УДК 517.956.222

Т. Н. Зинченко, А. А. Мурач* (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПО ДУГЛИСУ – НИРЕНБЕРГУ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ХЕРМАНДЕРА

We investigate Douglis – Nirenberg uniformly elliptic systems in $\mathbb{R}^n$ on the class of Hörmander Hilbert spaces H^φ, where φ is an RO-varying function of scalar argument. An a priori estimate for solutions is proved, and their interior regularity is studied. A sufficient condition for these systems to have the Fredholm property is given.

Досліджено рівномірно еліптичні в $\mathbb{R}^n$ за Дуглісом – Ніренбергом системи у класі гільбертових просторів Хермандера H^φ, де φ — RO-змінна функція скалярного аргументу. Встановлено апріорну оцінку розв'язків і досліджено їх внутрішню регулярність. Отримано достатню умову нетеровості цих систем.

1. Введение. Общие эллиптические системы дифференциальных уравнений смешанного порядка были введены А. Дуглисом и Л. Ниренбергом [1]. Содержательные примеры таких систем встречаются в гидродинамике и теории упругости. Эллиптические по Дуглису – Ниренбергу системы появляются также при сведении скалярных эллиптических уравнений к системам уравнений первого порядка и при сведении эллиптических краевых задач на край многообразия [2 – 4].

Эллиптические уравнения и системы имеют ряд характерных свойств в шкалах пространств Гельдера – Зигмунда и Соболева: априорные оценки решений, повышение гладкости решений, нетеровость эллиптических операторов. Указанные свойства имеют важные приложения в теории эллиптических краевых задач, в теории индекса эллиптических операторов, в спектральной теории дифференциальных операторов и ряд других (см. обзоры [2, 3] и приведенную там библиографию).

В этой связи представляет интерес исследование эллиптических уравнений и систем в различных классах функциональных пространств, характеризующих свойства регулярности функций/распределений более тонко, чем классические шкалы Гельдера – Зигмунда и Соболева. Для этого естественно использовать пространства, в которых показателем гладкости является не числовой, а функциональный параметр. Широкие классы таких пространств были введены и систематически исследованы Л. Хермандером [5] (п. 2.2) и применены к изучению локальной регулярности решений линейных дифференциальных уравнений, а также их систем (последние — в случае постоянных коэффициентов) [5, 6]. В настоящее время пространства Хермандера и их различные аналоги, называемые пространствами обобщенной гладкости, активно исследуются как сами по себе, так и с точки зрения приложений [7 – 11].

Для приложений, особенно в спектральной теории, наиболее важным является случай гильбертовых пространств. Среди них особый интерес представляют пространства, интерполяционные относительно гильбертовой соболевской шкалы. Поскольку при интерполяции наследуется ограниченность линейных операторов, а также их нетеровость (при неизменном дефекте), классы этих пространств являются удобным инструментом для изучения свойств эллиптических уравнений и систем.

*Частично поддержан грантом № 01/01.12 НАН Украины (в рамках совместного украинско-российского проекта НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований).

В настоящей статье исследуются равномерно эллиптические в $\mathbb{R}^n$ по Дуглису – Ниренбергу системы в классе гильбертовых пространств Хермандера

$$H^{\varphi} := B_{2,\varphi(\langle\cdot\rangle)} = \bigl\{w - \text{распределение}\colon \varphi(\langle\xi\rangle)(\mathcal{F}w)(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)\bigr\}, \qquad (*)$$

где φ — произвольная RO-меняющаяся функция скалярного аргумента. Выбор этого класса обусловлен тем, что он совпадает (с точностью до эквивалентности норм) с классом всех гильбертовых пространств, интерполяционных относительно гильбертовой соболевской шкалы [11] (п. 2.4.2), [12]. В статье установлены теоремы об априорных оценках и о регулярности решений эллиптических систем в пространствах $(*)$, а также (при дополнительных предположениях) теорема о нетеровости матричного эллиптического оператора. Отдельный случай систем, равномерно эллиптических по Петровскому, рассмотрен ранее в [13].

Отметим, что для более узкого класса пространств Хермандера (уточненная соболевская шкала) эллиптические уравнения и эллиптические краевые задачи исследованы в статьях [14 – 20] и монографии [11].

2. Постановка задачи. Пусть $n,\ p \geq 2$ — целые числа. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k}(x,D)u_k(x) = f_j(x), \qquad j = 1,\ldots,p, \qquad (1)$$

где

$$A_{j,k}(x,D) := \sum_{|\mu|\leq r_{j,k}} a_{\mu}^{j,k}(x)D^{\mu}, \qquad j,k = 1,\ldots,p.$$

Здесь и далее $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$ — мультииндекс с неотрицательными целыми компонентами, $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D_j := i\partial/\partial x_j$, $D^{\mu}(= D^{\mu}_x) := D_1^{\mu_1}\ldots D_n^{\mu_n}$, где i — мнимая единица, а $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ переводит дифференциальный оператор D^{μ} в оператор умножения на функцию $\xi^{\mu} := \xi_1^{\mu_1}\ldots\xi_n^{\mu_n}$ аргумента $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, двойственного к x.

Предполагается, что в системе (1) все коэффициенты $a_{\mu}^{j,k}(x)$ — комплекснозначные функции, бесконечно дифференцируемые и ограниченные вместе со всеми частными производными в $\mathbb{R}^n$. Класс таких функций обозначаем через C_b^{∞}.

Решение системы (1) понимается в смысле теории распределений. Запишем ее в матричной форме $Au = f$. Здесь $A := (A_{j,k}(x,D))_{j,k=1}^{p}$ — матричный дифференциальный оператор, а $u = \operatorname{col}(u_1,\ldots,u_p)$, $f = \operatorname{col}(f_1,\ldots,f_p)$ — функциональные столбцы.

Предполагается, что система (1) равномерно эллиптическая в $\mathbb{R}^n$ по Дуглису – Ниренбергу [2] (п. 3.2.b), т. е. существуют наборы целых чисел $l_1,\ldots,l_p$ и $m_1,\ldots,m_p$ такие, что:

i) $r_{j,k} \leq l_j + m_k$ для всех $j,k = 1,\ldots,p$;

ii) найдется число $c > 0$, при котором

$$\Bigl|\det\bigl(A^{(0)}_{j,k}(x,\xi)\bigr)_{j,k=1}^{p}\Bigr| \geq c \qquad \text{для любых} \qquad x,\xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| = 1.$$

Здесь

$$A_{j,k}^{(0)}(x,\xi) := \sum_{|\mu|=l_j+m_k} a_\mu^{j,k}(x)\xi^\mu$$

— главный символ дифференциального оператора $A_{j,k}(x,D)$ в случае $r_{j,k} = l_j + m_k$, либо $A_{j,k}^{(0)}(x,\xi) \equiv 0$ в случае $r_{j,k} < l_j + m_k$.

В отдельном случае, когда все числа $l_j = 0$, система (1) называется равномерно эллиптической по Петровскому. Если, кроме того, все числа m_k равны, то она является равномерно эллиптической в обычном смысле.

Введем функциональные пространства, в которых исследуется система (1).

Пусть RO — множество всех измеримых по Борелю функций $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$, для которых существуют числа $a > 1$ и $c \geq 1$ такие, что

$$c^{-1} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c \qquad \text{для любых} \quad t \geq 1, \quad \lambda \in [1,a]$$

(постоянные a и c зависят от $\varphi \in \mathrm{RO}$). Такие функции называют RO- (или OR)-меняющимися на бесконечности. Класс RO-меняющихся функций введен В. Г. Авакумовичем в 1936 г. и достаточно полно изучен (см. [21] (приложение 1), [22] (пп. 2.0 – 2.2)).

Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Обозначим через H^φ линейное пространство всех распределений $w \in \in \mathcal{S}'$ таких, что их преобразование Фурье $\widehat{w} := \mathcal{F}w$ локально суммируемо по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2\big(\langle\xi\rangle\big)\big|\widehat{w}(\xi)\big|^2 d\xi < \infty.$$

Здесь, как обычно, $\mathcal{S}'$ — линейное топологическое пространство Шварца медленно растущих комплекснозначных распределений, заданных в $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. С точки зрения приложений к дифференциальным уравнениям нам удобно трактовать распределения как антилинейные функционалы на пространстве $\mathcal{S}$ основных функций.

В пространстве H^φ определено скалярное произведение распределений w_1, w_2 по формуле

$$(w_1,w_2)_\varphi := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi.$$

Оно задает на H^φ структуру гильбертова пространства и определяет норму $\|w\|_\varphi := (w,w)_\varphi^{1/2}$. Это пространство сепарабельно; в нем плотно множество C_0^∞ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, у которых носитель компактен.

Пространство H^φ — гильбертов изотропный случай пространств $B_{p,k}$, введенных и систематически исследованных Л. Хермандером [5] (п. 2.2) (см. также [6] (п. 10.1)). Именно, $H^\varphi = B_{p,k}$, если $p = 2$ и $k(\xi) = \varphi\big(\langle\xi\rangle\big)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что при $p = 2$ пространства Хермандера совпадают с пространствами, введенными и изученными Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [23] (§ 2).

Если $\varphi(t) = t^s$ для всех $t \geq 1$ при некотором $s \in \mathbb{R}$, то $H^\varphi =: H^{(s)}$ — (гильбертово) пространство Соболева порядка s.

Отметим, что пространства H^φ и $H^{1/\varphi}$ взаимно двойственны относительно расширения по непрерывности полуторалинейной формы

$$(w_1, w_2)_{\mathbb{R}^n} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_1(x)\overline{w_2(x)}\,dx$$

(очевидно, $\varphi \in \mathrm{RO} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathrm{RO}$). Это расширение обозначаем также через $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$, а для вектор-функций u и f полагаем $(u,f)_{\mathbb{R}^n} := (u_1, f_1)_{\mathbb{R}^n} + \ldots + (u_p, f_p)_{\mathbb{R}^n}$, если слагаемые определены.

Обозначим $\varrho(t) := t$ при $t \geq 1$. Матричный дифференциальный оператор A является ограниченным оператором (см. ниже п. 4)

$$A\colon \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}} \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}} \qquad \text{для каждого} \quad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{2}$$

Здесь $\varphi\rho^{m_k}, \varphi\rho^{-l_j} \in \mathrm{RO}$ и поэтому определены пространства Хермандера, фигурирующие в (2).

В работе исследуются свойства оператора (2).

3. Основные результаты. Сформулируем основные результаты статьи; их доказательство будет дано в п. 5.

Теорема 1. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ и число $\sigma > 0$. Тогда существует число $c = c(\varphi, \sigma) > 0$ такое, что для произвольных вектор-функций*

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}, \qquad f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}, \tag{3}$$

удовлетворяющих уравнению $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$, справедлива априорная оценка

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k}}\right)^{1/2} \leq c\left(\sum_{j=1}^{p} \|f_j\|^2_{\varphi\rho^{-l_j}}\right)^{1/2} + c\left(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Пусть V — произвольное открытое непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Исследуем внутреннюю регулярность решения эллиптической системы $Au = f$ на V в классе пространств Хермандера.

Обозначим

$$H^{-\infty} := \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^{(s)} = \bigcup_{\varphi\in\mathrm{RO}} H^\varphi, \qquad H^{\infty} := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^{(s)} = \bigcap_{\varphi\in\mathrm{RO}} H^\varphi.$$

Эти определения корректны, как будет показано в п. 4. В пространствах $H^{-\infty}$ и H^∞ вводятся топологии соответственно индуктивного и проективного пределов. Отметим, что $H^\infty \subset C_b^\infty$ в силу теоремы вложения Соболева. Положим

$$H^\varphi_{\mathrm{int}}(V) := \big\{w \in H^{-\infty} :\ \chi\, w \in H^\varphi$$

$$\text{для всех} \quad \chi \in C_b^\infty \quad \text{таких, что} \quad \mathrm{supp}\chi \subset V, \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\chi, \partial V) > 0\big\}, \tag{5}$$

где $\varphi \in \mathrm{RO}$. Топология в пространстве $H^\varphi_{\mathrm{int}}(V)$ задается полунормами $w \to \|\chi w\|_\varphi$, в которых функции χ те же, что и в (5). Если $V = \mathbb{R}^n$, то $H^\varphi_{\mathrm{int}}(V) = H^\varphi$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{RO}$. *Предположим, что вектор-функция* $u \in (H^{-\infty})^p$ *является решением уравнения* $Au = f$ *на открытом множестве* $V \subseteq \mathbb{R}^n$, *где* $f_j \in H^{\varphi\rho^{-l_j}}_{\mathrm{int}}(V)$ *для всех* $j = 1, \ldots, p$. *Тогда* $u_k \in H^{\varphi\rho^{m_k}}_{\mathrm{int}}(V)$ *для всех* $k = 1, \ldots, p$.

Отметим, что следует различать *внутреннюю* и *локальную* регулярность на открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$. Пространство распределений, имеющих характеризуемую параметром $\varphi \in \mathrm{RO}$ локальную регулярность на этом множестве, определяется следующим образом:

$$H^\varphi_{\mathrm{loc}}(V) := \big\{w \in H^{-\infty} : \chi\, w \in H^\varphi \ \text{ для всех } \ \chi \in C_0^\infty \ \text{ таких, что } \ \mathrm{supp}\,\chi \subset V\big\}.$$

В случае, когда множество V ограничено, пространства $H^\varphi_{\mathrm{int}}(V)$ и $H^\varphi_{\mathrm{loc}}(V)$ совпадают. Если же V не ограничено, то может быть строгое включение $H^\varphi_{\mathrm{int}}(V) \subset H^\varphi_{\mathrm{loc}}(V)$. Для локальной гладкости справедлив аналог теоремы 2; в ее формулировке следует лишь заменить int на loc в обозначениях пространств. Он тривиально вытекает из теоремы 2.

В качестве приложения этой теоремы имеем следующее достаточное условие непрерывности частных производных решения u.

Теорема 3. *Пусть заданы целые числа* $k \in \{1, \ldots, p\}$, $\lambda \geq 0$ *и функция* $\varphi \in \mathrm{RO}$, *удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_1^\infty t^{2\lambda+n-1-2m_k}\varphi^{-2}(t)dt < \infty. \tag{6}$$

Предположим, что вектор-функция $u \in (H^{-\infty})^p$ *является решением уравнения* $Au = f$ *на открытом множестве* $V \subseteq \mathbb{R}^n$, *где* $f_j \in H^{\varphi\rho^{-l_j}}_{\mathrm{int}}(V)$ *для всех* $j = 1, \ldots, p$. *Тогда компонента* u_k *решения имеет на множестве* V *непрерывные частные производные до порядка* λ *включительно, причем эти производные ограничены на каждом множестве* $V_0 \subset V$ *таком, что* $\mathrm{dist}(V_0, \partial V) > 0$. *В частности, если* $V = \mathbb{R}^n$, *то* $u_k \in C_b^\lambda$.

Здесь C_b^λ — банахово пространство всех функций $w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, имеющих непрерывные и ограниченные производные в $\mathbb{R}^n$ порядка $\leq \lambda$.

Отметим, что аналоги теорем 1 – 3 справедливы и для системы $A^+u = f$, формально сопряженной к системе (1), поскольку обе они равномерно эллиптичны в $\mathbb{R}^n$ (по Дуглису – Ниренбергу). Здесь, напомним, $A^+ := \big(A^+_{k,j}(x, D)\big)^p_{j,k=1}$, где

$$A^+_{k,j}(x, D)u_k(x) := \sum_{|\mu| \leq r_{k,j}} D^\mu\big(\overline{a^{k,j}_\mu(x)}u_k(x)\big),$$

так что $(A^+u, v)_{\mathbb{R}^n} = (u, Av)_{\mathbb{R}^n}$ для произвольных вектор-функций $u, v \in (\mathcal{S})^p$.

Системе $A^+u = f$ соответствует ограниченный оператор

$$A^+\colon \bigoplus_{k=1}^p H^{\varphi\rho^{l_k}} \to \bigoplus_{j=1}^p H^{\varphi\rho^{-m_j}} \qquad \text{для каждого} \quad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{7}$$

Он сопряжен к оператору (2), где пишем $1/\varphi$ вместо φ, относительно полуторалинейной формы $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$.

Согласно теореме 2 ядра операторов (2) и (7) совпадают с пространствами

$$N := \big\{u \in (H^\infty)^p \colon Au = 0\big\}, \qquad N^+ := \big\{v \in (H^\infty)^p \colon A^+ v = 0\big\}$$

соответственно и не зависят от φ.

Следующие условия являются достаточными для нетеровости оператора (2) (а также оператора (7)):

а) $D^\alpha a_\mu^{j,k}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для каждого мультииндекса α с $|\alpha| \geq 1$, произвольных индексов $j,k \in \{1,\ldots,p\}$ и мультииндекса μ с $|\mu| \leq r_{j,k}$;

б) существуют числа $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$ такие, что

$$|\det(A_{j,k}(x,\xi))_{j,k=1}^p| \geq c_1 \langle\xi\rangle^q \qquad \text{для любых} \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n, \quad |x| + |\xi| \geq c_2.$$

Здесь $q := l_1 + \ldots + l_p + m_1 + \ldots + m_p$, а

$$A_{j,k}(x,\xi) := \sum_{|\mu| \leq l_j + m_k} a_\mu^{j,k}(x)\xi^\mu$$

— полный символ дифференциального оператора $A_{j,k}(x,D)$.

Напомним, что линейный ограниченный оператор $T\colon E_1 \to E_2$, где E_1 и E_2 — банаховы пространства, называется нетеровым, если его ядро $\ker T$ и коядро $\mathrm{coker} T := E_2/T(X)$ конечномерны. У нетерового оператора T область значений $T(X)$ замкнута в E_2, а индекс $\mathrm{ind}\, T := \dim\ker\ T - \dim\mathrm{coker}\, T$ конечен.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* а) *и* б). *Тогда для каждого* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *оператор* (2) *нетеров. Его область значений совпадает с пространством*

$$\left\{ f \in \bigoplus_{j=1}^p H^{\varphi\rho^{-l_j}} \colon (f,v)_{\mathbb{R}^n} = 0 \ \ \textit{для всех} \ \ v \in N^+ \right\}, \tag{8}$$

а индекс равен $\dim N - \dim N^+$ *и не зависит от* φ.

Отметим, что условие б) влечет за собой условие ii) из определения равномерной эллиптичности по Дуглису – Ниренбергу. В свою очередь, если предположить, что условие а) выполнено, то условие б) следует из нетеровости оператора (2) в соболевском случае $\varphi = \varrho^s$ при хотя бы одном значении $s \in \mathbb{R}$ [24] (теорема 4.2).

Предположим, что выполняются условия а) и б). В случае, когда пространства N и N^+ тривиальны, оператор (2) является гомеоморфизмом в силу теоремы 4 и теоремы Банаха об обратном операторе. В общей ситуации гомеоморфизм удобно задавать с помощью следующих проекторов.

Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Разложим пространства, в которых действует нетеров оператор (2), в прямые суммы (замкнутых) подпространств:

$$\bigoplus_{k=1}^p H^{\varphi\rho^{m_k}} = N \dotplus \left\{ u \in \bigoplus_{k=1}^p H^{\varphi\rho^{m_k}} \colon (u,w)_{\mathbb{R}^n} = 0 \ \ \text{для всех} \ \ w \in N \right\},$$

$$\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}} = N^{+} \dotplus (8).$$

Такие разложения существуют, поскольку в них слагаемые имеют тривиальное пересечение, и конечная размерность первого из них равна коразмерности второго. Последнее следует из того, что в первой сумме фактор-пространство пространства $\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}$ по второму слагаемому является двойственным пространством к подпространству N пространства $\bigoplus_{k=1}^{p} H^{1/(\varphi\rho^{m_k})}$ $\big($двойственность понимается относительно формы $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ $\big)$. Аналогично и для второй суммы.

Обозначим через P и P^{+} соответственно (косые) проекторы пространств

$$\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}} \qquad \text{и} \qquad \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}$$

на вторые слагаемые в указанных суммах параллельно первым слагаемым. Эти проекторы (как отображения) не зависят от φ.

Тогда в силу теоремы 4 сужение оператора (2) на подпространство $P\big(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}\big)$ является гомеоморфизмом

$$A\colon P\left(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}\right) \leftrightarrow P^{+}\left(\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}\right).$$

Аналогичный результат справедлив и для оператора (7). Отметим, что его нетеровость следует из теоремы 4, так как он сопряжен к нетеровому оператору (2) с параметром $1/\varphi$ вместо φ.

4. Вспомогательные результаты. Приведем некоторые результаты, необходимые для доказательства теорем 1 – 4.

Отметим следующие свойства функционального класса RO (см., например, [21], приложение 1, теоремы 1 и 2):

i) $\varphi \in \mathrm{RO}$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_{1}^{t} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} d\tau\right) \qquad \text{при} \quad t \geq 1,$$

где вещественные функции α и β измеримы по Борелю и ограничены на полуоси $[1,\infty)$;

ii) для любой функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ существуют числа $s_0,\, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, и $c_1 \geq 1$ такие, что

$$c_1^{-1}\lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c_1\lambda^{s_1} \qquad \text{при} \quad t \geq 1, \quad \lambda \geq 1. \tag{9}$$

Для функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ определены и конечны нижний и верхний индексы Матушевской [22] (п. 2.1.2):

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\big\{s_0 \in \mathbb{R}\colon \;\; \text{верно левое неравенство в } \; (9)\big\},$$

$$\sigma_1(\varphi) := \inf\big\{s_1 \in \mathbb{R}\colon \;\; \text{верно правое неравенство в } \; (9)\big\}.$$

Из формулы (9) при $t=1$ следуют непрерывные и плотные вложения

$$H^{(s_1)} \hookrightarrow H^{\varphi} \hookrightarrow H^{(s_0)} \qquad \text{для всех чисел} \quad s_1 > \sigma_1(\varphi), \quad s_0 < \sigma_0(\varphi). \tag{10}$$

Отсюда вытекает корректность определения пространств $H^{-\infty}$ и H^{∞}, данного в п. 3.

Пространство H^{φ}, фигурирующее в (10), есть результат интерполяции с подходящим функциональным параметром пары соболевских пространств $H^{(s_0)}$ и $H^{(s_1)}$. Напомним определение этой интерполяции в случае общих гильбертовых пространств и некоторые ее свойства [11] (п. 1.1, 2.4.2). Для наших целей достаточно ограничиться сепарабельными пространствами.

Пусть задана упорядоченная пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельных комплексных гильбертовых пространств X_0 и X_1 такая, что выполняется непрерывное и плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X называем допустимой. Для нее существует изометрический изоморфизм $J\colon X_1 \leftrightarrow X_0$ такой, что J — самосопряженный положительно определенный оператор в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор J определяется парой X однозначно; он называется порождающим для X.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех измеримых по Борелю функций $\psi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, которые отделены от нуля на каждом множестве $[r,\infty)$ и ограничены на каждом отрезке $[a,b]$, где $r>0$ и $0<a<b<\infty$.

Пусть $\psi \in \mathcal{B}$. В пространстве X_0 определен, как функция от J, оператор $\psi(J)$. Обозначим через $[X_0, X_1]_{\psi}$ или, короче, X_{ψ} область определения оператора $\psi(J)$, наделенную скалярным произведением $(w_1, w_2)_{X_{\psi}} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$ и соответствующей нормой $\|w\|_{X_{\psi}} = (w,w)^{1/2}_{X_{\psi}}$. Пространство X_{ψ} гильбертово и сепарабельно, причем выполняется непрерывное и плотное вложение $X_{\psi} \hookrightarrow X_0$.

Функцию $\psi \in \mathcal{B}$ называем интерполяционным параметром, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее. Если при каждом $j \in \{0,1\}$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T\colon X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_{ψ} является ограниченным оператором $T\colon X_{\psi} \to \to Y_{\psi}$. Тогда будем говорить, что пространство X_{ψ} получено интерполяцией с функциональным параметром ψ пары X.

Известно, что функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда она псевдовогнута в окрестности бесконечности, т. е. $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$ для некоторой положительной вогнутой функции $\psi_1(t)$. (Как обычно, $\psi \asymp \psi_1$ обозначает ограниченность обоих отношений ψ/ψ_1 и ψ_1/ψ на указанном множестве.)

В случае, когда допустимая пара состоит из соболевских пространств, нам понадобится следующий факт [11] (п. 2.4.2, теорема 2.19).

Предложение 1. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ и вещественные числа s_0, s_1 такие, что $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Положим*

$$\psi(t) := \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\varphi\big(t^{1/(s_1-s_0)}\big) & \textit{при} \quad t \ge 1, \\ \varphi(1) & \textit{при} \quad 0<t<1. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром и

$$\left[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}\right]_{\psi} = H^{\varphi} \tag{12}$$

с равенством норм.

Отметим также [11] (п. 2.4.2), что используемый нами класс гильбертовых пространств $\{H^{\varphi}\colon \varphi \in \mathrm{RO}\}$ замкнут относительно интерполяции с функциональным параметром. Более того, он совпадает (с точностью до эквивалентности норм) с классом всех гильбертовых пространств, интерполяционных для пар соболевских пространств $[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}]$, где $s_0,\ s_1 \in \mathbb{R}$ и $s_0 < s_1$. Напомним, что свойство (гильбертового) пространства H быть интерполяционным для допустимой пары $X = [X_0, X_1]$ означает следующее: а) выполняются непрерывные вложения $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$, б) любой линейный оператор, ограниченный на каждом из пространств X_0 и X_1, является ограниченным и на X.

При интерполяции пространств наследуется не только ограниченность, но и нетеровость линейных операторов при некоторых дополнительных условиях. Сформулируем этот результат применительно к рассмотренному нами методу интерполяции [11] (п. 1.1.7, теорема 1.7).

Предложение 2. *Пусть $X = [X_0, X_1]$ и $Y = [Y_0, Y_1]$ — допустимые пары гильбертовых пространств. Пусть, кроме того, на X_0 задано линейное отображение T такое, что его сужения на пространства X_j, $j = 0, 1$, являются ограниченными нетеровыми операторами $T\colon X_j \to Y_j$, имеющими общее ядро и одинаковый индекс. Тогда для произвольного интерполяционного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ ограниченный оператор $T\colon X_{\psi} \to Y_{\psi}$ нетеров с теми же ядром и индексом, а его область значений равна $Y_{\psi} \cap T(X_0)$.*

В доказательствах нам придется интерполировать ортогональные суммы гильбертовых пространств. Для этого будет полезен следующий факт [11] (п. 1.1.5, теорема 1.5).

Предложение 3. *Пусть задано конечное число допустимых пар $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$, $k = 1, \ldots, p$, гильбертовых пространств. Тогда для любого $\psi \in \mathcal{B}$ справедливо*

$$\left[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)},\ \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\right]_{\psi} = \bigoplus_{k=1}^{p} \left[X_0^{(k)},\ X_1^{(k)}\right]_{\psi}$$

с равенством норм.

При доказательстве теорем 1 и 2 мы воспользуемся тем важным фактом, что равномерно эллиптический дифференциальный оператор A имеет параметрикс, т. е. матричный псевдодифференциальный оператор (ПДО), обратный к A с точностью до ПДО порядка $-\infty$. Напомним необходимые нам факты, относящиеся к ПДО и параметриксам (см., например, [2] (пп. 1.1, 1.9, 3.2)).

Обозначим через Ψ^r, $r \in \mathbb{R}$, множество всех ПДО G в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно классических) таких, что их символ $g(x, \xi)$ бесконечно дифференцируем в $\mathbb{R}^{2n}$ и удовлетворяет следующему условию: для любых мультииндексов α и β существует число $c_{\alpha,\beta} > 0$, при котором

$$\left|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} g(x, \xi)\right| \leq c_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{r - |\beta|} \qquad \text{для любых} \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Число r называется (формальным) порядком ПДО G. Положим $\Psi^{-\infty} := \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \Psi^r$.

Предложение 4. *Существует матричный ПДО $B = (B_{k,j})_{k,j=1}^{p}$ такой, что все $B_{k,j} \in \in \Psi^{-m_k - l_j}$ и*

$$BA = I + T_1, \qquad AB = I + T_2, \tag{13}$$

где $T_1 = (T_1^{j,k})_{j,k=1}^p$ *и* $T_2 = (T_2^{k,j})_{k,j=1}^p$ *— некоторые матричные ПДО, состоящие из элементов класса* $\Psi^{-\infty}$, *а* I *— тождественный оператор в* S'.

Любой ПДО класса Ψ^r является непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{S}'$. Следующая лемма уточняет этот факт применительно к пространствам Хермандера.

Лемма 1. *Для ПДО* $G \in \Psi^r$ *сужение линейного отображения* $u \to Gu$, $u \in \mathcal{S}'$, *на пространство* H^φ *является ограниченным оператором*

$$G\colon H^\varphi \to H^{\varphi\rho^{-r}} \qquad \text{для любых} \quad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{14}$$

Доказательство. В случае соболевских пространств этот факт известен [2] (п. 1.1, теорема 1.1.2). Отсюда выведем ограниченность оператора (14) с помощью интерполяции с функциональным параметром.

Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Выберем числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$G\colon H^{(s_j)} \to H^{(s_j - r)} \qquad \text{для} \quad j = 0, 1, \tag{15}$$

действующие в пространствах Соболева. Определим ψ по формуле (11); согласно предложению 1 функция ψ — интерполяционный параметр. Поэтому из ограниченности операторов (15) следует, что сужение отображения G на пространство $[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}]_\psi$ является ограниченным оператором

$$G\colon \left[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}\right]_\psi \to \left[H^{(s_0-r)}, H^{(s_1-r)}\right]_\psi. \tag{16}$$

В силу предложения 1 выполняются равенства (12) и

$$\left[H^{(s_0-r)}, H^{(s_1-r)}\right]_\psi = H^{\varphi\rho^{-r}}.$$

Заметим, что второе из них верно, так как $s_0 - r < \sigma_0(\varphi\rho^{-r})$, $s_1 - r > \sigma_1(\varphi\rho^{-r})$, а функциональный параметр ψ удовлетворяет соотношению (11), если в нем заменить s_0 на $s_0 - r$, s_1 на $s_1 - r$ и φ на $\varphi\rho^{-r}$. Следовательно, ограниченность оператора (16) означает ограниченность оператора (14).

Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 оператор (2) ограничен, поскольку каждый дифференциальный оператор $A_{j,k}(x, D)$ принадлежит классу $\Psi^{l_j + m_k}$.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующий изотропный вариант теоремы вложения Хермандера.

Лемма 2. *Пусть заданы целое число* $\lambda \geq 0$ *и функция* $\omega \in \mathrm{RO}$. *Тогда условие*

$$\int\limits_1^\infty t^{2\lambda+n-1}\omega^{-2}(t)dt < \infty \tag{17}$$

равносильно вложению $H^\omega \subset C_b^\lambda$, *и это вложение непрерывно.*

Доказательство. Теорема вложения Хермандера [5] (п. 2.2, теорема 2.2.7) утверждает в гильбертовом случае, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2\lambda} k^{-2}(\xi) d\xi < \infty \;\Leftrightarrow\; B_{2,k} \subset C_b^\lambda.$$

Здесь, напомним, $B_{2,k}$ — пространство Хермандера, параметризуемое весовой функцией $k(\xi)$ от n переменных. Если эта функция радиальна: $k(\xi) = \omega(\langle\xi\rangle)$, то соответствующее ей пространство $B_{2,k} = H^\omega$ изотропно и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2\lambda} \omega^{-2}\big(\langle\xi\rangle\big) d\xi < \infty \;\Leftrightarrow\; H^\omega \subset C_b^\lambda. \tag{18}$$

Покажем, что левое условие в (18) эквивалентно (17).

Переходя к сферическим координатам, где $r := |\xi|$, и затем выполняя замену $t = \sqrt{1+r^2}$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2\lambda} \omega^{-2}\big(\langle\xi\rangle\big) d\xi = c \int\limits_0^\infty \big(1+r^2\big)^\lambda \omega^{-2}(\sqrt{1+r^2}) r^{n-1}\, dr =$$

$$= c \int\limits_1^\infty t^{2\lambda+1}(t^2-1)^{n/2-1}\omega^{-2}(t) dt = A + c\int\limits_2^\infty t^{2\lambda+1}(t^2-1)^{n/2-1}\omega^{-2}(t) dt.$$

Здесь $c := nV_1$, V_1 — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, а

$$A := c \int\limits_1^2 t^{2\lambda+1}\,(t^2-1)^{n/2-1}\omega^{-2}(t) dt < \infty,$$

так как $\omega \asymp 1$ на $[1,2]$ и $n/2 - 1 > -1$. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2\lambda} \omega^{-2}(\langle\xi\rangle)\, d\xi < \infty \;\Leftrightarrow \int\limits_2^\infty t^{2\lambda+1}(t^2-1)^{n/2-1}\omega^{-2}(t)\, dt < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_2^\infty t^{2\lambda+n-1}\omega^{-2}(t) dt < \infty \Leftrightarrow (17).$$

Отсюда в силу (18) делаем вывод, что (17) эквивалентно вложению $H^\omega \subset C_b^\lambda$. Оно непрерывно, поскольку банаховы пространства H^ω и C_b^λ непрерывно вложены в некоторое хаусдорфово пространство, например в $\mathcal{S}'$.

Лемма 2 доказана.

В связи с ней отметим следующее. Если $H^\omega = H^{(s)}$ — пространство Соболева порядка s, т. е. $\omega(t) = t^s$ при $t \geq 1$, то условие (17) равносильно неравенству $s > \lambda + n/2$, и мы приходим к теореме вложения Соболева.

5. Доказательство основных результатов. Докажем теоремы 1 – 4.

***Доказательство теоремы* 1.** Обозначим через $\|\cdot\|'_\varphi$, $\|\cdot\|''_\varphi$ и $\|\cdot\|'_{\varphi,\sigma}$ соответственно нормы в пространствах

$$\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}, \qquad \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}} \qquad \text{и} \qquad \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}.$$

Пусть вектор-функции (3) удовлетворяют уравнению $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$. В силу первого равенства в (13) имеем $u = Bf - T_1u$. Отсюда следует оценка (4):

$$\|u\|'_\varphi = \|Bf - T_1u\|'_\varphi \le \|Bf\|'_\varphi + \|T_1u\|'_\varphi \le c\,\|f\|'_\varphi + c\|u\|'_{\varphi,\sigma}.$$

Здесь c — максимум норм операторов

$$\begin{gathered} B\colon \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}} \to \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}, \\ T_1\colon \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}} \to \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}, \end{gathered} \tag{19}$$

ограниченных в силу предложения 4 и леммы 1.

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Сначала рассмотрим случай, когда $V = \mathbb{R}^n$. По условию $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$, где $f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}$. Воспользовавшись первым равенством в (13), запишем $u = Bf - T_1u$. Здесь $Bf \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}$ в силу (19) и $T_1u \in (H^\infty)^p$ согласно предложению 4. Следовательно, $u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}$, что и требовалось доказать в случае $V = \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь случай, когда $V \ne \mathbb{R}^n$. Произвольно выберем функцию $\chi \in C_b^\infty$ такую, что

$$\operatorname{supp}\chi \subset V \qquad \text{и} \qquad \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V) > 0. \tag{20}$$

Для нее существует функция $\eta \in C_b^\infty$ такая, что

$$\operatorname{supp}\eta \subset V, \qquad \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\eta,\, \partial V) > 0, \quad \eta = 1 \qquad \text{в окрестности} \quad \operatorname{supp}\chi. \tag{21}$$

Действительно, можно определить указанную функцию с помощью операции свертки по формуле $\eta := \chi_{2\varepsilon} * \omega_\varepsilon$, где $\varepsilon := \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V)/4$, $\chi_{2\varepsilon}$ — индикатор 2ε-окрестности множества $\operatorname{supp}\chi$, а функция $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty$ удовлетворяет условиям

$$\omega_\varepsilon \ge 0, \qquad \operatorname{supp}\omega_\varepsilon \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le \varepsilon\}, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Непосредственно проверяется, что такая функция η принадлежит классу C_b^∞ и имеет следующее свойство: $\eta \equiv 1$ в ε-окрестности множества $\operatorname{supp}\chi$ и $\eta \equiv 0$ вне 3ε-окрестности этого же множества, т. е. η удовлетворяет условиям (21).

На основании первого равенства в (13) можем записать

$$\chi u = \chi BAu - \chi T_1u = \chi B\eta Au + \chi B(1-\eta)Au - \chi T_1u. \tag{22}$$

Поскольку $Au = f$ на множестве V, то $\eta Au = \eta f$ в $\mathbb{R}^n$, где $\eta f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}$ по условию теоремы. Следовательно, в силу (19) имеем

$$\chi B\eta Au = \chi B\eta f \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}.$$

Кроме того, поскольку матричные ПДО $\chi B(1-\eta)$, где $1-\eta = 0$ в окрестности $\operatorname{supp}\chi$, и T_1 состоят из элементов класса $\Psi^{-\infty}$, вектор-функции $\chi B(1-\eta)Au$ и $T_1 u$ принадлежат пространству $(H^\infty)^p$. Поэтому в силу (22) получаем, что $\chi u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}$ для любой функции $\chi \in C_b^\infty$, удовлетворяющей условию (20). Иными словами, $u_k \in H_{\mathrm{int}}^{\varphi\rho^{m_k}}(V)$ для всех $k = 1, \ldots, p$.

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Сначала рассмотрим случай, когда $V = \mathbb{R}^n$. В силу теоремы 2 имеем $u_k \in H^{\varphi\rho^{m_k}}$. Отсюда на основании леммы 2, где $\omega := \varphi\rho^{m_k}$, и условия (6) получаем включение $u_k \in C_b^\lambda$, что и требовалось доказать в этом случае.

Предположим теперь, что $V \neq \mathbb{R}^n$. В силу теоремы 2 имеем $u_k \in H_{\mathrm{int}}^{\varphi\rho^{m_k}}(V)$. Пусть функция $\eta \in C_b^\infty$ удовлетворяет следующим условиям: $\operatorname{supp}\eta \subset V$, $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\eta, \partial V) > 0$ и $\eta = 1$ в окрестности множества $V_0 \subset V$ такого, что $\operatorname{dist}(V_0, \partial V) > 0$. Эта функция строится так же, как и в доказательстве теоремы 2, если заменить в нем множество $\operatorname{supp}\chi$ на V_0. На основании леммы 2, где $\omega := \varphi\rho^{m_k}$, и условия (6) имеем $\eta u_k \in H^{\varphi\rho^{m_k}} \subset C_b^\lambda$. Отсюда следует, что все частные производные функции u_k до порядка λ включительно непрерывны и ограничены в некоторой окрестности множества V_0. Тогда эти производные непрерывны и на множестве V, так как можно взять $V_0 := \{x_0\}$ для любой точки $x_0 \in V$.

Теорема 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 4.** В соболевском случае $\varphi = \varrho^s$, где $s \in \mathbb{R}$ выбрано произвольно, эта теорема доказана (см., например, [24] (теорема 4.2)). Докажем ее для любого $\varphi \in \mathrm{RO}$ с помощью интерполяции с функциональным параметром.

Выберем числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Рассмотрим ограниченные нетеровы операторы

$$A: \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_r+m_k)} \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_r-l_j)} \qquad \text{для} \quad r = 0, 1, \tag{23}$$

действующие в пространствах Соболева. Эти операторы имеют общее ядро N, одинаковый индекс, равный $\dim N - \dim N^+$, и области значений

$$A\left(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_r+m_k)}\right) = \left\{ f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_r-l_j)} \colon (f, v)_{\mathbb{R}^n} = 0 \ \text{ для всех } \ v \in N^+ \right\}. \tag{24}$$

Определим интерполяционный параметр ψ по формуле (11). Согласно предложению 2 нетеровость операторов (23) влечет за собой нетеровость ограниченного оператора

$$A\colon \left[\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_0+m_k)}, \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_1+m_k)}\right]_\psi \to \left[\bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_0-l_j)}, \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_1-l_j)}\right]_\psi. \tag{25}$$

Здесь в силу предложений 3 и 1 имеем

$$\left[\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_0+m_k)}, \bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_1+m_k)}\right]_{\psi} = \bigoplus_{k=1}^{p} \left[H^{(s_0+m_k)}, H^{(s_1+m_k)}\right]_{\psi} = \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}, \qquad (26)$$

$$\left[\bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_0-l_j)}, \bigoplus_{j=1}^{p} H^{(s_1-l_j)}\right]_{\psi} = \bigoplus_{j=1}^{p} \left[H^{(s_0-l_j)}, H^{(s_1-l_j)}\right]_{\psi} = \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}. \qquad (27)$$

Уточним, что (26) верно на основании предложения 1, поскольку $s_0 + m_k < \sigma_0(\varphi\rho^{m_k})$, $s_1 + m_k > \sigma_1(\varphi\rho^{m_k})$, а функциональный параметр ψ удовлетворяет соотношению (11), если в нем заменить s_0 на $s_0 + m_k$, s_1 на $s_1 + m_k$ и φ на $\varphi\rho^{m_k}$. Аналогично, (27) верно, так как $s_0 - l_j < \sigma_0(\varphi\rho^{-l_j})$, $s_1 - l_j > \sigma_1(\varphi\rho^{-l_j})$, а ψ удовлетворяет соотношению (11), если в нем заменить s_0 на $s_0 - l_j$, s_1 на $s_1 - l_j$ и φ на $\varphi\rho^{-l_j}$.

Таким образом, (2) — это нетеров оператор (25). В силу предложения 2 индекс оператора (2) равен $\dim N - \dim N^{+}$, а область значений равна

$$\bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}} \bigcap A\left(\bigoplus_{k=1}^{p} H^{(s_0+m_k)}\right)$$

и совпадает с (8) вследствие (24).

Теорема 4 доказана.

1. *Douglis A., Nirenberg L.* Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1955. – **8**, № 4. – P. 503 – 538.
2. *Agranovich M. S.* Elliptic operators on closed manifolds // Encycl. Math. Sci. – Berlin: Springer, 1994. – Vol. 63. – P. 1 – 130.
3. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. – Berlin: Springer, 1997. – Vol. 79. – P. 1 – 144.
4. *Wloka J. T., Rowley B., Lawruk B.* Boundary value problems for elliptic systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. – xiv + 641 p.
5. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.)
6. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. II: Differential operators with constant coefficients.– Berlin: Springer, 1983. – viii + 391 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.)
7. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem.– Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
8. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii + 425 p.
9. *Jacob N.* Pseudodifferential operators and Markov processes. – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. — Vols 1 – 3.
10. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – x + 306 p.
11. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (arXiv:1106.3214)
12. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces for a couple of Sobolev spaces // arXiv:1106.2049. – 14 p.
13. *Murach A. A.* On elliptic systems in Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 3. – P. 467 – 477.
14. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
15. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Regular elliptic boundary-value problem for a homogeneous equation in a two-sided improved scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 11. – P. 1748 – 1767.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.

17. *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
18. *Murach A. A.* Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Methods Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 2. – P. 142 – 158.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic problems and Hörmander spaces // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 447 – 470.
20. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
21. *Seneta E.* Regularly varying functions. – Berlin: Springer, 1976. – 112 p. (Рус. перевод: *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.)
22. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.
23. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
24. *Rabier P. J.* Fredholm and regularity theory of Douglis – Nirenberg elliptic systems on $\mathbf{R}^n$ // Math. Z. – 2012. – **270**, № 1 – 2. – S. 369 – 393.

Получено 21.02.12