УДК 517.444

**О. А. Очаковская** (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# КЛАССЫ ИНЪЕКТИВНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОМПЕЙЮ

New conditions for the injectivity of the Pompeiu transform for integral ball means are obtained. The main results substantially improve some known uniqueness theorems for functions with vanishing integrals over balls of fixed radius.

Отримано нові умови, за яких перетворення Помпейю, що відповідає інтегральним кульовим середнім, є ін'єктивним. Основні результати суттєво підсилюють деякі відомі теореми єдиності для функцій з нульовими інтегралами по кулях фіксованого радіуса.

**1. Введение.** Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Обозначим через $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ класс функций, локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$. Пусть $r > 0$ фиксировано. Преобразование Помпейю $P_r$, соответствующее интегральным шаровым средним, определяется как отображение из $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в $C(\mathbb{R}^n)$, заданное равенством

$$(P_r f)(x) = \int\limits_{|y|\leq r} f(x+y)\,dy, \qquad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Аналогично можно определить преобразование Помпейю для сферических средних и для более общих случаев (см., например, [1] (гл. 4), [2 – 5]). Линейное пространство $W(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ называется классом инъективности для преобразования $P_r$, если пересечение ядра $P_r$ с $W(\mathbb{R}^n)$ содержит только нулевую функцию.

Изучение классов инъективности представляет большой интерес для интегральной геометрии и многих приложений (см. [1] (гл. 4, 5), [3]). Многие авторы исследовали классы инъективности для $P_r$ в терминах условий на скорость убывания на бесконечности для входящих в них функций. Первый точный результат в этом направлении получен Д. Смитом [6], который установил, что множество функций $f \in C(\mathbb{R}^n)$ с условием

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)|x|^{(n-1)/2} = 0 \tag{1}$$

является классом инъективности для $P_r$ при любом $r > 0$. При этом условие (1) нельзя заменить оценкой $f(x) = O\left(|x|^{(1-n)/2}\right)$ при $|x| \to \infty$. Известен также ряд результатов, в которых вместо условия (1) рассматриваются оценки сверху для различных интегральных средних функции $f$. Например, класс $L^p(\mathbb{R}^n)$ является классом инъективности для $P_r$ при $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-1}\right]$, а при $p > \dfrac{2n}{n-1}$ это уже неверно (см., например, [7 – 10]).

Существуют более общие и точные результаты в этом направлении, полученные В. В. Волчковым в [1] (гл. 3), [5] (гл. 2). В этих результатах условие шаровых средних на $\mathbb{R}^n$ заменено уравнением свертки на римановом симметрическом пространстве некомпактного типа.

В работах [11 – 13] изучаются подобные вопросы для функций с нулевыми шаровыми средними, заданных на некоторых неограниченных подмножествах $\mathbb{R}^n$.

Характерной особенностью большинства известных классов инъективности для $P_r$ является их инвариантность относительно группы вращений $\mathbb{R}^n$. Это позволяло использовать при их доказательствах аппарат гармонического анализа на компактных группах (см., например, [1]). Первые нетривиальные примеры классов инъективности, не инвариантных относительно вращения, были получены в [14]. Одним из результатов работы [14] является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ принадлежит $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $P_r f = 0$. Пусть также существует последовательность $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел такая, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\inf_{q\geq m} M_q^{1/q})^{-1} = \infty, \tag{2}$$

*и существует $\gamma > 0$ такое, что неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x_1,\ldots,x_n)|(1+|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|)^q dx_1\ldots dx_{n-1} \leq M_q e^{\gamma|x_n|} \tag{3}$$

*выполнено при всех $q \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$. Тогда $f = 0$.*

Отметим, что оценка (3) вместе с условием (2) требует достаточно быстрого убывания $f$ вдоль переменных $x_1,\ldots,x_{n-1}$. Как показано в [14], условие (2) ослабить нельзя. Неравенство (3) допускает экспоненциальный рост $f$ по переменной $x_n$.

Одним из вопросов, естественно возникающих в связи с теоремой 1, является следующий: для каких функций $\varphi$ на $[0,+\infty)$ теорема 1 остается справедливой, если условие (3) заменить оценкой

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x_1,\ldots,x_n)|(1+|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|)^q dx_1\ldots dx_{n-1} \leq M_q e^{\varphi(|x_n|)} \tag{4}$$

для всех $q \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$? Из результатов работы [15] следует, что теорема будет неверной, если вместо (3) выполнено (4) с функцией $\varphi$, удовлетворяющей условию $\varphi(t) > \varepsilon t^2$ при некотором $\varepsilon > 0$.

В данной работе показано, что теорема 1 останется справедливой, если неравенство (3) заменить на (4) для широкого класса функций $\varphi$, допускающих сколь угодно быстрый рост по некоторой подпоследовательности значений (см. ниже теоремы 2, 3).

**2. Формулировки основных результатов.** Для $T \in \mathbb{R}^1$ положим

$$U(T,r) = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \colon |x_n - T| \leq r\}.$$

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

**Теорема 2.** *Пусть функция $f$ принадлежит $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $P_r f = 0$. Пусть также существует последовательность $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющая* (2), *и при всех $q \in \mathbb{Z}_+$ выполнено неравенство*

$$\int_{U(T,r)} |f(x)|(1+|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|)^q dx \leq M_q e^{\varphi(T)}, \qquad T \in \mathbb{R}^1, \tag{5}$$

*для некоторой положительной функции $\varphi$ на $\mathbb{R}^1$ такой, что*

$$\varliminf_{T\to-\infty}\frac{\varphi(T)}{|T|}<+\infty \qquad \text{и} \qquad \varliminf_{T\to+\infty}\frac{\varphi(T)}{T}<+\infty. \tag{6}$$

*Тогда* $f=0$.

Как уже отмечалось, условие (2) в этой теореме ослабить нельзя даже для функции $\varphi(t)=$ $=c|t|$ (см. [14], теорема 2). Это условие впервые возникло в теории квазианалитических классов функций (см., например, [16] (гл. 1), а также [17], §1.3).

Следующий результат более явно указывает характер убывания $f$ по переменным $x_1,\ldots$ $\ldots,x_{n-1}$, который требуется в теореме 2.

**Теорема 3.** *Пусть функция* $f$ *принадлежит* $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *и* $P_r f=0$. *Пусть также существуют положительная возрастающая функция* $\varkappa$ *на* $[0,+\infty)$ *и постоянная* $C>0$ *такие, что*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\varkappa(t)}=+\infty, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varkappa(t)}{\varkappa\bigl(\frac{t}{\varkappa(t)}\bigr)}=1, \tag{8}$$

*и при всех* $T\in\mathbb{R}^1$

$$\int\limits_{U(T,r)}|f(x)|\exp\Bigl(\frac{|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1|+\ldots+|x_{n-1})}\Bigr)dx_1\ldots dx_{n-1}\le Ce^{\varphi(T)} \tag{9}$$

*для некоторой положительной функции* $\varphi$ *на* $\mathbb{R}^1$, *удовлетворяющей* (6). *Тогда* $f=0$.

Отметим, что теорема 3 будет неверна, если условие (7) заменить условием

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\varkappa(t)}<+\infty$$

(см. [14], теорема 3). Условия (7) и (8) выполняются для многих медленно растущих функций $\varkappa$. Например, они выполняются, если при достаточно больших $t$ функция $\varkappa$ совпадает с произведением логарифма и нескольких его различных итераций.

Вопрос о том, можно ли заменить $U(T,r)$ в теоремах 2 и 3 на $U(T,r')$ при некотором $r'<r$, остается открытым. Однако если в указанных задачах вместо шаровых средних рассматривать сферические средние, то значение $r$ в оценках (5) и (9) уменьшить, вообще говоря, нельзя. Приведем соответствующий пример при $n=3$. Пусть $0<r'<r$ и $g\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — ненулевая функция с периодом $2r$, равная нулю на отрезке $[-r',r']$, для которой

$$\int\limits_{-r}^{r} g(t)\,dt=0. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, заданную равенством $f(x)=g(x_3)$ при $x=(x_1,x_2,x_3)$. Тогда для любого $y\in\mathbb{R}^3$ имеем

$$\int\limits_{|x-y|=r} f(x)\,d\sigma = \int\limits_{y_3-r}^{y_3+r} g(x_3)\,dx_3,$$

где $d\sigma$ — поверхностная мера на сфере $\{x\in\mathbb{R}^3\colon |x-y|=r\}$. Однако в силу $2r$-периодичности из условия (10) следует, что $g$ имеет нулевой интеграл по любому отрезку длины $2r$. Это означает, что интегралы от $f$ по всем сферам радиуса $r$ в $\mathbb{R}^3$ равны нулю. Полагая теперь $T=2rm$, где $m\in\mathbb{Z}$, получаем $f(x)=0$ на $U(T,r')$. Таким образом, условия (5) и (9) с $r'$ вместо $r$ выполнены для некоторых ненулевых функций с нулевыми сферическими средними.

**3. Вспомогательные утверждения.** Мы используем стандартные обозначения $\Gamma$ и $J_\mu$ для гамма-функции и функции Бесселя первого рода порядка $\mu$. Для $z>0$ положим $I_\mu = J_\mu(z)z^{-\mu}$. Известно, что функция $I_\mu$ может быть аналитически продолжена по переменной $z$ на всю комплексную плоскость (см. [18], §1). Пусть $\{\nu_1,\nu_2,\ldots\}$ — возрастающая последовательность всех нулей $J_{n/2}$, лежащих на $(0,+\infty)$. Для $\alpha>0$ положим

$$N_{\alpha,r}=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\colon r^2(\lambda^2+\alpha^2)=\nu_k \quad \text{при некоторых} \quad k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Обозначим через $\hat{f}$ преобразование Фурье функции $f$ (в случае, когда оно существует). Для $\alpha>0$ рассмотрим функцию

$$\psi_\alpha(t)=\begin{cases}(r^2-t^2)^{(n-1)/4}J_{(n-1)/2}\left(\alpha\sqrt{r^2-t^2}\right), & |t|<r,\\ 0, & |t|\ge r.\end{cases}$$

Пусть также

$$\psi_{\alpha,\lambda}(t)=\int\limits_{-r}^{t}\psi_\alpha(\xi)e^{i\lambda(t-\xi)}d\xi, \qquad t\in\mathbb{R}^1, \quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{11}$$

**Лемма 1.** *Имеют место следующие утверждения*:

1) *при $z\in\mathbb{C}$ выполнено равенство*

$$\hat{\psi}_\alpha(z)=\sqrt{2\pi}r^{n-1}\alpha^{(n-1)/2}I_{n/2}\left(r\sqrt{\alpha^2+z^2}\right); \tag{12}$$

2) *если $J_{n/2}(r\alpha)\ne 0$, то все нули функции $\hat{\psi}_\alpha$ простые*;

3) *если $f\in L^1[-r,r]$ и $\int_{-r}^{r} f(x)\psi_{\alpha,\lambda}(t)\,dt=0$ для любого $\lambda\in N_{\alpha,r}$, то $f=0$.*

***Доказательство.*** Из определения преобразования Фурье имеем

$$\hat{\psi}_\alpha(z)=2\int\limits_0^r(r^2-t^2)^{(n-1)/4}J_{(n-1)/2}\left(\alpha\sqrt{r^2-t^2}\right)\cos zt\,dt, \quad z\in\mathbb{C}.$$

С помощью замены переменной $t=r\sin\xi$ последний интеграл сводится к интегралу Сонина (см. [18], формула (20.10), и [14], лемма 1), откуда следует первое утверждение.

Далее, из (12) и [18] (формула (6.1)) получаем

$$\hat{\psi}'_\alpha(z)=-\sqrt{2\pi}\alpha^{(n-1)/2}r^{n+1}zI_{n/2}\left(r\sqrt{\alpha^2+z^2}\right). \tag{13}$$

Поскольку функции $J_{n/2}$ и $J_{n/2+1}$ не имеют общих нулей, за исключением точки $z = 0$ (см. [18], § 23), из (13) имеем второе утверждение.

Третье утверждение следует из (12), (11) и [19] (теорема 1).

Таким образом, лемма 1 доказана.

Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ и $\omega_{n-1}$ — площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащей $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ для почти всех по мере Лебега $x_n \in \mathbb{R}^1$, определим функции $f^\natural$ и $f_\natural$ следующим образом:

$$f^\natural(x_1, \ldots, x_n) = f_\natural(\rho, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_{n-2}} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} f(\rho\sigma_n, \ldots, \rho\sigma_{n-1}, x_n)\, d\sigma_{n-2}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2}(f(\rho, x_2) + f(-\rho, x_2)), & n = 2, \end{cases} \tag{14}$$

где $\rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}$ и $d\sigma_{n-2}$ — поверхностная мера на $\mathbb{S}^{n-2}$. Таким образом, $f^\natural$ является радиальной функцией переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (четной, если $n = 2$) при почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$.

Для любого $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f^\natural(x) \exp(i(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1}))\, dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

$$= \tau_n \int\limits_0^\infty \rho^{n-2} f_\natural(\rho, x_n) I_{\frac{n-3}{2}}(|\lambda|\rho)\, d\rho, \tag{15}$$

где

$$\tau_n = 2^{(n-3)/2} \Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big) \omega_{n-2}$$

(см., например, [20], гл. 4, теорема 3.3).

Пусть $\alpha > 0$. Для почти всех $t \in \mathbb{R}^1$ положим

$$f^*(t, \alpha) = \tau_n \int\limits_0^\infty \rho^{n-2} f_\natural(\rho, t) I_{(n-3)/2}(\alpha\rho)\, d\rho. \tag{16}$$

Пусть также

$$\mathcal{F}_\lambda(f)(\alpha) = \int\limits_{-r}^{r} f^*(t, \lambda) \psi_{\alpha,\lambda}(t)\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{17}$$

$$f_h(x) = f(x + 1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h), \quad h \in \mathbb{R}^1. \tag{18}$$

Обозначим через $V_r(\mathbb{R}^n)$ множество функций $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которых $P_r f = 0$.

**Лемма 2.** *Пусть функция $f$ принадлежит $V_r(\mathbb{R}^n)$ и классу $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$ для почти всех $x_n \in \mathbb{R}^1$. Тогда*:

1) *для любых* $h \in \mathbb{R}^1,\ \alpha > 0$

$$\int_{-r}^{r} f^*(t_h, \alpha)\psi_\alpha(t)\, dt = 0; \tag{19}$$

2) *для любых* $h \in \mathbb{R}^1,\ \alpha > 0,\ \lambda \in N_{\alpha,r}$

$$\mathcal{F}_\lambda(f_h)(\alpha) = \mathcal{F}_\lambda(f)e^{-i\lambda h}. \tag{20}$$

***Доказательство.*** Первое утверждение следует из определения $\psi_\alpha$ и [14] (лемма 10). Докажем второе утверждение. Из (**??**) – (18) находим

$$\mathcal{F}_\lambda(f_h)(\alpha) = \int_{-r}^{r} f^*(t+h, \alpha)\psi_{\alpha,\lambda}(t)\, dt = \int_{-r+h}^{r+h} f^*(t, \alpha)\psi_{\alpha,\lambda}(t-h)\, dt = u(h, \alpha, \lambda)e^{-i\lambda h}, \tag{21}$$

где

$$u(h, \alpha, \lambda) = \int_{-r+h}^{r+h} f^*(t, \alpha) \int_{-r}^{t-h} \psi_\alpha(\xi)e^{i\lambda(t-\zeta)} d\zeta dt.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial h} = f^*(r+h, \alpha) \int_{-r}^{r} \psi_\alpha(\xi)e^{i\lambda(r+h-\xi)} d\xi - \int_{-r+h}^{r+h} f^*(t, \alpha)\psi_\alpha(t-h)\, dt\, e^{i\lambda h}.$$

Учитывая, что $\lambda \in N_{\alpha,r}$, отсюда и из (19) получаем $\dfrac{\partial u}{\partial h} = 0$. Тогда $u$ не зависит от $h$ и из (21) имеем

$$\mathcal{F}_\lambda(f_h)(\alpha) = u(0, \alpha, h)e^{-i\lambda h} = \mathcal{F}_\lambda(h)e^{-i\lambda h},$$

что и требовалось доказать.

Далее, пусть $\varphi$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Положим

$$M = \max\left\{ \varliminf_{T \to -\infty} \frac{\varphi(T)}{|T|}, \varliminf_{T \to +\infty} \frac{\varphi(T)}{T} \right\}.$$

**Лемма 3.** *Пусть функция $f$ принадлежит $V_r(\mathbb{R}^n)$ и для всех $T \in \mathbb{R}^1$*

$$\int_{U(T,r)} |f(x)|\, dx \le Ce^{\varphi(T)}, \tag{22}$$

*где постоянная $C > 0$ не зависит от $T$. Пусть также $k \in \mathbb{N}$, $r^2(\lambda^2+\alpha^2) = \nu_k$ и $|\operatorname{Im}\lambda| > M+1$. Тогда $\mathcal{F}_\lambda(f)(\alpha) = 0$.*

***Доказательство.*** Из равенств (16) – (18) для любых $h \in \mathbb{R}^1$ находим

$$\mathcal{F}_\lambda(f_h)(\alpha) = \tau_n \int\limits_0^\infty \rho^{n-2} I_{(n-3)/2}(\alpha\rho) \int\limits_{-r}^{r} f_\natural(\rho, t+h)\psi_{\alpha,\lambda}(t)\, dt d\rho.$$

Повторяя рассуждения из [14] с использованием оценки (22), из последнего равенства находим

$$|\mathcal{F}_\lambda(f_h)(\alpha)| < Ce^{\varphi(h)},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $h$. Учитывая (20), отсюда имеем

$$|\mathcal{F}_\lambda(f)(\alpha)| < Ce^{\varphi(h)} \exp(-h \operatorname{Im} \lambda). \tag{23}$$

Поскольку $|\operatorname{Im} \lambda| > M + 1$, существует последовательность $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ действительных чисел такая, что $\lim_{m\to\infty}(\varphi(h_m) - h_m \operatorname{Im} \lambda) = -\infty$. Полагая в (23) $h = h_m$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем требуемое утверждение.

**4. Доказательства основных результатов.** ***Доказательство теоремы* 2.** Пусть функция $f$ принадлежит $V_r(\mathbb{R}^n)$ и выполнены условия (5), (6). Тогда для любого $q \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_0^\infty \rho^{n-1}(1+\rho)^q |f_\natural(\rho, x_n)|\, d\rho dx_n = \int\limits_{U(0,r)} |f(x)| \left(1 + \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}\right)^q dx \le M_q e^{\varphi(0)}. \tag{24}$$

Для любого $\lambda \in N_{\alpha,r}$ положим

$$\Phi_\lambda(f)(\lambda) = (\mathcal{F}_\lambda(f)(\alpha) + \mathcal{F}_{-\lambda}(f)(\alpha))\alpha^{(1-n)/2}, \tag{25}$$

$$\Psi_\lambda(f)(\lambda) = \lambda(\mathcal{F}_\lambda(f)(\alpha) - \mathcal{F}_{-\lambda}(f)(\alpha))\alpha^{(1-n)/2}. \tag{26}$$

Пусть $b > a > 0$. Тогда для любых $\alpha \in [a, b],\ q \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$\left|\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^q \Phi_\lambda(f)(\alpha)\right| + \left|\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^q \Psi_\lambda(f)(\alpha)\right| \le C_1 e^{C_2 q} M_q,$$

где постоянные $C_1, C_2 > 0$ не зависят от $q$ (см. (24) и [14], лемма 9). Согласно теореме Данжуа – Карлемана, это означает (см. [17], теорема 1.3.8), что функции $\Phi_\lambda(f)(\alpha)$ и $\Psi_\lambda(f)(\alpha)$ принадлежат квазианалитическому классу на $[a, b]$. В силу леммы 3 и произвольности $a, b$ имеем

$$\Phi_\lambda(f)(\alpha) = \Psi_\lambda(f)(\alpha) = 0 \quad \text{при любых } \alpha > 0,\ \lambda \in N_{\alpha,r}.$$

Используя теперь третье утверждение леммы 1, из (25), (26) и (17) получаем, что $f^*(z, \alpha) = 0$ на $[-r, r]$ при любых $\alpha > 0$. Тогда из первого утверждения леммы 2 и теоремы единственности для решения уравнения свертки (см. [1], теорема 3.1.1) следует, что $f^*(t, \alpha) = 0$ уже при почти всех $t \in \mathbb{R}^1,\ \alpha > 0$. Таким образом, $f^\natural = 0$ в $\mathbb{R}^n$ (см. (13) и (14)). Далее, пусть $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)$ принадлежит $\mathbb{R}^n$ и $g(x) = f(x + y)$. Тогда $g$ принадлежит $V_r(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, из (5) и очевидного неравенства

$$1+\sum_{j=1}^{n-1}|x_j-y_j| \leq \left(1+\sum_{j=1}^{n-1}|x_j|\right)\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}|y_j|\right)$$

следует, что $g$ удовлетворяет условию (5) с последовательностью $M_q(1+|y_1|+\ldots+|y_{n-1}|)^q$ вместо $M_q$. Поскольку эта новая последовательность также удовлетворяет (2), как и выше, заключаем, что $g^\natural=0$. Отсюда и из (14) следует, что $f$ имеет нулевые интегралы по всем цилиндрам вида $B_r\times[A,A+H]$, где $B_r=\{x\in\mathbb{R}^{n-1}\colon |x|<R\},\ R>0,\ A\in\mathbb{R}^1,\ H>0.$ В силу произвольности $R,A,H$ получаем, что $f=0$ (см. [21], гл. 2, теорема 2.1).

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Используя оценку (9), для любого $q\in\mathbb{Z}_+$ получаем

$$\int\limits_{U(T,r)}|f(x)|(1+|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|)^q dx \leq$$

$$\leq M_q\int\limits_{U(T,r)}|f(x)|\Big(\frac{|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1|+\ldots+|x_{n-1}|)}\Big)\,dx, \tag{27}$$

где

$$M_q=\sup_{t\geq0}(1+t)^q e^{-\frac{t}{\varkappa(t)}}. \tag{28}$$

Из равенства (28) имеем

$$M_q\leq C_1^q+2^q\sup_{t\geq1}\Big(\exp\Big(q\ln t-\frac{t}{\varkappa(t)}\Big)\Big), \tag{29}$$

где постоянная $C_1>0$ не зависит от $q$. Из (8) и (7) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}\varkappa(\lambda t)/\varkappa(t)=1$$

при любом $\lambda>0$. Отсюда и из [15] (лемма 1) получаем, что существует положительная возрастающая функция $g\in C^1[0,+\infty)$ такая, что

$$tg'(t)=o(g(t))\quad \text{при } t\to+\infty, \tag{30}$$

$$C_2<\frac{\varkappa(t)}{g(t)}<C_3,\quad t\in[0,+\infty), \tag{31}$$

для некоторых $C_2,C_3>0$, не зависящих от $t$. Используя (29)–(31) и повторяя рассуждения из [15] (п. 3), убеждаемся, что существует $C_4>0$ такое, что

$$M_q\leq(C_4(qg(q)))^q\quad \text{при всех } q\geq1. \tag{32}$$

Тогда из условий (7), (31), (32) и монотонности $\varkappa$ следует, что числовая последовательность $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ удовлетворяет (2). Применяя теперь неравенство () и теорему 2, получаем $f=0$, что и требовалось доказать.

1. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Kluwer Acad. Publ., 2003. – 454 p.

2. *Волчков В. В.* О множествах инъективности преобразования Помпейю // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 11. – С. 51 – 66.
3. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on symmetric spaces // Comment. math. helv. – 1980. – **55**. – P. 593 – 621.
4. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem"// Contemp. math. – 2001. – **278**. – P. 69 – 74.
5. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
6. *Smith I. D.* Harmonic analysis of scalar and vector field in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1972. – **72**. – P. 403 – 416.
7. *Sitaram A.* Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ // Ill. J. Math. – 1984. – **28**. – P. 339 – 347.
8. *Thangavely S.* Spherical means and $CR$ functions on the Heisenberg group // J. Anal. Math. – 1994. – **63**. – P. 255 – 286.
9. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 9. – С. 13 – 30.
10. *Shahshahani M., Sitaram A.* The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric space // Contemp. math. – 1987. – **63**. – P. 267 – 277.
11. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве // Докл. РАН. – 2001. – **381**, № 6. – С. 745 – 747.
12. *Очаковская О. А.* Мажоранты функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Докл. РАН. – 2008. – **420**, № 5. – С. 598 – 600.
13. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 3. – С. 493 – 501.
14. *Очаковская О. А.* Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 1. – С. 47 – 66.
15. *Очаковская О. А.* Об инъективности преобразования Помпейю для интегральных шаровых средних // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 3. – С. 361 – 368.
16. *Бадалян Г. В.* Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций. – М.: Наука, 1990. – 208 с.
17. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – М.: Мир, 1986. – Т. 1. – 456 с.
18. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
19. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group // J. D'Anal. Math. – 2008. – **105**. – P. 43 – 123.
20. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 335 с.
21. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. – М.: Мир, 1978. – 200 с.


Получено 13.09.11