УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Д. А. Левченко (Днепропетр. нац. ун-т)

РАВНОРАСПРЕДЕЛЕННАЯ РЕЛЬЕФНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We determine the exact values of the uniformly distributed ridge approximation of some classes of harmonic functions of two variables.

Знайдено точні значення рівнорозподіленої рельєфної апроксимації деяких класів гармонічних функцій двох змінних.

1. Обозначения, определения, постановки задач. Если X — вещественное линейное нормированное пространство и H — линейное подпространство X, то наилучшим приближением элемента $x \in X$ подпространством H называется величина

$$E(x,H)_X = \inf_{u \in H} \|x-u\|_X.$$

Наилучшим приближением множества $\mathfrak{M} \subset X$ подпространством H называется величина

$$E(\mathfrak{M},H)_X = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E(x,H)_X.$$

В данной работе в качестве X будем рассматривать следующие пространства. Пусть G — единичная окружность $\mathbb{T}$, реализованная как отрезок $[0,2\pi]$ с отождествленными концами, или единичный круг $\mathbb{B}^2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, т. е.

$$\mathbb{B}^2 = \left\{ x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \le 1 \right\}.$$

Через $L_p(G),\ 1 \le p \le \infty$, будем обозначать пространство измеримых и суммируемых в p-й степени (существенно ограниченных при $p=\infty$) функций $f\colon G \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in G} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

а через $C(G)$ — пространство непрерывных функций $f\colon G \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(G)} := \max_{x \in G} |f(x)|.$$

В качестве аппроксимирующих множеств в пространствах $L_p(\mathbb{T})$ и $C(\mathbb{T})$ будем рассматривать подпространства $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Для пространств $L_p(\mathbb{B}^2)$ и $C(\mathbb{B}^2)$ в качестве аппроксимирующих подпространств будем рассматривать подпространства $\mathcal{P}_n^2$ алгебраических полиномов вида

$$P(x) = \sum_{0 \le k+l \le n} a_{kl} x_1^k x_2^l,$$

а также множество W_n^{eq} рельефных функций с n равнораспределенными направлениями, т. е. множество функций вида

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} W_j(x \cdot \theta_j),$$

где $W_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции одной действительной переменной (волновые профили), $x \cdot \theta_j = x_1 \cos \dfrac{\pi j}{n} + x_2 \sin \dfrac{\pi j}{n}$.

Пусть еще $\mathcal{P}_n^1$ — множество алгебраических полиномов степени n одной переменной.

Отметим, что вопросы наилучшей рельефной аппроксимации (аппроксимации линейными комбинациями плоских волн) различных классов функций $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}$ активно изучаются в течение последних десятилетий, в частности в связи с приложениями в компьютерной томографии (см., например, работы [1, 2]). Отметим, что в работе [1] установлено, что для гармонических в круге $\mathbb{B}^2$ функций f имеют место неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{3}} E(f, \mathcal{P}_{n+1}^2)_{L_2(\mathbb{B}^2)} \le E(f, W_n^{eq})_{L_2(\mathbb{B}^2)} \le E(f, \mathcal{P}_n^2)_{L_2(\mathbb{B}^2)}.$$

Работы, в которых были бы получены точные результаты по наилучшей рельефной аппроксимации классов функций, заданных на $\mathbb{B}^2$, нам неизвестны. Целью данной работы является вычисление точных значений величин $E(\mathfrak{M}, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)}$ $\Big($и, попутно, величин $E(\mathfrak{M}, \mathcal{P}_n^2)_{C(\mathbb{B}^2)}\Big)$ для некоторых классов функций, заданных на $\mathbb{B}^2$ и гармонических во внутренности $\mathbb{B}^2$.

Определим классы функций. Как обычно, через $W_\infty^r = W_\infty^r(\mathbb{T})$, $r = 1, 2, \ldots$, обозначим класс 2π-периодических функций f, имеющих локально абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и таких, что $\|f^{(r)}\|_\infty \le 1$, а через $W^r H^\omega$, $r = 0, 1, \ldots$, — класс 2π-периодических функций $f \in C^r$, модуль непрерывности r-й производной которых $\omega(f^{(r)}, t)$ мажорируется заданным выпуклым вверх модулем непрерывности. Если F есть W_∞^r или $W^r H^\omega$, то через $F^H = F^H(\mathbb{B}^2)$ обозначим множество всевозможных решений f^H задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\partial \mathbb{B}^2} = g, \tag{2}$$

где заданные на $\partial\mathbb{B}^2$ функции $g(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \partial\mathbb{B}^2$, таковы, что функции $f(\varphi) = g(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, принадлежат классу F. Именно для таких классов функций мы и найдем в данной работе точные значения величин $E(F^H, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)}$ и $E(F^H, \mathcal{P}_n^2)_{C(\mathbb{B}^2)}$.

2. Некоторые предварительные сведения. Нам понадобятся следующие известные результаты по аппроксимации классов W_∞^r и $W^r H^\omega$ тригонометрическими полиномами в равномерной метрике.

Поскольку классы $W^r H^\omega$ обобщают классы W_∞^r ($W_\infty^{r+1} = W^r H^\omega$ при $\omega(t) = t$), мы приведем формулировку только для классов $W^r H^\omega$. Для $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ через $f_{\omega,n,r}(t)$ обозначим r-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, от нечетной

$2\pi/n$-периодической функции $f_{\omega,n}(t)$, которая на отрезке $[0;\pi/n]$ определяется следующим образом:

$$f_{\omega,n}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\omega(2t), & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2n}\right],\\[2mm] \dfrac{1}{2}\omega\left(2\dfrac{\pi}{n}-2t\right), & t\in\left[\dfrac{\pi}{2n},\dfrac{\pi}{n}\right].\end{cases}$$

В случае $\omega(t)=t$ функция $f_{\omega,n,r}(t-\pi/2r)$ превращается в эйлеров идеальный сплайн $\varphi_{n,r+1}(t)$, который другим способом может быть определен как $(r+1)$-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде от функции $\varphi_{n,0}(t)=\operatorname{sign}\sin nt$. Для дальнейшего изложения нам необходима следующая теорема.

Теорема A. *Для любого* $n\in\mathbb{N}$

$$E(W^rH^\omega,\mathcal{T}_{2n-1})_{C(\mathbb{T})}=\|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})}.$$

При $r\in\mathbb{Z}_+$ и $\omega(t)=t$ в этой теореме содержится результат Ж. Фавара – Н. И. Ахиезера – М. Г. Крейна [3 – 5] (см. также [6], теорема 5.3.1). В случае произвольного выпуклого вверх модуля непрерывности теорема A доказана Н. П. Корнейчуком в работах [7, 8] (см. также [6], теорема 7.6.1).

Важным средством для получения оценок сверху рельефной аппроксимации является следующее утверждение, справедливое для любого $n\in\mathbb{N}$: каждый многочлен $P\in\mathcal{P}^2_{n-1}$ может быть представлен как линейная комбинация плосковолновых многочленов

$$P(x)=\sum_{j=1}^{n}P_j(x\cdot\theta_j),\ \ P_j\in\mathcal{P}^1_{n-1},$$

с n равномерно распределенными направлениями θ_j, и, таким образом,

$$\mathcal{P}^2_{n-1}\subset W^{eq}_n.$$

Данный факт является достаточно очевидным и может быть проверен непосредственно. В силу этого включения для любой функции $f\in C(\mathbb{B}^2)$

$$E(f,W^{eq}_n)_{C(\mathbb{B}^2)}\le E(f,\mathcal{P}^2_{n-1})_{C(\mathbb{B}^2)}. \tag{3}$$

Вторым существенным фактом, который будет использован для получения оценок сверху, является то, что если функция $g(x_1,x_2)$ в правой части (2) такова, что функция $g(\cos\varphi,\sin\varphi)$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше $n-1$, то (см., например, [9, с. 157]) решение задачи (1), (2) является гармоническим во внутренности $\mathbb{B}^2$ алгебраическим многочленом из $\mathcal{P}^2_{n-1}$.

Для получения оценок снизу величин $E(f,W^{eq}_n)_{C(\mathbb{B}^2)}$ будем использовать теорему двойственности для наилучшего приближения элемента линейного нормированного пространства X линейным многообразием G (см. [6], теорема 2.3.3).

Теорема B.

$$E(x,G)_X=\sup\{f(x):\ f\in X^*,\|f\|\le 1, f\perp G\}.$$

3. Нахождение точных значений величин $E(F^H, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)}$ и $E(F^H, \mathcal{P}_n^2)_{C(\mathbb{B}^2)}$. Докажем следующую теорему.

Теорема C. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности и $F = W^r H^\omega$. Тогда*

$$E(F^H, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} = E(F^H, \mathcal{P}_n^2)_{C(\mathbb{B}^2)} = \|(f_{\omega,n,r})^H\|_{C(\mathbb{B}^2)} = \|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть функция $f^H \in F^H(\mathbb{B}^2)$ является решением задачи (1), (2) с функцией $f(\cdot) = g(\cos(\cdot), \sin(\cdot)) \in F$ в правой части (2). Пусть $T_n \in \mathcal{T}_{2n-1}$ — полином наилучшего приближения для f в равномерной метрике и $(T_n)^H$ — решение задачи (1), (2) с полиномом T_n в правой части (2). Как уже отмечалось, $(T_n)^H$ — гармонический полином из $\mathcal{P}_{n-1}^2$.

В силу принципа максимума для гармонических функций

$$\|f^H - (T_n)^H\|_{C(\mathbb{B}^2)} = \|f - T_n\|_{C(\mathbb{T})},$$

откуда с учетом соотношения (3) и теоремы A имеем

$$E(f^H, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \le E(f^H, \mathcal{P}_n^2)_{C(\mathbb{B}^2)} \le \|f^H - (T_n)^H\|_{C(\mathbb{B}^2)} = \|f - T_n\|_{C(\mathbb{T})} \le \|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})},$$

так что

$$E(F^H, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \le E(F^H, \mathcal{P}_n^2)_{C(\mathbb{B}^2)} \le \|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})}. \tag{5}$$

Теперь покажем, что

$$E(F^H, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \ge \|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Применяя теорему B, получаем соотношения

$$E(F^H, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} = \sup_{f^H \in F^H} E(f, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} =$$

$$= \sup_{f^H \in F^H} \sup \left\{ \Phi(f^H): \ \Phi \in (C(\mathbb{B}^2))^*, \|\Phi\| \le 1, \Phi \perp W_n^{eq} \right\} \ge \sup_{f^H \in F^H} \Phi_0(f^H), \tag{6}$$

где функционал Φ_0 определяется следующим образом:

$$\Phi_0(f^H) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f^H(\cos\varphi_k, \sin\varphi_k), \ \varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Для обоснования неравенства в (6) покажем, что $\Phi_0 \perp W_n^{eq}$. Действительно, $\Phi_0 \perp W_n^{eq}$, если для любой рельефной функции $R(x) \in W_n^{eq}$ будет $\Phi_0(R) = 0$. Пусть

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} W_j(x \cdot \theta_j).$$

В силу линейности функционала Φ_0 достаточно показать, что для любого $j = \overline{1, n}$

$$\Phi_0(W_j) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k W_j((\cos\varphi_k, \sin\varphi_k)\cdot\theta_j) = 0.$$

Поскольку

$$(\cos\varphi_k, \sin\varphi_k)\cdot\theta_j = \cos\left(\frac{2k-2j+1}{2n}\pi\right),$$

то

$$\Phi_0(W_j) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k W_j\left(\cos\left(\frac{2k-2j+1}{2n}\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^j}{2n}\sum_{k=1-j}^{2n-j}(-1)^k W_j\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^j}{2n}\left[\sum_{k=1-j}^{0}(-1)^k W_j\left(\cos\left(\frac{2k+1+4n}{2n}\pi\right)\right) + \sum_{k=1}^{2n-j}(-1)^k W_j\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^j}{2n}\left[\sum_{k=2n-j+1}^{2n}(-1)^k W_j\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right) + \sum_{k=1}^{2n-j}(-1)^k W_j\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^j}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k W_j\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right).$$

Слагаемые в последней сумме, соответствующие $k = m$ и $k = 2n-1-m$, $m = \overline{1, n-1}$, а также слагаемые при $k = 2n$ и $k = 2n-1$ равны по модулю и имеют противоположные знаки. Поэтому

$$\Phi_0(W_j) = 0$$

и ортогональность $\Phi_0 \perp W_n^{eq}$ доказана.

Тот факт, что $\|\Phi_0\| \le 1$, очевиден. Таким образом, неравенство в (6) выполняется.

Обозначим через $(f^*_{\omega,n,r})^H$ решение задачи (1), (2) с функцией

$$g(\cos\varphi, \sin\varphi) = f^*_{\omega,n,r}(\varphi) = (-1)^{r(r+1)/2} f_{\omega,n,r}\left(\varphi - \frac{1-(-1)^r}{2}\frac{\pi}{2n}\right)$$

в правой части (2). Так как $(f^*_{\omega,n,r})^H(\cos\varphi_k, \sin\varphi_k) = f^*_{\omega,n,r}(\varphi_k) = (-1)^k \|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})}$, то

$$\Phi_0\left((f^*_{\omega,n,r})^H\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k (f^*_{\omega,n,r})^H(\cos\varphi_k, \sin\varphi_k) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f^*_{\omega,n,r}(\varphi_k) =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})} = \|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Отсюда с учетом (6) следует, что

$$E(F^H, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \geq \|f_{\omega,n,r}\|_{C(\mathbb{T})},$$

что вместе с соотношением (5) дает (4).

Теорема доказана.

1. *Осколков К. И.* Линейные и нелинейные методы рельефной аппроксимации (Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. – М.: АФЦ, 1999. – С. 165 – 195.
2. *Davison M. E., Grunbaum F. A.* Tomographic reconstruction with arbitrary directions // Communs Pure and Appl. Math. – 1981. – **34**. – P. 77 – 120.
3. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. – 1937. – **15**. – С. 107 – 112.
4. *Favard J.* Sur l'apprximation des fonctions periodicues par des polynomes trigonometriques // C. r. Acad. sci. (Paris). – 1936. – **203**. – P. 1122 – 1124.
5. *Favard J.* Sur les meilleurs procedes d'apprximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonometriques // Bull. sci. math. – 1937. – **61**. – P. 243 – 256.
6. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи в теории приближения. – М.: Наука, 1976 . – 320 с.
7. *Корнейчук Н. П.* Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых периодических функций в метриках C и L // Докл. АН СССР. – 1970. – **190**. – С. 269 – 271.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**. – С. 93 – 124.
9. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974.

Получено 25.05.11,
после доработки — 05.09.12