УДК 517.956.227; 517.956.8

Ю. Д. Головатий, В. М. Гут (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

КОЛИВНІ СИСТЕМИ З ЖОРСТКИМИ ЛЕГКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ: АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ТА ВЛАСНИХ ПРОСТОРІВ

We study the asymptotic behavior of the eigenvalues and eigenfunctions of a singularly perturbed boundary-value problem for a second-order elliptic operator. The problem describes the eigenmodes of an elastic system with finite number of stiff light-weight inclusions of arbitrary shape. The leading terms of the asymptotic representation of eigenelements are constructed with regard for their multiplicity. The justification of the asymptotic formulas is based on the uniform resolvent convergence of a certain family of unbounded self-adjoint operators.

Изучено асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций сингулярно возмущенной краевой задачи для эллиптического оператора второго порядка. Задача моделирует собственные колебания упругой системы с конечным числом жестких и одновременно легких включений произвольной формы. Найдены главные члены асимптотики собственных элементов с учетом их кратности. Обоснование асимптотических формул базируется на равномерной резольвентной сходимости некоторого семейства неограниченных самосопряженных операторов.

1. Вступ. Створення нових матеріалів із наперед заданими властивостями та їхнє промислове використання є основною метою багатьох сучасних технологій. В останні сорок років особливо широкого застосування набули різноманітні композитні матеріали, яким властива сильна неоднорідність фізичних характеристик. Це дало поштовх до появи і активного розвитку математичної теорії сильно неоднорідних середовищ. Одні з перших фундаментальних досліджень таких математичних проблем належать вітчизняним математикам В. О. Марченку та Є. Я. Хруслову [1]. Огляд досягнень теорії усереднення диференціальних операторів та асимптотичних методів для сингулярно збурених крайових задач з достатньо повною бібліографією можна знайти у монографіях [2 – 7].

Механічні процеси в композитах моделюють крайовими задачами для диференціальних операторів, де коефіцієнти при старших похідних за просторовими змінними відповідають за жорсткість матеріалу, а коефіцієнт при найстаршій часовій похідній у динамічній задачі чи при спектральному параметрі в стаціонарній — за розподіл маси середовища. В залежності від типу композитного матеріалу деякі з цих коефіцієнтів, чи всі одночасно, можуть сингулярно залежати від малого параметра (періодичність із малим періодом, різка зміна значень у різних підобластях). Задачі з швидкозмінним коефіцієнтом жорсткості, що описують так звану модель подвійної пористості, вивчено в [8 – 10]. Також вивчали моделі із скінченною кількістю жорстких включень [11 – 14]. Велику кількість робіт присвячено коливним системам із концентрованими масами (див., зокрема, [15 – 18], а також огляд результатів у [19]). Властивості механічних систем з масами, які концентруються в околі одновимірних многовидів, описано в [20, 21].

У [22, 23] досліджено моделі середовищ складної геометрії з одночасним збурення як густини маси, так і жорсткості. В цих моделях вважалось, що композит утворений з традиційних матеріалів, коли жорсткіший матеріал має більшу густину маси. В останні роки кілька провідних наукових центрів світу проводять експерименти з метою створення надміцних і водночас дуже легких матеріалів на основі вуглецевих нанотрубок[1]. За прогнозами фахівців новий ма-

[1] Carbon nanotubes *http://en.wikipedia.org/wiki/Carbon_nanotube.*

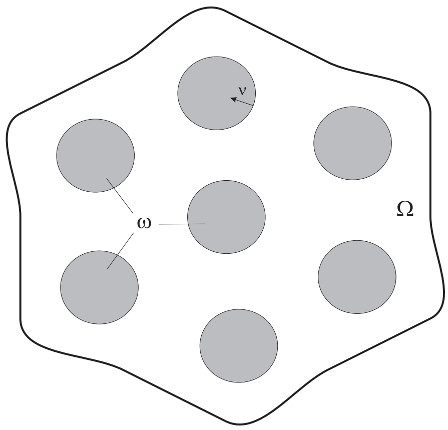
теріал з вуглецевих волокон буде у 100 разів міцнішим за сталь і майже у 50 разів легшим. Використання таких матеріалів поряд із традиційними приведе до появи конструкцій із сильно контрастними фізичними властивостями. Одновимірні моделі таких контрастних структур розглядали в [24, 25].

У цій статті ми вивчатимемо спектральні властивості композитного середовища (мембрана, пружне тіло), яке містить скінченну кількість надміцних легких включень довільної форми. Співвідношення коефіцієнтів жорсткості включень та „матриці” буде порядку ε^{-1} при $\varepsilon \to 0$, а співвідношення густин маси — порядку $\varepsilon^{\varkappa}$, $\varkappa > 0$. Досліджуватимемо асимптотичну поведінку власних значень та власних функцій еліптичної крайової задачі із сингулярно збуреними коефіцієнтами. Основним результатом статті є теореми збіжності для спектра та власних підпросторів, коли параметр ε прямує до нуля. Гранична задача, яка виникає при дослідженні, містить інтегральну крайову умову, і їй відповідає одне з некласичних самоспряжених розширень еліптичного оператора другого порядку в обмеженій області.

2. Формулювання задачі. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, а ω — її строго внутрішня відкрита підмножина. Межі $\partial\Omega$ та $\partial\omega$ є гладкими. Множина ω може мати скінченну кількість компонент зв'язності (див. рисунок). Нехай також $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\omega}$, тоді $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \partial\omega$. Для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ введемо функції

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon a(x), & x \in \Omega_0, \\ \alpha(x), & x \in \omega, \end{cases} \qquad r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & x \in \Omega_0, \\ \varepsilon^{\varkappa}\rho(x), & x \in \omega, \end{cases}$$

де a, α, r та ρ є неперервними і додатними на замиканні своїх областей визначення, а $\varkappa$ — додатне число.



Вивчатимемо поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ^ε та власних функцій u^ε крайової задачі

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = \lambda^\varepsilon r_\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{2.1}$$

На поверхні $\partial\omega$ контакту двох середовищ вимагатимемо виконання умов спряження

$$\left[u^\varepsilon\right]_{\partial\omega} = 0, \qquad \left[a_\varepsilon\, \partial_\nu u^\varepsilon\right]_{\partial\omega} = 0, \tag{2.2}$$

де ∂_ν — похідна вздовж векторного поля нормалей на $\partial\omega$, зорієнтованих у напрямку ω, а $\big[\,\cdot\,\big]_{\partial\omega}$ — стрибок функції при переході через поверхню $\partial\omega$.

При кожному $\varepsilon \in (0,1)$ задача (2.1), (2.2) є стандартною спектральною задачею з дискретним додатним спектром. Перенумеруємо власні значення задачі з урахуванням кратності

$$0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^\varepsilon \leqslant \ldots \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Власні функції $\{u_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ можна вибрати так, що вони утворюватимуть ортонормовану базу у ваговому просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ зі скалярним добутком

$$(u,v)_\varepsilon = \int\limits_\Omega r_\varepsilon u\overline{v}\,dx = \int\limits_{\Omega_0} r u\overline{v}\,dx + \varepsilon^\varkappa \int\limits_\omega \rho u\overline{v}\,dx$$

та нормою $\|u\|_\varepsilon = (u,u)_\varepsilon^{1/2}$.

3. Властивості власних значень збуреної задачі та їхня формальна асимптотика. Через $H^s(\Omega)$ позначатимемо простори С. Л. Соболєва, а через $H_0^1(\Omega)$ — підпростір функцій з $H^1(\Omega)$, які дорівнюють нулю на межі $\partial\Omega$. Введемо квадратичну форму

$$b_\varepsilon[u] = \int\limits_\Omega a_\varepsilon|\nabla u|^2\,dx = \varepsilon\int\limits_{\Omega_0} a|\nabla u|^2\,dx + \int\limits_\omega \alpha|\nabla u|^2\,dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Найпростіші властивості власних значень збуреної задачі як функцій параметра ε випливають безпосередньо з варіаційного принципу Куранта.

Лема 3.1. *Власні значення λ_n^ε є неперервними функціями змінної $\varepsilon \in (0,1)$. Кожне власне значення задовольняє оцінку $c\varepsilon \leqslant \lambda_n^\varepsilon \leqslant c_n\varepsilon$, де сталі c і c_n не залежать від ε.*

Доведення. Відомо, що

$$\lambda_n^\varepsilon = \inf_{E_n}\sup_{u\in E_n\setminus\{0\}} \frac{b_\varepsilon[u]}{\|u\|_\varepsilon^2},$$

де інфімум беруть за всіма n-вимірними підпросторами E_n в $H_0^1(\Omega)$. Неперервність власних значень у кожній точці інтервалу $(0,1)$ випливає з неперервності на кожному відрізку $[\varepsilon_1,\varepsilon_2] \subset \subset (0,1)$ квадратичних форм $b_\varepsilon[u]$ і $\|u\|_\varepsilon^2$ щодо ε, яка є рівномірною на кожній обмеженій множині з $H_0^1(\Omega)$. Справді, існує така стала $m = m(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, що

$$\big|b_\varepsilon[u] - b_{\varepsilon'}[u]\big| + \big|\|u\|_\varepsilon^2 - \|u\|_{\varepsilon'}^2\big| \leqslant m\,|\varepsilon^\gamma - \varepsilon'^\gamma|\,\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad \gamma = \min\{1,\varkappa\},$$

для всіх ε і ε' з відрізка $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$.

Далі,

$$\lambda_1^\varepsilon = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{b_\varepsilon[u]}{\|u\|_\varepsilon^2} \geqslant \varepsilon \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega_0} a|\nabla u|^2\,dx + \int_\omega \alpha|\nabla u|^2\,dx}{\int_{\Omega_0} r|u|^2\,dx + \int_\omega \rho|u|^2\,dx} = \varepsilon\lambda_1^1,$$

де λ_1^1 — перше власне значення задачі (2.1), (2.2) при $\varepsilon = 1$. Отже, $\lambda_n^\varepsilon \geqslant \varepsilon\lambda_1^1$ для всіх $\varepsilon \in (0,1)$ та $n \in \mathbb{N}$.

Тепер розглянемо допоміжну спектральну задачу $-\operatorname{div}(a\nabla v) = \eta r v$ в Ω_0, $v = 0$ на $\partial\Omega_0$. Нехай $v_1,\ldots,v_n$ — її власні функції, що відповідають першим n власним значенням $\eta_1,\ldots,\eta_n$, а $P_n \subset H_0^1(\Omega)$ — лінійна оболонка цих власних функцій, продовжених нулем на всю область Ω. Тоді

$$\lambda_n^\varepsilon \leqslant \sup_{u \in P_n \setminus \{0\}} \frac{b_\varepsilon[u]}{\|u\|_\varepsilon^2} = \varepsilon \sup_{u \in P_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega_0} a|\nabla u|^2\,dx}{\int_{\Omega_0} r|u|^2\,dx} = \varepsilon \eta_n,$$

що завершує доведення.

Побудуємо головні члени формальної асимптотики власних значень та власних функцій, щоб отримати задачу, яка далі відіграватиме роль граничної. Врахувавши лему 3.1, наближення власного значення виберемо так: $\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon\mu + o(\varepsilon)$, а власної функції — $u^\varepsilon \sim u + o(\varepsilon)$ в Ω_0 та $u^\varepsilon \sim w + \varepsilon w_1 + o(\varepsilon)$ в ω. Тоді з (2.1) та (2.2) отримаємо рівності

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = \mu r u \quad \text{в } \Omega_0, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{3.1}$$

$$u = w \quad \text{на } \partial\omega, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla w) = 0 \quad \text{в } \omega, \qquad \partial_\nu w = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla w_1) = 0 \quad \text{в } \omega, \qquad \alpha\,\partial_\nu w_1 = a\,\partial_\nu u \quad \text{на } \partial\omega. \tag{3.4}$$

Нехай область ω має K компонент зв'язності: $\omega = \bigcup_{k=1}^K \omega_k$. Розв'язок задачі Неймана (3.3) є сталою функцією на кожній з цих компонент, а значення сталих на ω_k можна вибирати незалежно. Отже, задача має нульове власне значення кратності K. Тоді згідно з альтернативою Фредгольма розв'язок w_1 неоднорідної задачі (3.4) існуватиме при виконанні умов

$$\int\limits_{\partial\omega_k} a\,\partial_\nu u\,ds = 0, \qquad k = 1, \ldots, K, \tag{3.5}$$

де ds — елемент поверхні. Врахувавши (3.1), (3.2), отримаємо спектральну задачу

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}(a\nabla u) = \mu r u \quad \text{в } \Omega_0, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ u \text{ — стала на } \partial\omega_k, \qquad \int\limits_{\partial\omega_k} a\,\partial_\nu u\,ds = 0, \quad k = 1, \ldots, K. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Зауважимо, що сталі, яких набуває функція u на межах $\partial\omega_k$, є невідомими. Така задача з інтегральними крайовими умовами, яку надалі називатимемо *граничною*, виникає в механіці та задачах електростатики [5, с.105; 26, с.70].

Отже, формальні міркування вказують на те, що власні значення збуреної задачі (2.1), (2.2) матимуть асимптотику $\lambda_n^\varepsilon = \varepsilon\mu_n + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, де μ_n — власне значення задачі (3.6), а власні функції u_n^ε збігатимуться до власних функцій задачі (3.6), які за неперервністю продовжені сталими в області ω_k. Доведенню цього факту присвячено наступні пункти.

4. Операторне формулювання збуреної та граничної задач. Уведемо у просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ самоспряжений оператор $A_\varepsilon = -\dfrac{1}{r_\varepsilon}\operatorname{div}(a_\varepsilon\nabla\,\cdot)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \big\{u \in H^2(\Omega \setminus \partial\omega) \colon u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad [u]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon\,\partial_\nu u]_{\partial\omega} = 0\big\},$$

який відповідає задачі (2.1), (2.2). Гранична ж задача (3.6) породжує в $L_2(r, \Omega_0)$ оператор $T = -\dfrac{1}{r}\operatorname{div}(a\nabla\cdot)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ v \in H^2(\Omega_0)\colon v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad v - \text{стала на } \partial\omega_k, \quad \int\limits_{\partial\omega_k} a\,\partial_\nu v\,ds = 0, \quad k = 1,\ldots,K \right\}.$$

Нашою метою є доведення близькості спектрів операторів A_ε та T. Проте вони діють у різних функціональних просторах, що створює додаткові проблеми. Тому поставимо у відповідність задачі (2.1), (2.2) інший оператор, а точніше сім'ю операторів, що діятимуть, як і оператор T, у просторі $L_2(r, \Omega_0)$.

Якщо θ не є власним значенням задачі Діріхле

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla u) = \theta\rho u \quad \text{в } \omega, \qquad u = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \tag{4.1}$$

то для кожного $\varphi \in H^{3/2}(\partial\omega)$ неоднорідна задача $-\operatorname{div}(\alpha\nabla v) = \theta\rho v$ в ω, $v = \varphi$ на $\partial\omega$ має єдиний розв'язок $v \in H^2(\omega)$ і коректно визначену нормальну похідну $\partial_\nu v \in H^{1/2}(\partial\omega)$. Введемо оператор Діріхле – Неймана $\Lambda(\theta)\colon H^{3/2}(\partial\omega) \to H^{1/2}(\partial\omega)$, що діє за правилом $\Lambda(\theta)\varphi = -\alpha\,\partial_\nu v$. Знак мінус взято, щоб узгодити означення цього оператора із загальноприйнятим [27, c.127], оскільки нормаль ν зорієнтовано всередину множини ω. Відомо [28], що таке відображення допускає неперервне продовження $\Lambda(\theta)\colon H^{1/2}(\partial\omega) \to H^{-1/2}(\partial\omega)$, яке для дійсних θ є самоспряженим оператором.

Виконаємо у рівнянні (2.1) заміну спектрального параметра $\lambda^\varepsilon = \varepsilon\mu^\varepsilon$. Нехай $\lambda_n^\varepsilon = \varepsilon\mu_n^\varepsilon$ — власне значення задачі (2.1), (2.2) з власною функцією u_n^ε. Звуження функції u_n^ε на ω є розв'язком задачі Діріхле

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla v) = \varepsilon^{1+\varkappa}\mu_n^\varepsilon\rho v \quad \text{в } \omega, \qquad v = \psi \quad \text{на } \partial\omega,$$

з $\psi = u_n^\varepsilon$. Використавши оператор Діріхле – Неймана, другу з умов спряження (2.2) можна записати так: $\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu_n^\varepsilon)u_n^\varepsilon = -\varepsilon a\,\partial_\nu u_n^\varepsilon$. Тому μ_n^ε і звуження u_n^ε на Ω_0 є власним значенням та власною функцією задачі

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = \mu r u \quad \text{в } \Omega_0, \qquad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \left(\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu) + \varepsilon a\,\partial_\nu\right)u = 0 \quad \text{на } \partial\omega \tag{4.2}$$

з нелінійною залежністю від μ. Нижче в лемі 4.2 ми конкретизуємо, в якому сенсі розумітимемо еквівалентність задач (2.1), (2.2) та (4.2).

У просторі $L_2(r, \Omega_0)$ введемо сім'ю операторів $T_\varepsilon(\mu) = -\dfrac{1}{r}\operatorname{div}(a\nabla\,\cdot)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu)) = \left\{v \in H^2(\Omega_0)\colon v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu) + \varepsilon a\partial_\nu)v = 0 \text{ на } \partial\omega\right\}.$$

Нехай $\Xi = \{(\varepsilon,\mu) \in (0,1)\times\mathbb{R}\colon \varepsilon^{1+\varkappa}\mu < \lambda_1\}$, де λ_1 — найменше власне значення задачі Діріхле (4.1). Оператори $T_\varepsilon(\mu)$ коректно визначено для ε та μ з множини Ξ, а задачу (4.2) тепер можна записати у вигляді операторного рівняння $(T_\varepsilon(\mu) - \mu)\,u = 0$.

Лема 4.1. *Оператор $T_\varepsilon(\mu)$ є самоспряженим і має компактну резольвенту для кожної пари $(\varepsilon,\mu) \in \Xi$. Такими ж властивостями володіє оператор T.*

Доведення. З урахуванням самоспряжености оператора $\Lambda(\theta)$ для всіх $u \in \mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu))$ та $v \in H^2(\Omega_0)$ маємо

$$(T_\varepsilon(\mu)u, v)_{L_2(r,\Omega_0)} = -\int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(a\nabla u)\,\bar{v}\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_0} u\,\operatorname{div}(a\nabla\bar{v})\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} a\partial_\nu u\,\bar{v}\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\omega} u\,(\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu) + \varepsilon a\partial_\nu)\bar{v}\,ds.$$

Тому дія операторів $T_\varepsilon(\mu)$ і $T_\varepsilon^*(\mu)$ є однаковою, а максимальний клас функцій v, для яких виконується тотожність $(T_\varepsilon(\mu)u, v)_{L_2(r,\Omega_0)} = (u, T_\varepsilon^*(\mu)v)_{L_2(r,\Omega_0)}$, збігається з $\mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu))$. Отже, $T_\varepsilon^*(\mu) = T_\varepsilon(\mu)$.

Далі, для довільних $u \in \mathcal{D}(T)$ і $v \in H^2(\Omega_0)$ інтегрування частинами дає

$$(Tu, v)_{L_2(r,\Omega_0)} = -\int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(a\nabla u)\,\bar{v}\,dx = -\int\limits_{\Omega_0} u\,\operatorname{div}(a\nabla\bar{v})\,dx -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} a\,\partial_\nu u\,\bar{v}\,ds - \int\limits_{\partial\omega} a\,\partial_\nu u\,\bar{v}\,ds + \int\limits_{\partial\omega} au\,\partial_\nu\bar{v}\,ds. \tag{4.3}$$

Щоб позбутися поверхневих інтегралів, передусім покладемо $v = 0$ на $\partial\Omega$. Другий поверхневий інтеграл в (4.3) буде нульовим для всіх $u \in \mathcal{D}(T)$, лише коли функція v є сталою на кожній з меж $\partial\omega_k$. Далі,

$$\int\limits_{\partial\omega} au\,\partial_\nu\bar{v}\,ds = g_1(u)\int\limits_{\partial\omega_1} a\partial_\nu\bar{v}\,ds + \ldots + g_K(u)\int\limits_{\partial\omega_K} a\partial_\nu\bar{v}\,ds, \tag{4.4}$$

де $g_k\colon \mathcal{D}(T) \to \mathbb{C}$ — лінійні неперервні функціонали такі, що $u = g_k(u)$ на кожній із меж $\partial\omega_k$. Функціонали g_k лінійно незалежні, оскільки для довільного набору сталих $\beta_1, \ldots, \beta_K$ існує функція h з $\mathcal{D}(T)$ така, що $h = \beta_k$ на $\partial\omega_k$. Тому лінійна комбінація (4.4) дорівнюватиме нулю для всіх $u \in \mathcal{D}(T)$ лише тоді, коли всі інтеграли у правій частині є нулями. Отже, $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$, а оператор T є самоспряженим.

Доведення компактності резольвент операторів $T_\varepsilon(\mu)$ і T є стандартним і випливає з компактності вкладення $H^2(\Omega_0) \subset L_2(\Omega_0)$.

Лему 4.1 доведено.

***Наслідок* 4.1.** *Спектр граничної задачі* (3.6) *є дійсним і дискретним. Всі власні значення є додатними і мають скінченну кратність.*

Для доведення наслідку залишилось зауважити, що оператор T є додатним. Справді,

$$(Tu, u)_{L_2(r,\Omega_0)} = \int\limits_{\Omega_0} a|\nabla u|^2\,dx > 0$$

для всіх ненульових $u \in \mathcal{D}(T)$.

Причиною необоротності оператора $T_\varepsilon(\mu) - \mu$ для $(\varepsilon, \mu) \in \Xi$ може бути лише нетривіальне скінченновимірне ядро задачі (4.2). Тому число μ^ε називатимемо *власним значенням задачі* (4.2), якщо μ^ε належить спектру оператора $T_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$.

Лема 4.2. *Нехай λ_n^ε — власні значення задачі* (2.1), (2.2) *з власними функціями u_n^ε. Для кожного натурального N і достатньо малих ε числа*

$$\varepsilon^{-1}\lambda_1^\varepsilon, \ldots, \varepsilon^{-1}\lambda_N^\varepsilon \tag{4.5}$$

є власними значеннями задачі (4.2) *з власними функціями $u_1^\varepsilon|_{\Omega_0}, \ldots, u_N^\varepsilon|_{\Omega_0}$ відповідно. Крім того, на інтервалі $(-\infty, \varepsilon^{-1}\lambda_N^\varepsilon]$ задача* (4.2) *не має інших власних значень.*

Доведення. Нехай $\mu_n^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$. Оператори $\Lambda_\varepsilon(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu_n^\varepsilon)$ визначено для всіх $n \leqslant N$, оскільки за лемою 3.1 величини $\varepsilon^{1+\varkappa}\mu_n^\varepsilon$ при малих ε є меншими за перше власне значення задачі (4.1). Тоді, як доведено вище, кожне з чисел μ_n^ε є власним значенням задачі (4.2), а відповідні власні функції є звуженням власних функцій збуреної задачі на область Ω_0.

Нехай тепер μ^ε — власне значення задачі (4.2) з інтервалу $(-\infty, \mu_N^\varepsilon]$, а v^ε — відповідна власна функція. Функцію v^ε можна продовжити на область Ω розв'язком задачі $-\operatorname{div}(\alpha\nabla w^\varepsilon) = \varepsilon^{1+\varkappa}\mu^\varepsilon\rho w^\varepsilon$ в ω, $w^\varepsilon = v^\varepsilon$ на $\partial\omega$. Покладемо

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} v^\varepsilon(x), & x \in \Omega_0, \\ w^\varepsilon(x), & x \in \omega. \end{cases}$$

Тоді $\varepsilon\mu^\varepsilon$ є власним значенням задачі (2.1), (2.2) з власною функцією u^ε. Справді, u^ε задовольняє другу умову спряження (2.2), бо $\alpha\,\partial_\nu w^\varepsilon = -\Lambda_\varepsilon(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu^\varepsilon)v^\varepsilon = \varepsilon a\,\partial_\nu v^\varepsilon$. Отже, μ^ε є одним із чисел (4.5).

5. Рівномірна резольвентна збіжність сім'ї операторів $T_\varepsilon(\mu)$. Доведення основного результату про асимптотичну поведінку спектра та власних підпросторів збуреної задачі (2.1) базується на такій теоремі.

Теорема 5.1. *Для кожного дійсного числа μ сім'я операторів $T_\varepsilon(\mu)$ збігається при $\varepsilon \to 0$ до оператора T в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

Для довільної функції $f \in L_2(\Omega_0)$ розглянемо резольвентні рівняння

$$(T_\varepsilon(\mu) + \mathrm{i})v_\varepsilon = f, \qquad (T + \mathrm{i})v = f,$$

де $\mathrm{i}^2 = -1$. Функції v_ε та v є розв'язками крайових задач

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}(a\nabla v_\varepsilon) + \mathrm{i}rv_\varepsilon = rf \quad \text{в } \Omega_0, \\ v_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega, \qquad (\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu) + \varepsilon a\,\partial_\nu)v_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\omega; \end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}(a\nabla v) + \mathrm{i}rv = rf \quad \text{в } \Omega_0, \\ v = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad v - \text{стала на } \partial\omega_k, \quad \int\limits_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v\,ds = 0, \end{gathered} \tag{5.2}$$

де $k = 1, \ldots, K$. Обидва розв'язки v_ε та v належать простору $H^2(\Omega_0)$, проте гранична поведінка послідовності v_ε при $\varepsilon \to 0$ у просторах Соболєва вимагає додаткового дослідження.

Використавши означення оператора Діріхле – Неймана, функцію v_ε можна продовжити на всю область Ω як розв'язок крайової задачі

$$- \operatorname{div}(a\nabla v_\varepsilon) + \mathrm{i} r v_\varepsilon = rf \quad \text{в } \Omega_0, \tag{5.3}$$

$$- \operatorname{div}(\alpha\nabla v_\varepsilon) = \varepsilon^{1+\varkappa}\mu\rho v_\varepsilon \quad \text{в } \omega, \tag{5.4}$$

$$v_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \partial\Omega, \quad [v_\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon\, \partial_\nu v_\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \tag{5.5}$$

зберігши для продовження це ж саме позначення. Нехай

$$\langle u\rangle_{\omega_k} = \frac{1}{|\omega_k|}\int\limits_{\omega_k} u\, dx$$

— середнє значення функції u в області ω_k.

Лема 5.1. *Для розв'язку v_ε задачі* (5.1) *при малих ε виконуються оцінки*

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant C_1\|f\|_{L_2(\Omega_0)}, \tag{5.6}$$

$$\|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}\|_{H^{1/2}(\partial\omega_k)} \leqslant C_2\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|_{L_2(\Omega_0)}, \tag{5.7}$$

де $k = 1,\ldots,K$. Сталі C_1 та C_2 не залежать від ε та f.

Доведення. Домножимо рівняння (5.3) на $\varepsilon\bar v_\varepsilon$, рівняння (5.4) на $\bar v_\varepsilon$ і зінтегруємо частинами:

$$\int\limits_\omega \alpha\,|\nabla v_\varepsilon|^2\, dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega_0} a\,|\nabla v_\varepsilon|^2\, dx + \mathrm{i}\,\varepsilon\int\limits_{\Omega_0} r\,|v_\varepsilon|^2\, dx = \varepsilon^{1+\varkappa}\mu\int\limits_\omega \rho\,|v_\varepsilon|^2\, dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega_0} rf\bar v_\varepsilon\, dx.$$

Для v_ε виконується нерівність Фрідріхса $\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_0\|\nabla v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}$, тому дійсну частину виразу зліва можна оцінити так:

$$\int\limits_\omega \alpha\,|\nabla v_\varepsilon|^2\, dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega_0} a\,|\nabla v_\varepsilon|^2\, dx \leqslant \varepsilon^{1+\varkappa}|\mu|\rho^*\int\limits_\omega |v_\varepsilon|^2\, dx + \varepsilon r^*\int\limits_{\Omega_0} |f|\,|v_\varepsilon|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_0^2\,\varepsilon(\varepsilon^\varkappa|\mu|\rho^* + \delta r^*)\,\|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\varepsilon r^*}{4\delta}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)}, \tag{5.8}$$

де $\rho^* = \sup_\omega \rho$, $r^* = \sup_{\Omega_0} r$, а δ — довільне додатне число. Ввівши також позначення $a_* = \inf_{\Omega_0} a$ та $\alpha_* = \inf_\omega \alpha$, з останньої нерівності отримаємо

$$\big(\alpha_* - \varepsilon\, c(\varepsilon,\delta)\big)\,\|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L_2(\omega)} + \varepsilon\big(1 - c(\varepsilon,\delta)\big)\,\|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega_0)} \leqslant \frac{\varepsilon r^*}{4\delta}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)},$$

де $c(\varepsilon,\delta) = c_0^2(\varepsilon^\varkappa|\mu|\rho^* + \delta r^*)$. Для малих ε і δ обидва доданки у лівій частині будуть додатними, тому

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c_1\,\|f\|_{L_2(\Omega_0)}, \tag{5.9}$$

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|_{L_2(\Omega_0)}, \tag{5.10}$$

де сталі c_1 та c_2 не залежать від ε та f. Зокрема, виконується і нерівність

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_3 \|f\|_{L_2(\Omega_0)}. \tag{5.11}$$

З (5.9) та нерівності Фрідріхса випливає оцінка (5.6).

Далі, з нерівності Пуанкаре та оцінки (5.10) маємо

$$\|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}\|_{L_2(\omega_k)} \leqslant c_4 \|\nabla v_\varepsilon\|_{L_2(\omega_k)} \leqslant c_5\sqrt{\varepsilon}\, \|f\|_{L_2(\Omega_0)}, \qquad k = 1, \ldots, K.$$

Тому $\|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}\|_{H^1(\omega_k)} \leqslant c_6\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|_{L_2(\Omega_0)}$. Нерівності (5.7) є наслідком неперервності операторів сліду $\gamma_k\colon H^1(\omega_k) \to H^{1/2}(\partial\omega_k)$.

Лему 5.1 доведено.

Вивчимо поведінку нормальної похідної v_ε на межі $\partial\omega$. Введемо простір

$$H^1(\Omega_0, \partial\Omega) = \big\{u \in H^1(\Omega_0)\colon u = 0 \text{ на } \partial\Omega\big\}.$$

Нехай P — еліптичний диференціальний оператор другого порядку з неперервними і обмеженими коефіцієнтами в області Ω_0, а простір $H^1_P(\Omega_0) = \big\{u \in H^1(\Omega_0, \partial\Omega)\colon Pu \in H_0^{-1}(\Omega_0)\big\}$ оснащений нормою графіка $\|u\|_{H^1_P(\Omega_0)} = \|u\|_{H^1(\Omega_0)} + \|Pu\|_{H_0^{-1}(\Omega_0)}$. Тут $H_0^{-1}(\Omega_0)$ — спряжений простір до $H^1(\Omega_0)$ щодо скалярного добутку в $L_2(\Omega_0)$. Через $\langle h, \psi\rangle_{\partial\omega}$ позначатимемо дію функціонала $h \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ на функціях $\psi \in H^{1/2}(\partial\omega)$. Нехай $Z\colon H^{1/2}(\partial\omega) \to H^1(\Omega_0, \partial\Omega)$ — неперервний оператор продовження, тобто правий обернений до оператора сліду $\gamma_1\colon H^1(\Omega_0, \partial\Omega) \to$ $\to H^{1/2}(\partial\omega)$.

Нехай далі $P = -\operatorname{div}(a\nabla\cdot) + \mathrm{i}\, r$. Відомо [29, c.197], що для $u \in H^1_P(\Omega_0)$ відображення

$$H^{1/2}(\partial\omega) \ni \psi \mapsto \langle \tau u, \psi\rangle_{\partial\omega} = \int\limits_{\Omega_0} a\,\nabla u \nabla Z\psi\, dx + \mathrm{i} \int\limits_{\Omega_0} ruZ\psi\, dx - \int\limits_{\Omega_0} rfZ\psi\, dx$$

задає лінійний неперервний функціонал τu на $H^{1/2}(\partial\omega)$ такий, що $\tau u = a\partial_\nu u|_{\partial\omega}$ для $u \in$ $\in H^2(\Omega_0)$. Крім того, відображення $\tau\colon H^1_P(\Omega_0) \to H^{-1/2}(\partial\omega)$ є неперервним. Зауважимо також, що τ не залежить від вибору оператора Z.

Лема 5.2. *Існують не залежні від ε та f сталі C_3 та C_4 такі, що*

$$\|a\partial_\nu v_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\omega)} \leqslant C_3 \|f\|_{L_2(\Omega_0)}, \tag{5.12}$$

$$\left| \int\limits_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_\varepsilon\, ds \right| \leqslant C_4 \varepsilon^{\varkappa} \|f\|_{L_2(\Omega_0)} \tag{5.13}$$

для всіх $k = 1, \ldots, K$, де слід нормальної похідної v_ε на $\partial\omega_k$ взято з боку області Ω_0.

Доведення. Розв'язок v_ε задачі (5.1), як елемент $H^2(\Omega_0)$, належить $H^1_P(\Omega_0)$, а $\tau v_\varepsilon =$ $= a\partial_\nu v_\varepsilon|_{\partial\omega}$. З леми 5.1 та неперервності вкладення $L_2(\Omega_0) \subset H_0^{-1}(\Omega_0)$ матимемо

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1_P(\Omega_0)} = \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_0)} + \|f\|_{H_0^{-1}(\Omega_0)} \leqslant c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_0)},$$

де стала c_1 не залежить від ε та f. З неперервності τ отримаємо

$$\|a\partial_\nu v_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\omega)} = \|\tau v_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\omega)} \leqslant \|\tau\|\,\|v_\varepsilon\|_{H^1_P(\Omega_0)} \leqslant C_3\,\|f\|_{L_2(\Omega_0)}.$$

Далі, зінтегруємо частинами рівняння (5.4) на компоненті зв'язності ω_k:

$$\int\limits_{\partial\omega_k} \Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu)v_\varepsilon\,ds = -\varepsilon^{1+\varkappa}\mu\int\limits_{\omega_k}\rho\,v_\varepsilon\,dx.$$

Звідси та з (5.11) випливає оцінка

$$\left|\int\limits_{\partial\omega_k}\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu)v_\varepsilon\,ds\right| \leqslant c_2\varepsilon^{1+\varkappa}|\mu|\,\|v_\varepsilon\|_{L_2(\omega_k)} \leqslant c_3\varepsilon^{1+\varkappa}\,\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_4\varepsilon^{1+\varkappa}\,\|f\|_{L_2(\Omega_0)}.$$

Залишилося зауважити, що $\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu)v_\varepsilon = -\varepsilon a\partial_\nu v_\varepsilon$ на кожній із меж $\partial\omega_k$.

Лему 5.2 доведено.

***Доведення теореми* 5.1.** Різниця $w_\varepsilon = v_\varepsilon - v$ розв'язків задач (5.1) та (5.2) задовольняє рівняння $-\operatorname{div}(a\nabla w_\varepsilon) + \mathrm{i}rw_\varepsilon = 0$ в Ω_0 та однорідні умови $w_\varepsilon = 0$ на $\partial\Omega$. Тому

$$\int\limits_{\Omega_0}\left(a|\nabla w_\varepsilon|^2 + \mathrm{i}r|w_\varepsilon|^2\right)\,dx = \int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu w_\varepsilon\,\bar w_\varepsilon\,ds =$$

$$= \int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu v_\varepsilon\,\bar v_\varepsilon\,ds - \int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu v\,\bar v_\varepsilon\,ds - \int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu v_\varepsilon\,\bar v\,ds. \tag{5.14}$$

Нагадаємо, що $\int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu v\,\bar v\,ds = 0$ з огляду на крайові умови задачі (5.2).

Оцінимо поверхневі інтеграли в (5.14). Розв'язок задачі (5.2) справджує нерівність

$$\|v\|_{H^2(\Omega_0)} \leqslant c_1\|f\|_{L_2(\Omega_0)}. \tag{5.15}$$

Скористаємося функціоналами g_k, введеними в доведенні леми 4.1:

$$\int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu v_\varepsilon\,\bar v\,ds = \overline{g_1(v)}\int\limits_{\partial\omega_1} a\partial_\nu v_\varepsilon\,ds + \ldots + \overline{g_K(v)}\int\limits_{\partial\omega_K} a\partial_\nu v_\varepsilon\,ds.$$

З (5.15) випливають оцінки $|g_k(v)| \leqslant c_2\|f\|_{L_2(\Omega_0)}$. Врахувавши (5.13), матимемо

$$\left|\int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu v_\varepsilon\,\bar v\,ds\right| \leqslant c_3\varepsilon^{\varkappa}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)}. \tag{5.16}$$

Далі, з лем 5.1, 5.2 та очевидних нерівностей $|\langle v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}| \leqslant c_4\|f\|_{L_2(\Omega_0)}$ отримаємо

$$\left|\int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu v_\varepsilon\,\bar v_\varepsilon\,ds\right| \leqslant \sum_{k=1}^{K}\left|\int\limits_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_\varepsilon\,\bar v_\varepsilon\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{K}\left|\int\limits_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_\varepsilon\left(\bar v_\varepsilon - \langle\bar v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}\right)ds\right| + \sum_{k=1}^{K}|\langle v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}|\left|\int\limits_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_\varepsilon\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{K} \|a\partial_\nu v_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\omega_k)} \|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}\|_{H^{1/2}(\partial\omega_k)} + c_5\varepsilon^{\varkappa}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c_6\varepsilon^{\gamma}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)},$$

де $\gamma = \min\{1/2, \varkappa\}$. Аналогічно, взявши до уваги (5.15), матимемо

$$\left|\int\limits_{\partial\omega} a\partial_\nu v\,\bar v_\varepsilon\,ds\right| = \left|\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v\,\big(\bar v_\varepsilon - \langle\bar v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}\big)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{K} \|a\partial_\nu v\|_{H^{-1/2}(\partial\omega_k)} \|v_\varepsilon - \langle v_\varepsilon\rangle_{\omega_k}\|_{H^{1/2}(\partial\omega_k)} \leqslant c_7\sqrt{\varepsilon}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)}. \qquad (5.17)$$

Отже, повертаючись до (5.14), з (5.16), (5.17) одержуємо

$$\left|\int\limits_{\Omega_0} \big(a|\nabla w_\varepsilon|^2 + \mathrm{i}\,r|w_\varepsilon|^2\big)\;dx\right| \leqslant c_8\varepsilon^{\gamma}\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_0)}.$$

Звідси $\|w_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_0)} = \|v_\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c_9\varepsilon^{\gamma/2}\,\|f\|_{L_2(\Omega_0)}$, що рівносильно нерівності

$$\big\|(T_\varepsilon(\mu) + \mathrm{i})^{-1} - (T + \mathrm{i})^{-1}\big\| \leqslant c_9\varepsilon^{\gamma/2},$$

оскільки всі сталі c_k у цьому доведенні не залежали від ε та f. З останньої нерівності випливає рівномірна збіжність резольвент $(T_\varepsilon(\mu)-\zeta)^{-1} \to (T-\zeta)^{-1}$ для всіх ζ з резольвентної множини оператора T [30] (теорема VIII.19).

Теорему 5.1 доведено.

***Наслідок* 5.1.** *Нехай $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ — обмежена послідовність. Тоді сім'я операторів $T_\varepsilon(\mu_\varepsilon)$ збігається при $\varepsilon \to 0$ до оператора T в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

Доведення. Оцінки розв'язку v_ε, отримані в лемах 5.1 та 5.2, залишаються правильними і тоді, коли в рівнянні (5.4) число μ замінити обмеженою послідовністю μ_ε.

6. Збіжність спектра та власних підпросторів збуреної задачі. Нехай H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, а B — самоспряжений оператор в H з областю визначення $\mathcal{D}(B)$.

Означення 6.1. *Квазімодою з похибкою δ для оператора B будемо називати таку пару $(\mu, v) \in \mathbb{R}\times\mathcal{D}(B)$, що $\|Bv - \mu v\| \leqslant \delta$ і $\|v\| = 1$.*

Якщо квазімода має похибку $\delta = 0$, то μ — власне значення, а v — нормована власна функція оператора B. Якщо ж $\delta > 0$ і на відрізку $[\mu-\delta, \mu+\delta]$ оператор B має дискретний спектр, то цей відрізок містить принаймні одне власне значення оператора B [31].

Означення 6.2. *Нехай $(\mu, v_1), \ldots, (\mu, v_N)$ — квазімоди оператора B. Говоритимемо, що вони утворюють сім'ю квазімод з похибкою δ та відхиленням від ортогональності τ, якщо $\|Bv_j - \mu v_j\| \leqslant \delta$ та $|(v_j, v_k) - \delta_{jk}| \leqslant \tau$ для всіх $j, k = 1, \ldots, N$, де δ_{jk} — символ Кронекера.*

Твердження 6.1 [32]. *Нехай $\{(\mu, v_j)\}_{j=1}^N$ — сім'я квазімод оператора B з похибкою δ та відхиленням від ортогональності τ, а також для деякого $h > 0$ спектр B на відрізку $[\mu-h, \mu+h]$ є лише дискретним. Якщо $\delta h^{-1} + \tau < N^{-1}$, то оператор B на відрізку $[\mu-h, \mu+h]$ має власні значення сумарної кратності не менше N.*

6.1. Збіжність власних значень. Покажемо, що спектр задачі (3.6) описує асимптотичну поведінку в головному при $\varepsilon \to 0$ власних значень збуреної задачі (2.1), (2.2).

Теорема 6.1. *Нехай* $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ *та* $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ *— власні значення задач* (2.1), (2.2) *та* (3.6) *відповідно, пераховані з урахуванням кратності. Тоді для кожного натурального* n *відношення* $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ *збігається до* μ_n *при* $\varepsilon \to 0$.

Лема 6.1. *Для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *послідовність* $\mu_n^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ *має скінченну границю при* $\varepsilon \to 0$, *яка є точкою спектра оператора* T.

Доведення. Припустимо від супротивного, що для деякого n

$$\mu_* = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \mu_n^\varepsilon < \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \mu_n^\varepsilon = \mu^*.$$

Числа μ_* та μ^* є скінченними, оскільки згідно з лемою 3.1 послідовність μ_n^ε обмежена. Крім того, μ_n^ε, як функція параметра ε, є неперервною. Тому для кожного $\mu \in (\mu_*, \mu^*)$ існує підпослідовність $\mu_n^{\varepsilon'}$, збіжна до μ при $\varepsilon' \to 0$. Введемо позначення $\Delta_h(\mu) = (\mu - h, \mu + h)$ і виберемо число h так, щоб $\Delta_h(\mu) \subset (\mu_*, \mu^*)$. За лемою 4.2 число $\mu_n^{\varepsilon'}$ є власним значенням оператора $T_{\varepsilon'}(\mu_n^{\varepsilon'})$ і при достатньо малих ε' міститься в околі $\Delta_h(\mu)$. Згідно з наслідком 5.1 оператори $T_{\varepsilon'}(\mu_n^{\varepsilon'})$ збігаються до T в сенсі рівномірної резольвентної збіжності, тому в інтервалі $\Delta_h(\mu)$ при малих ε' лежить власне значення T [30] (теорема VIII.23). З довільності μ і h випливає, що спектр оператора T має бути скрізь щільним у (μ_*, μ^*), а тому $[\mu_*, \mu^*] \subset \sigma(T)$. Якщо $\mu_* < \mu^*$, то останнє вкладення неможливе. Тому числа μ_* і μ^* рівні та збігаються з одним із власних значень оператора T.

Лему 6.1 доведено.

Лема 6.2. *Нехай* μ *є власним значенням оператора* T *кратності* s, *тобто* $\mu = \mu_n = \mu_{n+1} = \ldots = \mu_{n+s-1}$ *та* $\mu_{n-1} < \mu < \mu_{n+s}$ *для деякого* n. *Тоді сумарна кратність тих власних значень* λ^ε *задачі* (2.1), (2.2), *для яких відношення* $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon$ *збігаються до* μ, *не менша за* s.

Доведення. Виберемо h так, щоб окіл $\Delta_h(\mu)$ не містив інших точок спектра T, окрім μ. Згідно з теоремою 5.1 та теоремою VIII.23 [30] для достатньо малих ε в $\Delta_h(\mu)$ лежать власні значення оператора $T_\varepsilon(\mu)$ сумарної кратності s. Позначимо їх $\mu_1^\varepsilon, \ldots, \mu_s^\varepsilon$, врахувавши кратність, а через $v_1^\varepsilon, \ldots, v_s^\varepsilon$ відповідні ортонормовані власні функції, які є розв'язками задач

$$-\operatorname{div}(a\nabla v_k^\varepsilon) = \mu_k^\varepsilon r v_k^\varepsilon \quad \text{в } \Omega_0, \qquad v_k^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu) + \varepsilon a\,\partial_\nu)v_k^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\omega.$$

Кожну з них можна продовжити на область Ω до функції $V_k^\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$ як розв'язок задачі

$$-\operatorname{div}(a\nabla V_k^\varepsilon) = \mu_k^\varepsilon\, r V_k^\varepsilon \quad \text{в } \Omega_0, \quad -\operatorname{div}(\alpha\nabla V_k^\varepsilon) = \mu\,\varepsilon^{1+\varkappa}\rho V_k^\varepsilon \quad \text{в } \omega, \tag{6.1}$$

$$V_k^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad [V_k^\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon\,\partial_\nu V_k^\varepsilon]_{\partial\omega} = 0. \tag{6.2}$$

Для функції V_k^ε виконується нерівність

$$c_* \leqslant \|V_k^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c^* \tag{6.3}$$

зі сталими, не залежними від ε та k. Оцінка знизу є наслідком нормування власних функцій $v_k^\varepsilon = V_k^\varepsilon|_{\Omega_0}$ в $L_2(r, \Omega_0)$. Щодо оцінки зверху, то задачі (6.1), (6.2) та (5.3)–(5.5) збігаються, якщо в рівнянні (5.3) покласти $f = (\mathrm{i} + \mu_k^\varepsilon)V_k^\varepsilon$. Тому з нерівності (5.11) матимемо рівномірну обмеженість V_k^ε за параметром ε в $H^1(\Omega)$, а тому і в просторі $L_2(\Omega)$. Нехай $\hat{V}_k^\varepsilon = \|V_k^\varepsilon\|_\varepsilon^{-1} V_k^\varepsilon$. Доведемо, що пари $(\varepsilon\mu, \hat{V}_k^\varepsilon)$ є квазімодами оператора A_ε.

Нехай $\mu_k^\varepsilon = \mu + \delta_k^\varepsilon$. Зрозуміло, що $|\delta_k^\varepsilon| < h$ для всіх $k = 1, \ldots, s$. Безпосередньо з (6.1) для кожного $k = 1, \ldots, s$ отримуємо $(A_\varepsilon - \varepsilon\mu)\hat{V}_k^\varepsilon = f_k^\varepsilon$, де $f_k^\varepsilon = \varepsilon\, \delta_k^\varepsilon \, \|V_k^\varepsilon\|_\varepsilon^{-1} v_k^\varepsilon$ в Ω_0 та $f_k^\varepsilon = 0$ в ω. Тому $\|(A_\varepsilon - \varepsilon\mu)\hat{V}_k^\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \varepsilon|\delta_k^\varepsilon| < \varepsilon h$ для всіх $k = 1, \ldots, s$. Далі, використавши ортогональність власних функцій v_k^ε у просторі $L_2(r, \Omega_0)$ та (6.3), для $j \neq k$ матимемо

$$|(\hat{V}_j^\varepsilon, \hat{V}_k^\varepsilon)_\varepsilon| \leqslant \varepsilon^\varkappa \int\limits_\omega \rho |V_j^\varepsilon||V_k^\varepsilon| \, dx \leqslant c_1 \varepsilon^\varkappa.$$

Отже, $\{(\varepsilon\mu, \hat{V}_k^\varepsilon)\}_{k=1}^s$ є сім'єю квазімод оператора A_ε з похибкою $\delta = \varepsilon h$ та відхиленням від ортогональності $\tau = c_1\varepsilon^\varkappa$. Згідно з твердженням 6.1 сумарна кратність власних значень оператора A_ε в інтервалі $\Delta_h(\mu)$ не менша за s, як тільки $\varepsilon + c_1\varepsilon^\varkappa < s^{-1}$. Позаяк $\Delta_h(\mu)$ містить лише одну точку спектра T, то за попередньою лемою всі ці власні значення, поділені на ε, збігаються до μ.

Лему 6.2 доведено.

***Доведення теореми* 6.1.** Залишилося довести, що до s-кратного власного значення оператора T збігається рівно s відношень $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$. Припустимо, що сім'я квазімод $\{(\varepsilon\mu, \hat{V}_k^\varepsilon)\}_{k=1}^s$ апроксимує не весь спектр оператора A_ε, що локалізується в околі $\varepsilon\mu$. Тобто існує таке власне значення $\varepsilon\nu_\varepsilon$ оператора A_ε з власною функцією W_ε, що $\nu_\varepsilon \to \mu$, але

$$(W_\varepsilon, \hat{V}_k^\varepsilon)_\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{6.4}$$

для всіх $k = 1, \ldots, s$.

Нехай $w_\varepsilon = W_\varepsilon|_{\Omega_0}$. Вважатимемо, що W_ε нормована умовою $\|w_\varepsilon\|_{L_2(r,\Omega_0)} = 1$. Взагалі кажучи, w_ε не належить до $\mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu))$. Розглянемо допоміжну задачу

$$-\operatorname{div}(a\nabla z_\varepsilon) = \zeta_\varepsilon r z_\varepsilon \quad \text{в } \Omega_0, \quad z_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu) + \varepsilon a\, \partial_\nu) z_\varepsilon = \psi_\varepsilon \quad \text{на } \partial\omega, \tag{6.5}$$

де $\psi_\varepsilon = \big(\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\nu_\varepsilon) - \Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu)\big)w_\varepsilon$. Послідовність чисел ζ_ε вибираємо так, щоб $\zeta_\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$ та $\operatorname{dist}\{\zeta_\varepsilon, \sigma(T_\varepsilon(\mu))\} \geqslant \varepsilon$. Позаяк $W_\varepsilon \in H^2(\Omega \setminus \partial\omega)$, то $\psi_\varepsilon \in H^{1/2}(\partial\omega)$ та існує єдиний розв'язок $z_\varepsilon \in H^2(\Omega_0)$ задачі (6.5). Крім того,

$$\|z_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_0)} \leqslant \frac{c_1\, \|\psi_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\partial\omega)}}{\operatorname{dist}\{\zeta_\varepsilon, \sigma(T_\varepsilon(\mu))\}} \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon}\, \big\|\big(\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\nu_\varepsilon) - \Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu)\big)w_\varepsilon\big\|_{H^{1/2}(\partial\omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{\varepsilon}\, \big\|\Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\nu_\varepsilon) - \Lambda(\varepsilon^{1+\varkappa}\mu)\big\|\, \|w_\varepsilon\|_{H^{3/2}(\partial\omega)} \leqslant c_1 m \varepsilon^\varkappa |\nu_\varepsilon - \mu| \leqslant c_2\varepsilon^\varkappa,$$

оскільки на кожному відрізку $[\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{R}$, що не містить власних значень задачі (4.1), виконується нерівність $\|\Lambda(\theta) - \Lambda(\theta')\| \leqslant m|\theta - \theta'|$ для всіх $\theta, \theta' \in [\theta_1, \theta_2]$, де стала m залежить лише від вибраного відрізка.

За побудовою функції z_ε сума $w_*^\varepsilon = w_\varepsilon + z_\varepsilon$ належить до області визначення оператора $T_\varepsilon(\mu)$, а коректор z_ε є нескінченно малим в L_2-нормі. Далі,

$$(T_\varepsilon(\mu) - \mu)w_*^\varepsilon = -\frac{1}{r}\operatorname{div}(a\nabla w_\varepsilon) - \mu w_\varepsilon - \frac{1}{r}\operatorname{div}(a\nabla z_\varepsilon) - \mu z_\varepsilon = (\nu_\varepsilon - \mu)w_\varepsilon + (\zeta_\varepsilon - \mu)z_\varepsilon,$$

тому величина $\delta_*^\varepsilon = \|(T_\varepsilon(\mu) - \mu)w_*^\varepsilon\|_{L_2(r,\Omega_0)}$ є нескінченно малою порядку $|\nu_\varepsilon - \mu| + |\zeta_\varepsilon - \mu|\varepsilon^\varkappa$ при $\varepsilon \to 0$. З (6.3) та (6.4) випливає, що $(w_\varepsilon, v_k^\varepsilon)_{L_2(r,\Omega_0)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для всіх $k = 1, \ldots, s$. Тоді, беручи до уваги мализну z_ε, переконуємося, що добутки $(w_*^\varepsilon, v_k^\varepsilon)_{L_2(r,\Omega_0)}$ теж прямують до нуля. Отже, (μ, v_1^ε), $\ldots$, (μ, v_s^ε), (μ, w_*^ε) є сім'єю квазімод оператора $T_\varepsilon(\mu)$ з нескінченно малими похибкою та відхиленням від ортогональності. Тоді згідно з твердженням 6.1 вимірність спектрального проектора для $T_\varepsilon(\mu)$, що відповідає інтервалу $\Delta_h(\mu)$, буде не меншою ніж $s+1$. З огляду на те, що резольвенти $T_\varepsilon(\mu)$ збігаються до резольвенти T рівномірно, а кратність μ як власного значення оператора T, дорівнює s, отримуємо суперечність.

Теорему 6.1 доведено.

6.2. Збіжність власних підпросторів. Нехай U та V — підпростори гільбертового простору H, а P_U і P_V — відповідні ортогональні проектори. *Розхилом* між підпросторами U та V називатимемо величину $\delta_H(U, V) = \|P_U - P_V\|$.

Через $\mathcal{E}_\mu^0$ позначимо власний підпростір оператора T, що відповідає власному значенню μ. Оскільки елементи $\mathcal{E}_\mu^0$ є сталими функціями на межах $\partial\omega_k$, то за неперервністю їх можна продовжити цими ж сталими з Ω_0 на всю область Ω, отримавши підпростір $\mathcal{E}_\mu$ в $L_2(\Omega)$. Очевидно, що простори $\mathcal{E}_\mu^0$ і $\mathcal{E}_\mu$ мають однакову вимірність.

Теорема 6.2. *Нехай $\mathcal{E}_\mu^\varepsilon$ — підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений усіма такими власними функціями u_k^ε оператора A_ε, що $\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді для кожної точки μ зі спектра оператора T маємо*

$$\delta_{L_2(\Omega)}(\mathcal{E}_\mu^\varepsilon, \mathcal{E}_\mu) \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.6}$$

Якщо $\mu = \mu_n$ — просте власне значення, то власна функція u_n^ε оператора A_ε збігається в $L_2(\Omega)$ до власної функції v_n оператор T, що за неперервністю продовжена сталими в область Ω.

Доведення. З теореми 6.1 випливає, що $\dim \mathcal{E}_\mu^\varepsilon = \dim \mathcal{E}_\mu$ для достатньо малих ε. Доведення теореми ґрунтується на такому факті: якщо для кожного $v \in \mathcal{E}_\mu$, $\|v\|_{L_2(\Omega)} = 1$, існує нормований елемент $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\mu^\varepsilon$ такий, що $\|u_\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \beta$, то виконується нерівність $\delta_{L_2(\Omega)}(\mathcal{E}_\mu^\varepsilon, \mathcal{E}_\mu) \leqslant M\beta$, де β — достатньо мале додатне число, а стала M залежить лише від вимірності простору $\mathcal{E}_\mu$ [15] (лема 1.3).

Нехай $v \in \mathcal{E}_\mu$ — довільна власна функція оператора T з власним значенням μ, продовжена сталими на Ω. Крім того, $\|v\|_{L_2(\Omega_0)} = 1$. Доведемо, що існує така нормована лінійна комбінація u_ε власних функцій $u_k^\varepsilon \in \mathcal{E}_\mu^\varepsilon$ оператора A_ε, що норма $\|u_\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega)}$ є як завгодно малою при $\varepsilon \to 0$.

Взагалі кажучи, v не належить до $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$, тому побудуємо коректор. Нехай ψ — розв'язок задачі $-\operatorname{div}(\alpha\nabla\psi) = 0$ в ω, $\alpha\partial_\nu\psi = a\partial_\nu v$ на $\partial\omega$, де похідну $\partial_\nu v$ обчислено з боку області Ω_0. Розв'язок ψ існує, бо для v виконуються умови $\int_{\partial\omega_k} \alpha\partial_\nu v\, ds = 0$, $k = 1, \ldots, K$. Хоча він не єдиний, це є непринциповим для наших міркувань. Розглянемо також таку функцію φ з класу $H^2(\Omega_0)$, що $\varphi = 0$ на $\partial\Omega$, $\varphi = \psi$ та $\partial_\nu\varphi = 0$ на $\partial\omega$. Покладемо $w = \psi$ в ω та $w = \varphi$ в Ω_0. Легко переконатися, що функція $v_\varepsilon = v + \varepsilon w$ належить до $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$ і $\|v_\varepsilon\|_\varepsilon \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Крім того,

$$\big|\|v_\varepsilon\|_\varepsilon - 1\big| \leqslant c_1\varepsilon. \tag{6.7}$$

Введемо позначення $\hat{v}_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|_\varepsilon^{-1} v_\varepsilon$ і доведемо, що пара $(\varepsilon\mu, \hat{v}_\varepsilon)$ є квазімодою оператора A_ε з похибкою порядку ε. Справді, безпосередньо переконуємося, що $A_\varepsilon \hat{v}_\varepsilon - \varepsilon\mu\hat{v}_\varepsilon = f_\varepsilon$, де

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\|v_\varepsilon\|_\varepsilon} \cdot \begin{cases} -\varepsilon\mu(v + \varepsilon\psi)) & \text{в } \omega, \\ -\varepsilon^2 \left(\dfrac{1}{r} \operatorname{div}(a\nabla\varphi) + \mu\varphi \right) & \text{в } \Omega_0. \end{cases}$$

Тому виконується оцінка $\|f_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant c_2\varepsilon^\gamma$, де $\gamma = \min\{1 + \varkappa/2, 2\}$.

Нехай інтервал $[\mu - b, \mu + b]$ не містить інших власних значень оператора T, окрім μ. За лемою Вішика – Люстерника існує нормований вектор $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\mu^\varepsilon$ такий, що $\|u_\varepsilon - \hat{v}_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \leqslant \dfrac{2c_2}{b}\varepsilon^\gamma$. Врахувавши оцінку (6.7), отримаємо $\|u_\varepsilon - v\|_{L_2(r,\Omega_0)} \leqslant c_3\varepsilon$. Щодо збіжності u_ε на ω, то скористаємося зображенням $u_\varepsilon = c_1^\varepsilon u_1^\varepsilon + \ldots + c_m^\varepsilon u_m^\varepsilon$, де u_k^ε — ортонормовані власні функції оператора A_ε, для яких $\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon \to \mu$. Тому $b_\varepsilon[u_\varepsilon] = \lambda_1^\varepsilon {c_1^\varepsilon}^2 + \ldots + \lambda_m^\varepsilon {c_m^\varepsilon}^2 \leqslant c\varepsilon$. З останньої нерівності випливає $\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C$. Оскільки послідовність u_ε збігається сильно у просторі $L_2(r, \Omega_0)$, то звідси одержуємо $\|u^\varepsilon - v\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Отже, $\delta_{L_2(\Omega)}(\mathcal{E}_\mu^\varepsilon, \mathcal{E}_\mu) \to 0$, що завершує доведення (6.6). Зрозуміло, що у випадку одновимірних просторів $\mathcal{E}_\mu$ та $\mathcal{E}_\mu^\varepsilon$ збіжність до нуля їхнього розхилу еквівалентна збіжності одиничних векторів, які їх породжують.

Теорему 6.2 доведено.

Отже, ми довели, що власні значення задачі (2.1), (2.2) мають асимптотику

$$\lambda_n^\varepsilon = \varepsilon\mu_n + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0,$$

для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$, де μ_n — власне значення задачі (3.6). Якщо власне значення μ_n є простим, то власна функція u_n^ε збуреної задачі збігається в $L_2(\Omega)$ до власної функції v_n граничної задачі (3.6), яка продовжена за неперервністю сталими в область Ω.

1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. — Киев: Наук. думка, 1974.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 472 с.
3. *Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems // Asymptotic Methods. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989. — xv+421 p.
4. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 311 с.
5. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993. — 464 с.
6. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. — Киев: Наук. думка, 2005. — 552 с.
7. *Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А., Шамаев А. С.* Усреднение. Методы и приложения. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007.
8. *Сандраков Г. В.* Осреднение системы уравнений теории упругости с контрастными коэффициентами // Мат. сб. — 1999. — **190**, № 12. — С. 37 – 92.
9. *Zhikov V. V.* On spectrum gaps of some divergent elliptic operators with periodic coefficients // Алгебра и анализ. — 2004.– **16**, вып. 5. — С. 733 – 790.
10. *Bourgeat A., Chechkin G. A., Piatnitski A. L.* Singular double porosity model // Appl. Anal. — 2003. — **82**, № 2. — P. 103 – 116.
11. *Geymonat G., Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Palencia E., Roach G. F.* Spectral properties of certain stiff problems in elasticity and acoustics // Math. Meth. Appl. Sci. — 1982. — **4**. — P. 291 – 306.

12. *Lobo M., Nazarov S.A., Pérez E.* Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues // J. Appl. Math. — 2005. — P. 1 – 40.
13. *Gómez D., Lobo M., Nazarov S.A., Pérez E.* Asymptotics for the spectrum of the Wentzell problem with a small parameter and other related stiff problems // J. math. pures et appl. — 2006. — **86**. — P. 369 – 402.
14. *Golovaty Yu., Babych N.* On WKB asymptotic expansions of high frequency vibrations in stiff problems // Proc. Equadiff'99. — Singapore: World Sci., 1999. — P. 103 – 105.
15. *Головатый Ю. Д.* Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1992. — **54**. — С. 29 – 72.
16. *Чечкин Г. А.* Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе „легких" концентрированных масс. Двумерный случай // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — **69**, № 4. — С. 161 – 204.
17. *Rybalko V.* Vibrations of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions // Asymp. Anal. — 2002. — **32**. — P. 27 – 62.
18. *Chechkin G. A., Mel'nyk T. A.* Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses //Appl. Anal. — 2011. — P. 1 – 41 (doi: 10.1080/00036811.2011.602634).
19. *Lobo M., Pérez E.* Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review // C. R. Mecanique. — 2003. — **331**. — P. 303 – 317.
20. *Golovaty Yu. D., Gomez D., Lobo M., Pérez E.* Asymptotics for the eigenelements of vibrating membranes with very heavy thin inclusions // C.R. Mecanique. — 2002. — **330(11)**. — P. 777 – 782.
21. *Golovaty Yu. D., Gomez D., Lobo M., Pérez E.* On vibrating membranes with very heavy thin inclusions // Math. Models and Meth. Appl. Sci.. — 2004. — **14**, № 7. — P. 987 – 1034.
22. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами // Докл. РАН. — 1993. — **333**, № 1. — С. 13 – 15.
23. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями // Алгебра и анализ. — 2000. — **12**, № 2. — С. 188 – 238.
24. *Golovaty Yu., Babych N.* Asymptotic analysis of vibrating system containing stiff-heavy and flexible-light parts // Nonlinear Boundary Value Problems. — 2008. — **18**. — P. 194 – 207.
25. *Golovaty Yu. D., Babych N.* Low and high freqensy approximations to eigenvibrations in a medium with doubl contrasts // J. Comput. and Appl. Math. — 2010. — **234**. — P. 1860 – 1867.
26. *Showalter R.* Hilbert space methods for partial differential equations // Electron. J. Different. Equat. — 1994.
27. *Inverse* problems for partial different. equations // Appl. Math. Ser. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1998. — **127**.
28. *Sylvester J., Uhlmann G.* The Dirichlet to Neumann map and its applications // Inverse Problems in Partial Differential Equations. — 1990. — P. 101 – 139.
29. *Hsiao G.C., Wendland W. L.* Boundary integral equations // Appl. Math. Sci. — Berlin: Springer, 2008. — **164**. — 618 p.
30. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики // Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977. — Т. 1. — 354 с.
31. *Вишик М. И., Люстерник А. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, вип. 5. — С. 3 – 122.
32. *Лазуткин В. Ф.* Квазиклассическая асимптотика собственных функций // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. — 1988. — **34**. — С. 135 – 174.

Одержано 01.11.11