УДК 517.925.4

**В. Е. Круглов** (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

# РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, АНАЛИТИЧНЫМИ В ОКРЕСТНОСТИ ФУКСОВОЙ НУЛЕВОЙ ТОЧКИ

We obtain a solution of a second-order differential equation with coefficients analytic near a Fuchsian zero point. This solution is expressed via the hypergeometric functions and the fractional-order hypergeometric functions introduced in this paper.

Знайдено розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку з аналітичними в околі фуксової нульової точки коефіцієнтами. Цей розв'язок виражено через гіпергеометричні функції та введені у цій роботі гіпергеометричні функції дробового порядку.

**1. Введение.** В монографии [1] в комплексной плоскости изучалось уравнение типа Фукса

$$\sum_{i=0}^{n} t^i P_i\,(t)\,u^{(i)} = 0, \qquad P_n(t) \equiv 1, \tag{1}$$

где $P_i\,(t)$ — аналитические функции в окрестности нулевой точки, и решение (Фробениуса) этого уравнения было построено в виде обобщенного степенного ряда, указана область абсолютной сходимости ряда и найдены коэффициенты $l_m$ этого ряда, выраженные через определители $m$-го порядка, как решение бесконечной линейной системы уравнений относительно $l_m$, что делает невозможным получение какой-либо конструктивной информации о самом ряде.

Для случая $n = 2$ уравнение (1) изучалось также в монографии [2].

В данной работе в комплексной плоскости изучается уравнение

$$t^2 P_1\,(t)\,u'' + tP_2\,(t)\,u' + P_3\,(t)\,u = 0, \tag{2}$$

где функции $P_i(t)$ аналитичны в окрестности фуксовой нулевой точки и для них справедливы в этой окрестности разложения

$$P_i\,(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + \ldots, \qquad a_{i0} \neq 0, \quad i = \overline{1,3}. \tag{3}$$

Решение уравнения (2) в окрестности фуксовой точки $t = 0$ будем искать в виде обобщенного степенного ряда (решение Фробениуса)

$$u\,(t) = t^{\rho}(l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \ldots), \qquad l_0 \neq 0. \tag{4}$$

Известно [1], что этот ряд абсолютно сходится в кольце $0 < |t| < R$, где $R$ — расстояние от точки $t = 0$ до ближайшей особой точки дифференциального уравнения (2).

В данной работе получены явные формулы для коэффициентов $l_m$ ряда (4), которые выражены через коэффициенты заданных рядов (3). Кроме того, с помощью найденных формул для коэффициентов $l_m$ выполнена в области сходимости ряда (4) перегруппировка его членов, что позволило представить ряд (4) как линейную комбинацию гипергеометрических рядов и введенных в этой работе гипергеометрических рядов дробного порядка.

Данная работа завершает цикл работ [3 – 6], объединенных единой идеологией конструктивного построения решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с нулевой фуксовой точкой.

Приведенная ниже идеология нахождения решения уравнения (2) легко переносится на случай дифференциального уравнения (1).

В последнее время возобновился интерес к изучению линейных дифференциальных уравнений сведением их к линейным разностным уравнениям. В книге [7] приведено достаточно много теоретических и прикладных примеров из этой области.

**2. Идеология построения решения.** Подставляя $u(t)$ в уравнение (2) и обнуливая коэффициенты при степенях $t$, получаем разностное уравнение

$$\alpha_0^{(0)} = a_{10}\rho(\rho-1) + a_{20}\rho + a_{30} = 0, \tag{5}$$

$$l_k = \left(\alpha_{k-1}^{(1)} l_{k-1} + \alpha_{k-2}^{(2)} l_{k-2} + \ldots + \alpha_0^{(k)} l_0\right) / \left(-\alpha_k^{(0)}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$\alpha_s^{(j)} = (\rho+s)(\rho+s-1)a_{1j} + (\rho+s)a_{2j} + a_{3j}, \qquad j, s = 0, 1, \ldots. \tag{7}$$

Назовем эти числа элементами ранга $j$.

Из уравнения (5) находим два корня $\rho_1$ и $\rho_2$, и пусть $\mathrm{Re}\rho_1 \geq \mathrm{Re}\rho_2$. В дальнейшем в формулах (7) полагаем $\rho = \rho_1$.

Покажем сначала, что для любых значений $\rho_1$ и $\rho_2$ числа $\alpha_k^{(0)} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Это следует из уравнения (5) и равенства $\rho_1 + \rho_2 = 1 - a_{20}/a_{10}$, так как

$$\alpha_k^{(0)} = k a_{10}\left(2\rho_1 - 1 + \frac{a_{20}}{a_{10}} + k\right) = k a_{10}(\rho_1 - \rho_2 + k) \neq 0. \tag{8}$$

При решении разностного уравнения (6) будем использовать естественное пошаговое его решение, т. е. на каждом очередном шаге использования уравнения (6) будем учитывать решения, найденные на предыдущих шагах. При таком подходе в построении решения уравнения (6) используются, как легко заметить из (6), дроби $\alpha_i^{(j)} / \left(-\alpha_{i+j}^{(0)}\right)$. В дальнейшем для упрощения записи, что не влияет на изложение, вместо дроби $\alpha_i^{(j)} / \left(-\alpha_{i+j}^{(0)}\right)$ будем использовать элемент $\alpha_i^{(j)}$, а в итоговом результате вместо элемента $\alpha_i^{(j)}$ запишем дробь $\alpha_i^{(j)} / \left(-\alpha_{i+j}^{(0)}\right)$. Поэтому уравнение (6) представим в более удобной форме с сохранением предыдущих обозначений:

$$l_k = l_{k-1}\alpha_{k-1}^{(1)} + l_{k-2}\alpha_{k-2}^{(2)} + \ldots + l_0\alpha_0^{(k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Случай, когда разность $\rho_1 - \rho_2$ равна целому неотрицательному числу, в этой работе не рассматривается.

**3. Первичная информация о $l_k$.** Алгоритм решения уравнения (9) аналогичен приведенному в [4] алгоритму решения линейного разностного уравнения конечного порядка.

Определим сначала тот набор элементов $\alpha_q^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, из которых конструируются коэффициенты $l_k$, $k = 1, 2, \ldots$, ряда (4). Из уравнения (9) при $l_0 = 1$ получаем

$$l_1 = \alpha_0^{(1)}, \qquad l_2 = l_1\alpha_1^{(1)} + l_0\alpha_0^{(2)} = \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)} + \alpha_0^{(2)},$$
$$l_3 = l_2\alpha_2^{(1)} + l_1\alpha_1^{(2)} + l_0\alpha_0^{(3)} = \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_0^{(2)}\alpha_2^{(1)} + \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(2)} + \alpha_0^{(3)}. \tag{10}$$

Отсюда видно, что для нахождения $l_1$, $l_2$, $l_3$ используются наборы элементов соответственно

$$J_1 = \left(\alpha_0^{(1)}\right), \qquad J_2 = \left(\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}; \alpha_0^{(2)}\right), \qquad J_3 = \left(\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}; \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}; \alpha_0^{(3)}\right).$$

Таким образом, становится очевидным, что при нахождении коэффициента $l_k$ используется набор элементов

$$J_k = \left(\alpha_0^{(1)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(1)}; \alpha_0^{(2)}, \ldots, \alpha_{k-2}^{(2)}; \ldots; \alpha_0^{(s)}, \ldots, \alpha_{k-s}^{(s)}; \ldots; \alpha_0^{(k-1)}, \alpha_1^{(k-1)}; \alpha_0^{(k)}\right), \tag{11}$$

так как из уравнения (9) вытекает, что каждый следующий $k$-й шаг рекурсии добавляет к предыдущему набору элементов $J_{k-1}$ элементы $\alpha_{k-1}^{(1)}$, $\alpha_{k-2}^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha_1^{(k-1)}$, $\alpha_0^{(k)}$.

В наборе элементов (11) элементы с нулевым нижним индексом назовем начальными элементами набора, а элементы, у которых сумма ранга элемента и его нижнего индекса совпадает с индексом $k$ набора $J_k$, — концевыми элементами набора (это элементы $\alpha_{k-1}^{(1)}$, $\alpha_{k-2}^{(2)}$, $\ldots$, $\alpha_1^{(k-1)}$). Элемент $\alpha_0^{(k)}$ является одновременно и начальным, и концевым.

Цепью, составленной из элементов набора $J_k$, назовем произведение максимально возможного количества элементов из этого набора, при этом для любых двух последовательных множителей из этого произведения справедливо правило умножения

$$\ldots \alpha_i^{(j)}\alpha_{i+j}^{(j_1)} \ldots, \qquad j, j_1 = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Правило умножения элементов в цепи, как и следующая лемма, легко проверяются индукцией с использованием уравнения (9).

**Лемма 1.** *Любая цепь, составленная из элементов набора $J_k$, $k = 1, 2, \ldots$, начинается с любого из начальных элементов этого набора и оканчивается одним из концевых элементов этого набора.*

Элемент $\alpha_0^{(k)}$ также образует цепь.

Порядком цепи назовем сумму рангов всех элементов, составляющих эту цепь.

**Лемма 2.** *Порядок каждой цепи, составленной из элементов набора $J_k$, равен $k$.*

***Доказательство.*** Пусть $\alpha_0^{(j_1)}$ — какой-либо начальный элемент набора $J_k$. Тогда, согласно определению цепи и лемме 1, структура цепи такова:

$$\alpha_0^{(j_1)}\alpha_{j_1}^{(j_2)}\alpha_{j_1+j_2}^{(j_3)} \ldots \alpha_{j_1+j_2+\ldots+j_{m-1}}^{(j_m)}, \tag{13}$$

где $\alpha_{j_1+j_2+\ldots+j_{m-1}}^{(j_m)}$ — концевой элемент цепи. Но согласно определению концевого элемента цепи получаем $j_1 + \ldots + j_{m-1} + j_m = k$, что и завершает доказательство.

***Замечание* 1.** $\alpha_0^{(k)}$ — цепь порядка $k$.

Из формулы (9) вытекает следующая теорема.

**Теорема 1.** *Коэффициент $l_k$, $k = 1, 2, \ldots$, ряда* (4) *является суммой всех цепей порядка $k$, составленных из элементов набора $J_k$.*

Таким образом, можно сделать вывод, что с учетом структуры цепи (13) решение уравнения (6) состоит из суммы дробей

$$(-1)^m \frac{\alpha_0^{(j_1)}\alpha_{j_1}^{(j_2)}\ldots\alpha_{j_1+\ldots+j_{m-1}}^{(j_m)}}{\alpha_{j_1}^{(0)}\alpha_{j_1+j_2}^{(0)}\ldots\alpha_k^{(0)}}, \qquad j_1=\overline{1,k}, \tag{14}$$

$$j_1+\ldots+j_m=k, \quad 1\le m\le k-j_1+1, \quad k=1,2,\ldots .$$

**4. Некоторые комбинаторные формулы, касающиеся коэффициента $l_k$.** Обозначим через $r_k$ количество цепей порядка $k$, составленных из элементов набора $J_k$, что равносильно количеству слагаемых, из которых состоит коэффициент $l_k$ ряда (4).

**Лемма 3.**

$$r_k=2^{k-1}. \tag{15}$$

***Доказательство*** проведем индукцией по $k$ . Из (10) следует, что $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=2^2$. Пусть равенство (15) справедливо для $k=s$, т. е. $r_s=2^{s-1}$. Покажем, что для $k=s+1$ число $r_{s+1}=2^s$.

Используем формулу (9) для $k=s+1$ :

$$l_{s+1}=l_s\alpha_s^{(1)}+l_{s-1}\alpha_{s-1}^{(2)}+\ldots+l_0\alpha_0^{(s+1)}.$$

Коэффициент $l_m$ состоит из $r_m=2^{m-1}$, $m=\overline{1,s}$, слагаемых. Следовательно, коэффициент $l_{s+1}$ состоит из $r_{s+1}=r_s+\ldots+r_1+1=2^{s-1}+2^{s-2}+2^0+1=2^s$ слагаемых.

Лемма доказана.

Поскольку среди множества цепей порядка $k$ содержатся цепи $\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\ldots\alpha_{k-1}^{(1)}$ и $\alpha_0^{(k)}$, возникает задача нахождения числа цепей $k$-го порядка, состоящих из $m$, $1\le m\le k$, множителей.

Из множества цепей порядка $k$ выделим подмножество, в котором каждая из цепей состоит из $m$ множителей и которые исчерпываются $x_1$ элементами ранга один, $x_2$ элементами ранга два и т. д., $x_k$ элементами ранга $k$, т. е.

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=m, \qquad x_i\ge 0, \qquad i=\overline{1,k}.$$

Подсчет количества цепей в этом подмножестве, согласно известной [8, с. 38] комбинаторной задаче о перестановках с повторениями, приводит к формуле

$$\frac{m!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}, \qquad x_i\ge 0, \qquad i=\overline{1,k}.$$

Порядок каждой цепи из этого подмножества равен

$$x_1+2x_2+\ldots+kx_k=k.$$

Таким образом, сумма

$$Q_{m,k}=\sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_k=m\\ x_1+2x_2+\ldots+kx_k=k}}\frac{m!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}, \qquad x_i\ge 0, \qquad i=\overline{1,k},$$

— это количество цепей порядка $k$, каждая из которых состоит из $m$ множителей.

Согласно лемме 3

$$\sum_{m=1}^{k} Q_{m,k} = 2^{k-1}.$$

В дальнейшем нам понадобится формула [8, с. 34]

$$C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}. \tag{16}$$

**Лемма 4.**

$$Q_{m,k} = C_{k-1}^{m-1}. \tag{17}$$

***Доказательство.*** Среди цепей порядка $k$ содержится по одной цепи $\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\ldots\alpha_{k-1}^{(1)}$ и $\alpha_0^{(k)}$, что соответствует значениям $m = k$ и $m = 1$, или

$$Q_{1,k} = C_{k-1}^0, \qquad Q_{k,k} = C_{k-1}^{k-1}.$$

Из формул (10) получаем следующее:

При $k = 1$ коэффициент $l_1 = \alpha_0^{(1)}$. Одна цепь с одним множителем, т. е. $m = 1$, и всех таких цепей $C_0^0$.

При $k = 2$ $m = 1, 2$. Коэффициент $l_2$ — это сумма одной цепи с двумя множителями, а именно, $\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}$ , т. е. $Q_{2,2} = C_1^1$, и одной цепи с одним множителем, а именно, $\alpha_0^{(2)}$, т. е. $Q_{1,2} = C_1^0$.

При $k = 3$ $m = 1, 2, 3$. Коэффициент $l_3$ — это сумма одной цепи с тремя множителями, а именно, $\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}$, т. е. $Q_{3,3} = C_2^2$, двух цепей с двумя множителями, т. е. $Q_{2,3} = C_2^1$, и одной цепи с одним множителем, т. е. $Q_{1,3} = C_2^0$.

Доказательство проведем индукцией по $k$. Пусть утверждение леммы верно для $k = n$, т. е. количество цепей порядка $n$, состоящих из $m$, $m = \overline{1, n}$, множителей, равно $Q_{m,n} = C_{n-1}^{m-1}$. Значит, утверждение леммы верно для любого $k$, $1 \le k \le n$.

Покажем, что утверждение леммы верно для $k = n + 1$. Из (9) следует $(l_0 = 1)$

$$l_{n+1} = l_n\alpha_n^{(1)} + l_{n-1}\alpha_{n-1}^{(2)} + \ldots + l_{n-s}\alpha_{n-s}^{(s+1)} + \ldots + l_2\alpha_2^{(n-1)} + l_1\alpha_1^{(n)} + \alpha_0^{(n+1)}.$$

Умножение на $\alpha_{n-s}^{(s+1)}$ каждой цепи порядка $n - s$, $s = \overline{0, n}$, из которых состоит коэффициент $l_{n-s}$, увеличивает на единицу количество множителей в этой цепи и на $s + 1$ ее порядок. Поэтому:

1) коэффициент $l_{n+1}$ содержит одну цепь порядка $n + 1$, состоящую из $m = n + 1$ множителей, а именно, $\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\ldots\alpha_n^{(1)}$, т. е. $Q_{n+1,n+1} = C_n^n = C_{k-1}^{m-1}$;

2) поскольку коэффициенты $l_n$ и $l_{n-1}$ содержат соответственно $Q_{n-1,n} = C_{n-1}^{n-2}$ и $Q_{n-1,n-1} = C_{n-2}^{n-2}$ цепей, состоящих из $n-1$ множителей, количество цепей, содержащихся в коэффициенте $l_{n+1}$ и состоящих из $n$ множителей, равно

$$Q_{n-1,n} + Q_{n-1,n-1} = C_{n-1}^{n-2} + C_{n-2}^{n-2} = n = C_n^{n-1} = Q_{n,n+1};$$

3) так как коэффициенты $l_n, l_{n-1}, l_{n-2}$ содержат соответственно $Q_{n-2,n} = C_{n-1}^{n-3}$, $Q_{n-2,n-1} = C_{n-2}^{n-3}$ и $Q_{n-2,n-2} = C_{n-3}^{n-3}$ цепей, состоящих из $n - 2$ множителей, количество цепей, содержащихся в коэффициенте $l_{n+1}$ и состоящих из $n - 1$ множителей, равно

$$Q_{n-2,n}+Q_{n-2,n-1}+Q_{n-2,n-2}=C_{n-1}^{n-3}+C_{n-2}^{n-3}+C_{n-3}^{n-3}=C_n^{n-2}=Q_{n-1,n+1};$$

4) продолжая этот процесс, получаем, что так как коэффициенты $l_n, l_{n-1}, \ldots, l_{n-s}$, $s = \overline{0, n-1}$, содержат соответственно $Q_{n-s,n}, Q_{n-s,n-1}, \ldots, Q_{n-s,n-s}$ цепей, состоящих из $n-s$ множителей, количество цепей, содержащихся в коэффициенте $l_{n+1}$ и состоящих из $n-s+1$ множителей, согласно формуле (16) равно

$$Q_{n-s,n}+Q_{n-s,n-1}+\ldots+Q_{n-s,n-s}=C_{n-1}^{n-s-1}+C_{n-2}^{n-s-1}+\ldots+C_{n-s-1}^{n-s-1}=C_n^{n-s}=Q_{n-s+1,n+1}.$$

Лемма доказана.

***Замечание 2.*** Формула (17) равносильна следующей:

$$\sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_k=m\\ x_1+2x_2+\ldots+kx_k=k}}\frac{1}{x_1!x_2!\ldots x_k!}=\frac{1}{m!}C_{k-1}^{m-1}.$$

Это известная формула [9, с. 450] (формула 111), [10, с. 182] (формула 5.144), и в лемме 4 приведено новое доказательство этой формулы.

***Пример.*** Пусть $k=6$. Построим все цепи, из которых состоит коэффициент $l_6$ :

$$J_6=\Big(\alpha_0^{(1)},\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},\alpha_3^{(1)},\alpha_4^{(1)},\alpha_5^{(1)};\alpha_0^{(2)},\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},\alpha_3^{(2)},\alpha_4^{(2)};\alpha_0^{(3)},\alpha_1^{(3)},\alpha_2^{(3)},\alpha_3^{(3)};$$

$$\alpha_0^{(4)},\alpha_1^{(4)},\alpha_2^{(4)};\alpha_0^{(5)},\alpha_1^{(5)};\alpha_0^{(6)}\Big).$$

$Q_{1,6}=C_5^0=1$ — цепь $\alpha_0^{(6)}$.

$Q_{2,6}=C_5^1=5$ — цепи порядка 6, состоящие из двух множителей:

$$\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(5)},\qquad \alpha_0^{(5)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(2)}\alpha_2^{(4)},\qquad \alpha_0^{(4)}\alpha_4^{(2)},\qquad \alpha_0^{(3)}\alpha_3^{(3)}.$$

$Q_{3,6}=C_5^2=10$ — цепи порядка 6, состоящие из трех множителей:

$$\alpha_0^{(4)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(4)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(4)},\qquad \alpha_0^{(3)}\alpha_3^{(2)}\alpha_5^{(1)};$$

$$\alpha_0^{(3)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(2)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(3)}\alpha_4^{(2)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(2)}\alpha_3^{(3)},\qquad \alpha_0^{(2)}\alpha_2^{(3)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_4^{(2)}.$$

$Q_{4,6}=C_5^3=10$ — цепи порядка 6, состоящие из четырех множителей:

$$\alpha_0^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(2)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(2)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(2)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(2)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(2)}\alpha_3^{(2)}\alpha_5^{(1)},$$

$$\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(2)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(2)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\alpha_4^{(2)},\qquad \alpha_0^{(3)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)},$$

$$\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(3)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(3)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(3)}.$$

$Q_{5,6}=C_5^4=5$ — цепи порядка 6, состоящие из пяти множителей:

$$\alpha_0^{(2)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(2)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)},$$

$$\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(2)}\alpha_5^{(1)},\qquad \alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(2)}.$$

$Q_{6,6}=C_5^5=1$ — цепи порядка 6, состоящие из шести множителей:

$$\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(1)}\alpha_5^{(1)}.$$

**5. Представление $l_k$ через коэффициенты функций (3).** Рассмотрим сначала простейшие случаи. Пусть $m = k$, тогда $x_1 = k$, $x_2 = \ldots = x_k = 0$. В этом случае, согласно формуле (14), получаем дробь

$$(-1)^k \frac{\alpha_0^{(1)}\alpha_1^{(1)}\ldots\alpha_{k-1}^{(1)}}{\alpha_1^{(0)}\alpha_2^{(0)}\ldots\alpha_k^{(0)}}. \tag{18}$$

Пусть $m = 1$, тогда $x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0$ и получаем дробь

$$\frac{\alpha_0^{(k)}}{\alpha_k^{(0)}} = \frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_1^{(0)}\alpha_2^{(0)}\ldots\alpha_{k-1}^{(0)}}{\alpha_1^{(0)}\alpha_2^{(0)}\ldots\alpha_{k-1}^{(0)}\alpha_k^{(0)}}. \tag{19}$$

Рассмотрим, как образец, случай, когда среди цепей порядка $k$ есть цепи, состоящие из $x_j$ множителей ранга $j$ и $x_i$ множителей ранга $i$, $x_j + x_i = m$; $jx_j + ix_i = k$. Не ограничивая общности, рассмотрим следующую цепь:

$$\alpha_0^{(j)}\alpha_j^{(j)}\ldots\alpha_{(x_j-1)j}^{(j)}\alpha_{jx_j}^{(i)}\alpha_{jx_j+i}^{(i)}\ldots\alpha_{jx_j+(x_i-1)i}^{(i)}. \tag{20}$$

Поскольку $jx_j + (x_i - 1)i = k - i$, элемент $\alpha_{jx_j+(x_i-1)i}^{(i)}$ является концевым для элементов ранга $i$ в наборе $J_k$.

Выполняя всевозможные перестановки элементов в этой цепи, что должно быть согласовано с правилом умножения (12), получаем все множество цепей порядка $k$, состоящих из $x_i$ элементов ранга $i$ и $x_j$ элементов ранга $j$ $\left(\text{их количество равно } \dfrac{m!}{(x_1!x_2!)}\right)$.

В частности, можно получить цепь

$$\alpha_0^{(i)}\alpha_i^{(i)}\ldots\alpha_{(x_i-1)i}^{(i)}\alpha_{ix_i}^{(j)}\alpha_{ix_i+j}^{(j)}\ldots\alpha_{ix_i+(x_j-1)j}^{(j)}.$$

Так как $ix_i + (x_j - 1)j = k - j$, элемент $\alpha_{ix_i+(x_j-1)j}^{(j)}$ является концевым для элементов ранга $j$ в наборе $J_k$.

Если воспользоваться формулой (14) и учесть все цепи, полученные из цепи (20) перестановкой ее элементов, то коэффициент $l_k$ из уравнения (6) содержит $\dfrac{m!}{(x_1!x_2!)}$ дробей вида

$$(-1)^m \frac{\alpha_0^{(j)}\alpha_j^{(j)}\ldots\alpha_{(x_j-1)j}^{(j)}\alpha_{jx_j}^{(i)}\alpha_{jx_j+i}^{(i)}\ldots\alpha_{jx_j+(x_i-1)i}^{(i)}}{\alpha_j^{(0)}\alpha_{2j}^{(0)}\ldots\alpha_{jx_j}^{(0)}\alpha_{jx_j+i}^{(0)}\alpha_{jx_j+2i}^{(0)}\ldots\alpha_{jx_j+ix_i}^{(0)}} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m \frac{\alpha_0^{(i)}\alpha_i^{(i)}\ldots\alpha_{(x_i-1)i}^{(i)}\alpha_{ix_i}^{(j)}\alpha_{ix_i+j}^{(j)}\ldots\alpha_{ix_i+(x_j-1)j}^{(j)}}{\alpha_i^{(0)}\alpha_{2i}^{(0)}\ldots\alpha_{ix_i}^{(0)}\alpha_{ix_i+j}^{(0)}\alpha_{ix_i+2j}^{(0)}\ldots\alpha_{ix_i+jx_j}^{(0)}}. \tag{21}$$

Приведем теперь каждую дробь из этой суммы к общему знаменателю $\alpha_1^{(0)}\alpha_2^{(0)}\ldots\alpha_k^{(0)}$. Это равносильно тому, что числитель и знаменатель каждой дроби из (21) домножится на недостающие до общего знаменателя элементы нулевого ранга. Для приведенных в явном виде дробей из (21) числитель имеет следующую структуру:

$$\alpha_0^{(j)}\alpha_1^{(0)}\ldots\alpha_{j-1}^{(0)}\alpha_j^{(j)}\alpha_{j+1}^{(0)}\ldots\alpha_{2j-1}^{(0)}\alpha_{2j}^{(j)}\alpha_{2j+1}^{(0)}\ldots\alpha_{(x_j-1)j}^{(j)}\alpha_{(x_j-1)j+1}^{(0)}\ldots$$

$$\ldots \alpha_{jx_j-1}^{(0)} \alpha_{jx_j}^{(i)} \ldots \alpha_{k-i+1}^{(0)} \ldots \alpha_{k-1}^{(0)},$$

$$\alpha_0^{(i)} \alpha_1^{(0)} \ldots \alpha_{i-1}^{(0)} \alpha_i^{(i)} \alpha_{i+1}^{(0)} \ldots \alpha_{2i-1}^{(0)} \alpha_{2i}^{(i)} \alpha_{2j+1}^{(0)} \ldots \alpha_{(x_i-1)i}^{(i)} \alpha_{(x_i-1)i+1}^{(0)} \ldots$$

$$\ldots \alpha_{ix_i-1}^{(0)} \alpha_{ix_i}^{(i)} \ldots \alpha_{k-j}^{(i)} \ldots \alpha_{k-j+1}^{(0)} \ldots \alpha_{k-1}^{(0)}.$$

Таким образом, в числителе получаем произведение $k$ элементов ранга $i, j$ и $0$ таких, что нижние индексы этих элементов не повторяются и образуют возрастающую последовательность $0, 1, \ldots, k-1$; при этом число элементов ранга $0$ в числителе равно $k-m$. Аналогичная ситуация имеет место для любой дроби из (21), приведенной к общему знаменателю $\alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \ldots \alpha_k^{(0)}$.

Технически теперь несложно перенести все приведенные выше рассуждения на цепи, состоящие из $x_1$ элементов ранга один, $x_2$ элементов ранга два и т. д., $x_k$ элементов ранга $k$, $x_1 + \ldots + x_k = m$, $x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k$, $x_i \geq 0$. В результате все дроби, из которых состоит коэффициент $l_k$ из уравнения (6), будут приведены к общему знаменателю, а числитель каждой дроби будет состоять из произведения $k$ элементов с рангами из последовательности $0, 1, \ldots, k$ и таких, что нижние индексы этих элементов образуют возрастающую последовательность $0, 1, \ldots, k-1$; при этом число элементов нулевого ранга равно $k-m$.

Подставляя теперь в эти цепи вместо элементов $\alpha_s^{(j)}$ их соответствующие выражения из (7) и перемножая их, получаем сумму слагаемых, явный вид каждого из которых можно легко получить. Структура этой суммы такова:

$$(\rho_1 - 1)\rho_1^2 \ldots (\rho_1 + k - 2)^2 (\rho_1 + k - 1) a_{11}^{x_1} a_{12}^{x_2} \ldots a_{1k}^{x_k} a_{10}^{k-m} +$$

$$+\rho_1(\rho + 1) \ldots (\rho_1 + k - 1) a_{21}^{x_1} a_{22}^{x_2} \ldots a_{2k}^{x_k} a_{20}^{k-m} + a_{31}^{x_1} a_{32}^{x_2} \ldots a_{3k}^{x_k} a_{30}^{k-m} + (\ldots), \qquad (22)$$

где в первые три слагаемые входят числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}$; $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}$; $a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3k}$ с наибольшими показателями; круглые скобки $(\ldots)$ — это сумма оставшихся слагаемых, каждое из которых содержит степени этих же чисел, но с меньшими показателями, и сумма которых равна $k$.

Учитывая равенство (8), упрощаем общий знаменатель:

$$\alpha_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} \ldots \alpha_k^{(0)} = k! \alpha_{10}^k (\rho_1 - \rho_2 + 1) \ldots (\rho_1 - \rho_2 + k) = k! \alpha_{10}^k \frac{\Gamma(\rho_1 - \rho_2 + k + 1)}{\Gamma(\rho_1 - \rho_2)}, \qquad (23)$$

где $\Gamma$ — гамма-функция.

Таким образом, учитывая (22) и (23), получаем

$$l_k = \frac{\Gamma(\rho_1 - \rho_2)}{k! a_{10}^k \Gamma(\rho_1 - \rho_2 + k + 1)} \left\{ \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \sum \frac{m!}{x_1! \ldots x_k!} \times \right.$$

$$\times \Big[ (\rho_1 - 1)\rho_1^2 \ldots (\rho_1 + k - 2)^2 (\rho_1 + k - 1) a_{11}^{x_1} a_{12}^{x_2} \ldots a_{1k}^{x_k} a_{10}^{k-m} +$$

$$\left. +\rho_1(\rho + 1) \ldots (\rho_1 + k - 1) a_{21}^{x_1} a_{22}^{x_2} \ldots a_{2k}^{x_k} a_{20}^{k-m} + a_{31}^{x_1} a_{32}^{x_2} \ldots a_{3k}^{x_k} a_{30}^{k-m} + (\ldots) \Big] \right\}, \qquad (24)$$

где суммирование ведется по всем $x_i \geq 0$ таким, что $x_1+\ldots+x_k = m$, $x_1+2x_2+\ldots+kx_k = k$; количество слагаемых в фигурных скобках определяется леммами 3 и 4; в квадратных скобках записано выражение (22).

**6. Классификация цепей.** Для приведения ряда (4) к более наглядному виду проведем классификацию цепей, из которых состоит коэффициент $l_k$, $k = 1, 2, \ldots$, из (9).

Базовой цепью назовем такую цепь, у которой два последних элемента имеют разные ранги, а все предыдущие элементы цепи могут иметь любой ненулевой ранг, т. е. это такая цепь, которая оканчивается произведением $\ldots\alpha_i^{(j)}\alpha_{i+j}^{(j_1)}$, $j \neq j_1$, элемент $\alpha_{i+j}^{(j_1)}$ — это концевой элемент ранга $j_1$ из набора $J_k$, $i+j+j_1 = k$. Тогда небазовая цепь — это такая цепь, у которой, по крайней мере, два последних элемента имеют одинаковые ранги.

С базовой цепью $\ldots\alpha_i^{(j)}\alpha_{i+j}^{(j_1)}$, $j \neq j_1$, свяжем расширенный класс цепей, а именно:

$$\ldots\alpha_i^{(j)}\alpha_{i+j}^{(j_1)};\ldots\alpha_i^{(j)}\alpha_{i+j}^{(j_1)}\alpha_{i+j+j_1}^{(j_1)};\ldots;\ldots\alpha_i^{(j)}\alpha_{i+j}^{(j_1)}\alpha_{i+j+j_1}^{(j_1)}\alpha_{i+j+2j_1}^{(j_1)};\ldots. \tag{25}$$

С начальным элементом $\alpha_0^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, свяжем расширенный класс цепей

$$\alpha_0^{(j)}, \alpha_0^{(j)}\alpha_j^{(j)}, \alpha_0^{(j)}\alpha_j^{(j)}\alpha_{2j}^{(j)}, \ldots, \alpha_0^{(j)}\alpha_j^{(j)}\alpha_{2j}^{(j)}\ldots\alpha_{sj}^{(j)}\ldots. \tag{26}$$

Поскольку среди цепей порядка $k$, $k = 1, 2, \ldots$, сумма которых определяет коэффициент $l_k$ из (9), нет одинаковых, множество этих цепей разобьем на две группы: к одной отнесем все базовые цепи, а к другой — все оставшиеся небазовые цепи.

Пусть $\alpha_i^{(j)}$ — некоторый концевой элемент ранга $j$ в наборе элементов $J_k$, $i+j = k$. Множество базовых цепей, которые оканчиваются этим элементом, назовем пучком базовых цепей, порожденных элементом $\alpha_i^{(j)}$. Количество таких пучков совпадает с количеством концевых элементов в наборе $J_k$. Согласно (25), каждая базовая цепь, оканчивающаяся на $\alpha_i^{(j)}$, порождает расширенный класс цепей. Таким образом, концевой элемент $\alpha_i^{(j)}$ порождает как пучок базовых цепей порядка $k$, так и пучок расширенных классов цепей, среди которых нет одинаковых расширенных классов цепей.

Пусть теперь цепь порядка $k$ с концевым элементом $\alpha_i^{(j)}$, $i+j = k$, является небазовой. Тогда отбрасываем от ее конца элементы одного и того же ранга $j$ до тех пор, пока отбрасываемый элемент впервые „встретится" с элементом другого ранга или „превратится" в начальный элемент цепи. Сохраняя эту пару разноранговых элементов, получаем уже базовую цепь порядка $q < k$. Эта базовая цепь порождает расширенный класс цепей, которому принадлежит рассматриваемая небазовая цепь порядка $k$. Если же в результате операции отбрасывания приходим к начальному элементу $\alpha_0^{(j)}$, то этот элемент порождает расширенный класс цепей (26), которому принадлежит данная небазовая цепь.

Таким образом, каждая цепь порядка $k$, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежит одному и только одному расширенному классу цепей.

Изучим подробнее цепи, из которых состоит сумма $l_m\alpha_m^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$. Это цепи порядка $m+s$, и пусть $m < s$. Тогда каждая цепь порядка $m+s$, входящая в сумму $l_m\alpha_m^{(s)}$, является базовой. Действительно, каждая цепь порядка $m$, сумма которых определяет $l_m$, оканчивается одним из концевых элементов $\alpha_{m-1}^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(m-1)}, \alpha_0^{(m)}$, и так как $m < s$, любая цепь из суммы $l_m\alpha_m^{(s)}$ оканчивается одной из пар $\alpha_{m-i}^{(i)}\alpha_m^{(s)}$, $i = \overline{1, m}$, $m < s$, что определяет базовость цепи.

Следовательно, все базовые цепи порядка $k = m + s$, $m < s$, из которых состоит сумма $l_m \alpha_m^{(s)}$, образуют пучок базовых цепей, порожденный элементом $\alpha_m^{(s)}$. Назовем его пучком основных базовых цепей. Пучок основных базовых цепей, порожденный элементом $\alpha_0^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, состоит из одной цепи, а именно, $\alpha_0^{(k)}$.

Перечислим все пучки основных базовых цепей:

$$
\begin{gathered}
l_0 \alpha_0^{(1)}; \\
l_0 \alpha_0^{(2)}, \qquad l_1 \alpha_1^{(2)}; \\
l_0 \alpha_0^{(3)}, \qquad l_1 \alpha_1^{(3)}, \qquad l_2 \alpha_2^{(3)}; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_0 \alpha_0^{(k)}, \qquad l_1 \alpha_1^{(k)}, \qquad l_2 \alpha_2^{(k)}, \qquad \ldots, \qquad l_{k-1} \alpha_{k-1}^{(k)}; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
\tag{27}
$$

Этим пучкам основных базовых цепей соответствуют пучки расширенных классов цепей

$$
\begin{gathered}
l_q \alpha_q^{(k)}, \qquad l_q \alpha_q^{(k)} \alpha_{q+k}^{(k)}, \qquad l_q \alpha_q^{(k)} \alpha_{q+k}^{(k)} \alpha_{q+2k}^{(k)}, \ldots, \\
q = \overline{0, k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad l_0 = 1, \quad l_1 = \alpha_0^{(1)}.
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Пусть $m \geq s$. Тогда среди концевых элементов $\alpha_{m-1}^{(1)}, \alpha_{m-2}^{(2)}, \ldots, \alpha_0^{(m)}$ всегда есть элемент ранга $s$. Поэтому среди цепей, составляющих сумму $l_m \alpha_m^{(s)}$, есть небазовые, а именно, те, которые оканчиваются произведением $\alpha_{m-s}^{(s)} \alpha_m^{(s)}$, а все остальные цепи из суммы $l_m \alpha_m^{(s)}$ — базовые.

Обозначим через $l_{m,s}$, $s = 1, 2, \ldots, m > s$, сумму всех цепей порядка $k = m + s$, которые в качестве концевого элемента не содержат элемент $\alpha_{m-s}^{(s)}$. Тогда $l_{m,s} \alpha_m^{(s)}$ — пучок базовых цепей порядка $k = m + s$, порожденный элементом $\alpha_m^{(s)}$. Этому пучку соответствует пучок расширенных классов цепей

$$
l_{k-s,s} \alpha_{k-s}^{(s)}, \quad l_{k-s,s} \alpha_{k-s}^{(s)} \alpha_k^{(s)}, \quad l_{k-s,s} \alpha_{k-s}^{(s)} \alpha_k^{(s)} \alpha_{k+s}^{(s)}, \ldots. \tag{29}
$$

Поскольку $m > s$, то $k \geq 2s$, и, следовательно, $s = \overline{1, \left[\dfrac{k}{2}\right]}$.

**7. Преобразование ряда (4).** В силу абсолютной сходимости в кольце $0 < |t| < R$ степенного ряда из формулы (4) члены этого ряда можно произвольно перегруппировать, что не изменит область абсолютной сходимости нового степенного ряда. Напомним, что коэффициент $l_k$ из формулы (4) состоит из суммы цепей порядка $k$, и этот порядок совпадает с показателем степени $t$. Так как каждая цепь порядка $k \geq 1$ принадлежит одному и только одному расширенному классу цепей, это означает, что каждое слагаемое, принадлежащее $l_k$, можно отнести к одному и только одному расширенному классу цепей. В свою очередь это означает, что все члены ряда из формулы (4) перегруппируются относительно только расширенных классов цепей, и теперь достаточно только записать те степенные ряды, которые определяются множеством всех расширенных классов цепей.

Положим $l_0 = 1$ и учтем дробь (14). Расширенный класс цепей, порожденный начальным элементом $\alpha_0^{(k)}$ (см. (28) при $q = 0$), определяет функцию

$$F(t) = -\frac{\alpha_0^{(k)}}{\alpha_k^{(0)}}t^k + \frac{\alpha_0^{(k)}\alpha_k^{(k)}}{\alpha_k^{(0)}\alpha_{2k}^{(0)}}t^{2k} + \ldots + (-1)^r \frac{\alpha_0^{(k)}\ldots\alpha_{(r-1)k}^{(k)}}{\alpha_k^{(0)}\ldots\alpha_{rk}^{(0)}}t^{rk} + \ldots. \tag{30}$$

Введем функции

$$F_{k+q/k}(t) = -\frac{\alpha_q^{(k)}}{\alpha_{q+k}^{(0)}}t^k + \frac{\alpha_q^{(k)}\alpha_{q+k}^{(k)}}{\alpha_{q+k}^{(0)}\alpha_{q+2k}^{(0)}}t^{2k} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \frac{\alpha_q^{(k)}\ldots\alpha_{q+(r-1)k}^{(k)}}{\alpha_{q+k}^{(0)}\ldots\alpha_{q+rk}^{(0)}}t^{rk} + \ldots, \qquad q = \overline{0, k-1}. \tag{31}$$

При $q = 0$ функции (31) совпадают с функциями (30), смысл индекса $q/k$ будет пояснен ниже.

Следовательно, пучки расширенных классов цепей (28), порожденные элементами $\alpha_q^k$, определяют функции

$$l_q t^q F_{k+q/k}(t), \qquad k = \overline{1, n} \qquad q = \overline{0, k-1}. \tag{32}$$

Пучок расширенных классов цепей (29) определяет функции

$$l_{k-s,s}\left[-\frac{\alpha_{k-s}^{(s)}}{\alpha_k^{(0)}}t^k + \ldots + (-1)^{r+1}\frac{\alpha_{k-s}^{(s)}\alpha_k^{(s)}\ldots\alpha_{k+(r-1)s}^{(s)}}{\alpha_k^{(0)}\alpha_{k+s}^{(0)}\ldots\alpha_{k+rs}^{(0)}}t^{k+rs} + \ldots\right], \qquad s = \overline{1, [k/2]}. \tag{33}$$

Введем функции

$$F_{k+q/k}^{(n)}(t) = -\frac{\alpha_q^{(k)}}{\alpha_{q+k}^{(0)}}t^k + \ldots + (-1)^n \frac{\alpha_q^{(k)}\ldots\alpha_{q+(n-1)k}^{(k)}}{\alpha_{q+k}^{(0)}\ldots\alpha_{q+nk}^{(0)}}t^{nk}. \tag{34}$$

Преобразуем квадратную скобку в (33). Положим $k = s(j+1) + p$, $p = \overline{0, s-1}$, $j = [k/s] - 1$. Тогда

$$[\ldots] =$$

$$= t^p\left\{-\frac{\alpha_{p+sj}^{(s)}}{\alpha_{p+s(j+1)}^{(0)}}t^{s(j+1)} + \ldots + (-1)^{r+1}\frac{\alpha_{p+sj}^{(s)}\alpha_{p+s(j+1)}^{(s)}\ldots\alpha_{p+s(j+r)}^{(s)}}{\alpha_{p+s(j+1)}^{(0)}\alpha_{p+s(j+2)}^{(0)}\ldots\alpha_{p+s(j+r+1)}^{(0)}}t^{s(j+r+1)} + \ldots\right\} =$$

$$= (-1)^{j-1}\frac{\alpha_{p+s}^{(0)}\ldots\alpha_{p+sj}^{(0)}}{\alpha_p^{(s)}\ldots\alpha_{p+s(j-1)}^{(s)}}t^p\left\{(-1)^j\frac{\alpha_p^{(s)}\ldots\alpha_{p+s(j-1)}^{(s)}\alpha_{p+sj}^{(s)}}{\alpha_{p+s}^{(0)}\ldots\alpha_{p+sj}^{(0)}\alpha_{p+s(j+1)}^{(0)}}t^{s(j+1)} + \ldots\right\} =$$

$$= t^p R(j,p,s)\left[F_{s+p/s}(t) - F_{s+p/s}^{(j)}(t)\right],$$

где

$$R(j,p,s)=(-1)^{j-1}\,\frac{\alpha_{p+s}^{(0)}\dots\alpha_{p+sj}^{(0)}}{\alpha_p^{(s)}\dots\alpha_{p+s(j-1)}^{(s)}}. \tag{35}$$

Тогда формула (33) примет вид

$$l_{k-s,s}t^pR\left(j,p,s\right)\left[F_{s+p/s}\left(t\right)-F_{s+p/s}^{(j)}\left(t\right)\right],\quad s=\overline{1,\left[\frac{k}{2}\right]},\quad p=\overline{0,s-1},\quad j=\left[\frac{k}{s}\right]-1. \tag{36}$$

Объединяя формулы (31), (35), (36), получаем решение уравнения (2):

$$u\left(t\right)=t^\rho\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{q=0}^{k-1}t^ql_qF_{k+q/k}\left(t\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=1}^{[k/2]}l_{k-s,s}\sum_{p=0}^{s-1}R\left(j,p,s\right)\left(F_{s+p/s}\left(t\right)-F_{s+p/s}^{(j)}\left(t\right)\right)\right]\right\}, \tag{37}$$

где $j=[k/s]-1$.

**8. Представление решения $u\left(t\right)$ через гипергеометрические функции и подобные им.** Запишем функции $F_{k+q/k}(t)$ в ином виде, воспользовавшись разложением на множители чисел $\alpha_m^{(k)}$ из (7).

Пусть $\alpha_m^{(k)}=a_{1k}\left(m+\nu_1^{(k)}\right)\left(m+\nu_2^{(k)}\right)$, $k=1,2,\dots$, а $\alpha_m^{(0)}=a_{10}m(\sigma+m)$, где $\sigma=$ $=a_{20}/a_{10}+2\rho-1$ (см. (8)). Тогда общий член ряда $F_k(t)$ из (30) преобразуется следующим образом:

$$\frac{(-1)^r\,\alpha_0^{(k)}\alpha_k^{(k)}\dots\alpha_{(r-1)k}^{(k)}}{\alpha_k^{(0)}\alpha_{2rk}^{(0)}\dots\alpha_{rk}^{(0)}}t^{rk}=\frac{(-1)^r\left(\frac{\nu_1^{(k)}}{k}\right)_r\left(\frac{\nu_2^{(k)}}{k}\right)_r}{(1)_r\left(\sigma/k+1\right)_r}\frac{a_{1k}^r}{a_{10}^r}t^{rk},$$

где $\left(a\right)_r=a\left(a+1\right)\dots\left(a+r-1\right),\,(1)_r=r!$.

Следовательно, $F_k\left(t\right)=F\left(\nu_1^{(k)}\big/k,\nu_2^{(k)}\big/k;\sigma/k+1;-a_{1k}/a_{10}t^k\right)-1$, где $F$ — гипергеометрическая функция.

Переобозначим стандартную гипергеометрическую функцию:

$$F\left(a_1,a_2;b_1;t\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_m}{\left(1\right)_m\left(b_1\right)_m}t^m\equiv F\left(a_1,a_2;1,b_1;t\right).$$

Введем функцию

$$F_{q/k}\left(a_1,\ a_2;\ 1,\ b_1;\ t\right)=F\left(a_1+q/k,\ a_2+q/k;\ 1+q/k,\ b_1+q/k;\ t\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(a_1+q/k\right)_m\left(a_2+q/k\right)_m}{\left(1+q/k\right)_m\left(b_1+q/k\right)_m}t^m$$

и назовем ее гипергеометрической функцией дробного порядка $q/k$. Тогда для $q=\overline{1,k-1}$

$$F_{k+q/k}(t) = F_{q/k}\left(\nu_1^{(k)}\big/_k, \nu_2^{(k)}\big/_k; 1, \sigma/k+1; -{}^{a_{1k}}\!/_{a_{10}} t^k\right) - 1 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(q+\nu_1^{(k)}\right)\ldots\left[q+\nu_1^{(k)}+(m-1)\,k\right]\left(q+\nu_2^{(k)}\right)\ldots\left[q+\nu_2^{(k)}+(m-1)\,k\right]a_{1k}^m}{(q+k)\ldots(q+mk)\,(\sigma+q+k)\ldots(\sigma+q+mk)\,a_{10}^m} t^{mk}.$$

**9. Замечание.** Отметим теперь изменения, которые произойдут в приведенных выше рассуждениях, если в окрестности фуксовой нулевой точки рассмотреть уравнение (1) при условии, что функция $P_n(t) = a_{n0} + a_{n1}t + \ldots, a_{n0} \neq 0$ является аналитической функцией в окрестности нуля.

Если решение уравнения (1) находить в виде ряда (4), то относительно его коэффициентов получим такое же линейное разностное уравнение (6), но при этом

$$\alpha_s^{(j)} = a_{0j} + (\rho+s)a_{1j} + (\rho+s)(\rho+s-1)a_{2j} + \ldots + (\rho+s)\ldots(\rho+s-n+1)a_{nj}, \quad j, s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Уравнение $\alpha_0^{(0)} = 0$ определяет $n$ значений параметра $\rho$.

Структура формул (30), (31), (35) и (36) не изменится, но вместо гипергеометрических функций в п. 9 появятся обобщенные гипергеометрические функции, а получение аналогов формул (22) – (24) обусловлено лишь техническими трудностями.

1. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ОНТИ, 1939. – 719 с.
2. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.
3. *Круглов В. Е.* Решение уравнения типа Пуанкаре – Перрона второго порядка и сводящихся к нему дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 900 – 917.
4. *Круглов В. Е.* Построение фундаментальной системы решений линейного разностного уравнения конечного порядка // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 6. – С. 777 – 794.
5. *Kruglov V. E.* Solution of the linear differential equation of $n$-th order with four singular points // Ann. Univ. sci. budapest. – 2010. – **32**. – P. 23 – 35.
6. *Круглов В. Е.* Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами и фуксовой нулевой точкой // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 1. – С. 21 – 28.
7. *Славянов С. Ю., Лай В.* Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. – СПб.: Невский диалект, 2002. – 312 с.
8. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.
9. *Kaucky J.* Kombinatorike identity. – Bratislava: Veda, 1975. – 475 p.
10. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 285 с.

Получено 30.05.11,
после доработки — 02.07.12