому на підставі теореми Пелі – Вінера

$$G(re^{-i\varphi_j}) = e^{-a_{j-1}re^{-i\varphi_j}} \frac{e^{i\varphi_j}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_{j-1} + \rho e^{i\alpha_j}) e^{ir\rho} d\rho, \quad r > 0.$$

Порівнявши останню рівність з (8), одержимо

$$\int\limits_{l_j} f(w)g(w)dw = \int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_j}} F_j(z)G(z)dz, \quad j \in \overline{2, n}.$$

Теорему доведено.

4. Теорема про згортку. У цьому пункті під $\mathbb{C}(\alpha; \alpha)$ розуміємо порожню множину, а під $\overline{\mathbb{C}(\alpha; \alpha)}$ — промінь $\{z : z = re^{i\alpha}, r > 0\}$.

Теорема 2. *Якщо* $f \in E^2[D]$ *і* $g \in E^2_*[D]$, *то для кожного* $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}$ *справджується рівність*

$$\int\limits_{\partial D} f(w+\tau)g(w)dw = \sum_{j=1}^{n+1} \int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_j}} \Phi_j(z)e^{\tau z}dz,$$

де $\Phi_j = F_jG$, $j \in \overline{1; n+1}$, *функції* F_j *та* G *визначені рівностями* (2) *та* (3).

Доведення. Зазначимо спочатку, що

$$\int\limits_{\partial D} f(w+\tau)g(w)dw = \int\limits_{\partial D(\tau)} f(w)g(w-\tau)dw =$$

$$= \int\limits_{\partial D} f(w)g(w-\tau)dw, \qquad \tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}, \tag{9}$$

де $D(\tau) = \{z\colon z-\tau \in D\}$. Справді, перша з рівностей (9) є очевидною. Для доведення другої зауважимо, що функція $\eta_\tau(w) = f(w)g(w-\tau)$ для будь-якого $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}$ є аналітичною в області $D\backslash\overline{D(\tau)}$. Цю область можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості многокутників та півсмуг, у кожній з яких функція $\eta_\tau(w)$ належить до класу Гарді – Смірнова E_1. Тому [20, с. 205; 13]

$$\int\limits_{\partial\left(D\backslash\overline{D(\tau)}\right)} \eta_\tau(w)dw = 0.$$

Звідси випливає друга з рівностей (9). Далі, якщо $g_\tau(w) = g(w-\tau)$ для будь-якого $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}$, маємо $g_\tau \in E^2_*[D]$. Оскільки $e^{wz} \in E^2[D]$ для кожного $z \in D_\times$, то з (9) отримаємо

$$\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D} g_\tau(w)e^{wz}dw = e^{\tau z}G(z). \tag{10}$$

Тому потрібне випливає з теореми 1.

Лема 1. *Якщо $f \in E^2[D]$ і $g \in E^2_*[D]$, то функція*

$$\psi(\tau) = \int\limits_{\partial D} f(w+\tau)g(w)dw \tag{11}$$

є неперервною в $\overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}$ і аналітичною в $\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)$, якщо $\alpha_{n+1} < \pi+\alpha_1$.

Доведення. Для кожного компакта з $\mathbb{C}[\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1]$ інтеграл у правій частині рівності (11) збігається абсолютно і рівномірно, бо, як показано при доведенні теореми 1, $\Phi_j(re^{-i\varphi_j}) \in L^1(0;+\infty)$ для кожного $j \in \overline{1,n+1}$. Тому за теоремою 2

$$\left|\int\limits_{\partial D} f(w+\tau)g(w)dw\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} \int \left|\Phi_j(re^{-i\varphi_j})\right| dr < c < +\infty.$$

Звідси випливає твердження леми.

Теорема 3. *Нехай функція G визначена рівністю* (3). *Рівняння*

$$\int\limits_{\partial D} f(w+\tau)g(w)dw = 0, \tag{12}$$

де $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}$, має ненульовий розв'язок $f \in E^2[D]$ тоді і тільки тоді, коли система $\{g(w-\tau)\colon \tau \leqslant 0\}$ не є повною в $E^2_*[D]$.

Доведення. Справді, з (9) випливає, що рівняння (12) рівносильне рівнянню

$$\int\limits_{\partial D} f(w)g(w-\tau)dw = 0, \quad \tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi+\alpha_1)}.$$

Але за лемою 4 з [15] простір, спряжений (сильно) до $E^2_*[D]$, можна ототожнити з $E^2[D]$ і значення функціонала $f \in E^2[D]$ на елементі $g(w-\tau)$ визначається формулою

$$\langle f; g(w-\tau)\rangle = \int\limits_{\partial D} f(w)g(w-\tau)dw.$$

Тому потрібне випливає з відомого критерію повноти Банаха.

Теорема 4. *Нехай функція G визначена рівністю* (3). *Рівняння* (12), *в якому* $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi+\alpha_1)}$, *має ненульовий розв'язок* $f \in E^2[D]$ *тоді і тільки тоді, коли система* $\left\{G(z)e^{\tau z}\colon \tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\ \pi+\alpha_1)}\right\}$ *не є повною в* $H^2(D_\times, h)$.

Доведення. В [15] показано, що рівність (3) задає топологічне відображення $E^2_*[D]$ на $H^2(D_\times, h)$ а з (10) маємо, що образом функції $g(w-\tau)$ є функція $G(z)e^{\tau z}$. Отже, теорема випливає з попередньої леми.

***Приклад* 1.** Нехай $D = \{z\colon |\pi - \arg z| < \pi/2\delta\}$, $\delta > 0$. Тоді $n = 1$, $a_1 = 0$, $\alpha_1 = \pi/2\delta$, $\alpha_2 = \pi - \pi/2\delta$. Тому $\beta = \delta$, $\alpha = \delta/(\delta-1)$, $\varphi_* = 0$. Отже, в цьому випадку $D_\times = \left\{z\colon\ |\arg z| < \pi/2\left(1 - \dfrac{1}{\delta}\right)\right\}$, а функції F_1 та F_2 належать просторам Гарді відповідно у півплощинах $\{z\colon \pi/2 + \pi/2\delta < \arg z < 3\pi/2 + \pi/2\delta\}$ та $\{z\colon \pi/2 - \pi/2\delta < \arg z < 3\pi/2 - \pi/2\delta\}$. Ймовірно, теореми 1 та 2 для цього випадку є відомими, проте нам не вдалося знайти такі твердження у публікаціях.

***Приклад* 2.** Нехай $D_\sigma = \{z\colon |\mathrm{Im}\, z| < \sigma,\ \mathrm{Re}\, z < 0\}$, $\sigma > 0$. Тоді $n = 2$, $a_1 = -\sigma$, $a_2 = \sigma$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. Тому $\beta = 0$, $\alpha = +\infty$, $\varphi_* = 0$. Отже, в цьому випадку $D_\times = \{z\colon\ |\arg z - \pi| < \pi/4\} = \mathbb{C}_-$, функції $F_1(z)e^{-i\sigma z}$ та $F_3(z)e^{i\sigma z}$ належать просторам Гарді у півплощині $\mathbb{C}_-$, а F_2 є цілою функцією експоненціального типу $\leq \sigma$ такою, що $F_2 \in L^2(\mathbb{R})$. Теореми 1 та 2 для цього випадку встановлено в [16].

1. *Beurling A.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert space // Acta math. – 1949. – **81**, № 1. – P. 239 – 255.
2. *Lax P.* Translation invariant subspaces // Acta math. – 1959. – **101**. – P. 163 – 178.
3. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. – ВИНИТИ. – 1974. – **12**. – С. 199 – 412.
4. *Nikolski N. K.* Operatos, functions and systems: an easy reading. – Amer. Math. Soc., 2002. – Vol. 1.
5. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния для автоморфных функций. – М.: Мир, 1976. – 412 с.
6. *Lax P.* Functional analysis. – Wiley Intersci., 2002.
7. *Гурарий В. П.* Групповые методы комутативного гармонического анализа // Итоги науки и техники. Сер. Математика / ВИНИТИ. – 1988. – **25**. – С. 1 – 312.
8. *Korenblum B.* An extansion of a Nevanlinna theory // Acta math. – 1974. – **135**, № 1. – P. 187 – 219.
9. *Korenblum B.* A Beurling-type theorem // Acta math. – 1977. – **138**, № 1. – P. 265 – 293.
10. *Shapiro Harold S.* Weakly invertible elements in certain function spaces and generators in l_2 // Mich. Math. J. – 1964. – **11**. – P. 161 – 165.
11. *Shapiro G. (Shapiro H. S.)* Some observations concerning the weighted polynomial approximation of holomorphic functions // Mat. Sb. – 1967. – **73**. – P. 320 – 330.

12. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
13. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 484 – 500.
14. *Дільний В. М.* Про зображення одного класу аналітичних функцій у кутовій області // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". – 2012. – **718**. – № 718. – С. 15 – 18.
15. *Винницкий Б. В.* Аппроксимационные свойства систем экспонент в одном пространстве аналитических функций // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 168 – 183.
16. *Винницький Б. В.* Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних у півсмузі // Мат. студ. – 1997. – **7**, № 1. – С. 41 – 52.
17. *Титчмарш Э.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948. – 418 с.
18. *Garnett J.* Bounded analytic functions. – New York: Acad. Press, 1981. – 467 p.
19. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 267 с.
20. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 336 с.
21. *Винницький Б. В.* Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій // Доп. НАН України. Сер. А. – 1995. – № 10. – С. 13 – 17.
22. *Vinnitskii B., Dil'nyi V.* On extension of Beurling – Lax theorem // Math. Notes. – 2006. – **79**. – P. 362 – 368.
23. *Дільний В. М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**. № 9. – С. 1257 – 1263.
24. *Дільний В. М.* Про існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 7 – 10.
25. *Dilnyi V.* On cyclic functions in weighted Hardy spaces // Журн. мат. фізики, аналізу, геометрії. – 2011. – **7**. – С. 19 – 33.
26. *Джрбашян М. М., Мартиросян В. М.* Теоремы типа Винера – Пели и Мюнца – Саса // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **41**. – С. 868 – 894.

Одержано 02.09.11,
після доопрацювання — 20.06.12