УДК 512.61

И. В. Сергиенко, Е. Ф. Галба, В. С. Дейнека
(Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ И ВЗВЕШЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПСЕВДОРЕШЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

For one of definitions of weighted pseudoinversion with singular weights, necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness are obtained. Expansions of weighted pseudoinverse matrices in matrix power series and matrix power products are obtained. Relationship is established between the weighted pseudoinverse matrices and the weighted normal pseudosolutions. Iterative methods for the calculation of both weighted pseudoinverse matrices and weighted normal pseudosolutions are constructed.

Для одного з означень зваженої псевдоінверсії з виродженими вагами одержано необхідні та достатні умови існування і єдиності. Отримано розвинення зважених псевдообернених матриць в матричні степеневі ряди і матричні степеневі добутки. Встановлено зв'язок між зваженими псевдооберненими матрицями та зваженими нормальними псевдорозв'язками. Побудовано ітераційні методи для обчислення зважених псевдообернених матриць і зважених нормальних псевдорозв'язків.

Введение. Определение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами впервые было введено в работе [1]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно полуопределенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A в [1] определяется как матрица $X = A_{BC}^{+}$, удовлетворяющая четырем условиям

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (XAC)^T = XAC. \tag{1}$$

Там же установлено, что система матричных уравнений (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения для рангов матриц:

$$\mathrm{rk}(BA) = \mathrm{rk}(A), \quad \mathrm{rk}(AC) = \mathrm{rk}(A), \tag{2}$$

где $\mathrm{rk}(L)$ — ранг матрицы L.

Как следует из (1), матрица AX симметризуема слева симметризатором B, а матрица XA симметризуема справа симметризатором C. Ряд работ (см. [2] и имеющуюся там библиографию) посвящено взвешенным псевдообратным матрицам с вырожденными весами, определенным условиями (1), (2), в направлении исследования свойств взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, получения и исследования представлений и разложений взвешенных псевдообратных матриц, построения итерационных методов и регуляризованных задач для вычисления приближений к этим взвешенным псевдообратным матрицам и взвешенным нормальным псевдорешениям с вырожденными весами. Так, в работе [3] получено представление взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (1), (2), в терминах коэффициентов характеристического многочлена симметризуемой матрицы, а также ее предельное представление. Различные виды представлений матрицы A_{BC}^{+}, определенной условиями (1), (2), получены в работе [4], а разложения ее в ряды и многочленные предельные представления — в работах [5, 6].

В работе [7] изучалась взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (CXA)^T = CXA, \tag{3}$$

т. е. случай, когда обе матрицы AX и XA симметризуемы слева вырожденными симметризаторами B и C.

В цитируемой работе установлено, что для существования единственного решения системы (3) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\mathrm{rk}(BA) = \mathrm{rk}(A), \qquad AC_{EE}^{+}C = A, \tag{4}$$

где C_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура – Пенроуза [8, 9].

В [7] также установлено существование единственного взвешенного нормального псевдорешения, определенного на основе указанной взвешенной псевдообратной матрицы, и получено разложение этой матрицы в матричные степенные ряды и произведения с положительными показателями степеней.

В настоящей работе будет изучаться взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определенная системой матричных уравнений

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AXB)^T = AXB, \quad (CXA)^T = CXA, \tag{5}$$

т. е. случай, когда матрица AX симметризуема справа симметризатором B, а матрица XA симметризуема слева симметризатором C. Как и выше, предполагается, что B и C — симметричные положительно полуопределенные матрицы. Основное внимание уделено исследованию системы (5) на предмет определения необходимых и достаточных условий, при которых существует единственное решение этой системы матричных уравнений, а также исследованию вопроса существования единственного взвешенного нормального псевдорешения, определяемого на основе взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами.

Отметим, что при $B = C = E$, где E — единичная матрица, системы матричных уравнений (1), (3), (5) будут определять псевдообратную матрицу Мура – Пенроуза [8, 9] к матрице A, которую будем обозначать A_{EE}^{+}.

Работа состоит из пяти пунктов. В первом пункте приведены определения, обозначения, введены векторные и матричные нормы, вспомогательные утверждения и основные известные результаты о существовании и единственности взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. В п. 2 установлены условия, при которых система (5) с вырожденными весами B и C имеет единственное решение, даны представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц. В п. 3 доказано существование единственного взвешенного нормального псевдорешения, определяемого на основе взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами. В п. 4 получены и исследованы разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с положительными показателями степеней. Пункт 5 посвящен построению и исследованию итерационных процессов для вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам и к взвешенным нормальным псевдорешениям с вырожденными весами.

Отметим, что в работе предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств.

1. Определения, обозначения, известные факты и вспомогательные утверждения. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы суть матрицы размера $n \times 1$. Пусть H — симметричная положительно определенная или же положительно полуопределенная матрица. Через $\mathbb{R}^n(H)$ будем обозначать евклидово пространство в случае положительно определенной метрики или же псевдоевклидово в случае неотрицательной метрики, введенной скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^T v$. Норму (полунорму) в $\mathbb{R}^n(H)$ введем соотношением $\|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}$. В случае положительно полуопределенной матрицы H через $\bar{\mathbb{R}}^n(H) \subset \mathbb{R}^n(H)$ и $\bar{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^+) \subset \mathbb{R}^n(H_{EE}^+)$ будем обозначать подпространство векторов u, удовлетворяющих условию

$$HH_{EE}^+ u = H^{1/2} H_{EE}^{+1/2} u = u, \tag{6}$$

где обозначено $H_{EE}^{+1/2} = (H^{1/2})_{EE}^+$.

В дальнейшем для матриц A будем использовать обозначение $A_{EE}^{+p} = (A^p)_{EE}^+$, где p — целое или дробное число.

Поскольку нуль-пространства матриц H, H_{EE}^+, HH_{EE}^+ и $H^{1/2} H_{EE}^{+1/2}$ совпадают [10], полунормы $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_{EE}^+}$ для векторов в $\mathbb{R}^n(H)$, $\mathbb{R}^n(H_{EE}^+)$ становятся нормами в $\bar{\mathbb{R}}^n(H)$, $\bar{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^+)$.

Определим норму прямоугольной матрицы [11]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — симметричная положительно определенная или положительно полуопределенная матрица, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно определенная или положительно полуопределенная матрица, x — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Предполагаем выполнение условий

$$\mathrm{rk}(HA) = \mathrm{rk}(A), \qquad \mathrm{rk}(AV) = \mathrm{rk}(A). \tag{7}$$

Если H и V — положительно определенные матрицы, то условия (7) заведомо выполняются.

Для множества матриц A, удовлетворяющих условиям (7), норму введем соотношением

$$\|A\|_{HV} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\|H^{1/2} AVx\right\|_{E_m}}{\|x\|_{E_n}}, \tag{8}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность.

При таком определении норма матрицы A равна

$$\|A\|_{HV} = \left[\lambda_{\max}(VA^T HAV)\right]^{1/2}, \tag{9}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [11] показано, что функция $\|\cdot\|_{HV}$, определенная формулой (8), при выполнении условий (7) является аддитивной матричной нормой. Если условия (или одно из условий) (7) не выполняются, то формула (8) определяет полунорму матрицы A.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ — симметричные положительно полуопределенные матрицы, причем выполняется одно из условий

$$AMM_{EE}^+ = AM_{EE}^+ M = A, \qquad MM_{EE}^+ B = M_{EE}^+ MB = B, \tag{10}$$

тогда (см. [4, 11]) из определения нормы матриц соотношением (8) следует

$$\| AB \|_{HV} \leq \| A \|_{HM} \| B \|_{M_{EE}^{+2} V}. \tag{11}$$

Теперь определим матричную норму для квадратной матрицы [12]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произвольная квадратная матрица, а $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно полуопределенная матрица, которые удовлетворяют условиям

$$\mathrm{rk}(HA) = \mathrm{rk}(AH) = \mathrm{rk}(A). \tag{12}$$

Норму матрицы A, удовлетворяющей (12), определим соотношением

$$\| A \|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|_H}{\| x \|_H} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\| H^{1/2} A H_{EE}^{+1/2} H^{1/2} x \right\|_E}{\left\| H^{1/2} x \right\|_E}, \tag{13}$$

где x — произвольный вектор из $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$.

При таком определении норма матрицы A равна

$$\| A \|_H = \left[\lambda_{\max} (H_{EE}^{+1/2} A^T H A H_{EE}^{+1/2}) \right]^{1/2}. \tag{14}$$

Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка, причем выполняется одно из условий

$$A H H_{EE}^{+} = A H_{EE}^{+} H = A, \quad H H_{EE}^{+} B = H_{EE}^{+} H B = B, \tag{15}$$

где H — симметричная положительно полуопределенная матрица того же порядка, что и матрицы A и B. Тогда

$$\| AB \|_H \leq \| A \|_H \| B \|_H, \tag{16}$$

т. е. функция $\| \cdot \|_H$, определенная формулой (13), при выполнении условий (12) и одного из условий (15) является мультипликативной матричной нормой. Из (13) следует

$$\| Ax \|_H \leq \| A \|_H \| x \|_H, \quad x \in \overline{\mathbb{R}}^n(H),$$

т. е. введенная соотношением (13) матричная норма согласована в $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$ с векторной нормой.

***Замечание* 1.** Из (9) и (14) следует, что введенная соотношением (13) матричная норма для квадратных матриц, удовлетворяющих условиям (12), является частным случаем матричной нормы, которая введена для прямоугольных матриц формулой (8) и удовлетворяет условиям (7), если в последней положить, что A является квадратной матрицей, $V = H_{EE}^{+1/2}$ и $x \in \overline{\mathbb{R}}^n(H)$. Поэтому для нормы $\| A \|_H$, введенной соотношением (13), можно использовать обозначение $\| A \|_{HH_{EE}^{+1/2}}$.

***Замечание* 2.** Если в формулах (10), (11) и (15), (16) матрицы H, V, M и H положительно определенные, то в этих формулах следует заменить псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза обратными матрицами. Тогда условия (10), (15) заведомо выполняются. В определении нормы формулой (13) естественно положить $x \in \mathbb{R}^n(H)$. В этом случае, очевидно, формула (16) имеет место без дополнительных условий.

Теперь приведем известные результаты о существовании и единственности взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Пусть

$$Ax = f, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^m \tag{17}$$

— система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с произвольной матрицей $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

В работе [12] установлена связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенными условиями (1), (2), и взвешенными нормальными псевдорешениями, а именно, показано, что вектор $x^+ = A_{BC}^+ f$, где матрица A_{BC}^+ определена условиями (1), (2), является в $\bar{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+)$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (17) с положительно полуопределенными весами B и C_{EE}^+, т. е. единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \bar{\mathbb{R}}^n(C_{EE}^+) \cap \Omega} \| x \|_{C_{EE}^+}, \qquad \Omega = \operatorname*{Arg\,min}_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_B .$$

В работе [7] установлена связь между взвешенными псевдообратными матрицами, определенными условиями (3), (4), и взвешенными нормальными псевдорешениями, а именно, показано, что вектор $x^+ = A_{BC}^+ f$, где матрица A_{BC}^+ определена условиями (3), (4), является в $\bar{\mathbb{R}}^n(C)$ взвешенным нормальным псевдорешением СЛАУ (17) с положительно полуопределенными весами B и C, т. е. единственным решением задачи: найти

$$\min_{x \in \bar{\mathbb{R}}^n(C) \cap \Omega} \| x \|_C, \qquad \Omega = \operatorname*{Arg\,min}_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_B .$$

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. В качестве симметризаторов, в основном, использованы положительно определенные матрицы, а в работах [13, 14] изучались H-симметричные матрицы, где H предполагается симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей. Определим симметризуемые матрицы с положительно полуопределенными симметризаторами [12].

Определение 1. *Квадратную матрицу* U *будем называть симметризуемой слева или справа с помощью симметричных положительно полуопределенных матриц* M *и* N, *если выполняются соответственно условия*

$$MU = U^T M, \quad \operatorname{rk}(MU) = \operatorname{rk}(U); \qquad UN = NU^T, \quad \operatorname{rk}(UN) = \operatorname{rk}(U). \tag{18}$$

Используя первое и второе условия в (2) и первое условие в (1), можно показать, что $\operatorname{rk}(BAX) = \operatorname{rk}(AX)$ и $\operatorname{rk}(XAC) = \operatorname{rk}(XA)$. Тогда третье условие в (1) вместе с первым условием в (2) и четвертое условие в (1) вместе со вторым условием в (2) будут соответственно означать, что матрица AX симметризуема слева симметризатором B, а матрица XA симметризуема справа симметризатором C. Очевидно, что в (3) согласно определению 1 матрицы AX и XA будут симметризуемы слева соответственно симметризаторами B и C, а в (5) матрица AX симметризуема справа симметризатором B, а матрица XA симметризуема слева симметризатором C, если будут выполняться условия на ранги матриц. Поэтому симметризуемые матрицы играют существенную роль при исследовании взвешенных псевдообратных матриц.

При исследовании вопроса существования единственного решения взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами будут использоваться следующие утверждения [7].

Лемма 1. *Пусть для квадратных матриц* K, L, M *выполняются условия* $KM = MK$, $LM = ML$. *Тода из равенства* $KM^2 = LM^2$ *следует равенство* $KM = LM$.

Лемма 2. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *а* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— симметричные положительно полуопределенные матрицы. Пусть матрицы* $A^T B$, AC, A^T *имеют один и тот же ранг. Тогда матрица* $A^T BACA^T$ *имеет тот же ранг.*

При исследовании разложений взвешенных псевдообратных матриц будем использовать следующее утверждение [7].

Лемма 3. *Для любых матриц* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и действительного числа* $0 < \sigma < \infty$ *имеет место тождество*

$$\sigma \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ E + (E - \sigma P)^{2^k} \right\} W = \sigma \sum_{k=0}^{2^n - 1} (E - \sigma P)^k W, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

2. Теорема существования и единственности взвешенных псевдообратных матриц. В этом пункте установлены условия, при которых существует единственное решение системы матричных уравнений (5). При доказательстве использована теорема Гамильтона – Кэли, что дало возможность получить представление взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (5) *имела единственное решение* $X = A^+_{BC}$, *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$B^+_{EE} BA = A, \quad AC^+_{EE} C = A, \tag{20}$$

причем матрица A^+_{BC}, *удовлетворяющая условиям* (5), (20), *представима в виде*

$$A^+_{BC} = C^+_{EE} S A^T B^+_{EE}, \tag{21}$$

где $S = f(A^T B^+_{EE} A C^+_{EE})$ *— многочлен от матрицы* $A^T B^+_{EE} A C^+_{EE}$ *вида*

$$S = -\alpha_k^{-1} \Big[(A^T B^+_{EE} A C^+_{EE})^{k-1} + \alpha_1 (A^T B^+_{EE} A C^+_{EE})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E \Big], \tag{22}$$

α_p, $p = 1, \ldots, n$, *— коэффициенты характеристического многочлена*

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det \Big[\lambda E - A^T B^+_{EE} A C^+_{EE} \Big],$$

а α_k *— последний отличный от нуля коэффициент этого многочлена,* B^+_{EE}, C^+_{EE} *— псевдообратные матрицы Мура — Пенроуза к матрицам* B *и* C *соответственно.*

Доказательство. Сначала покажем, что матрица, определенная формулой (21), удовлетворяет системе (5), если выполняются условия (20) и существует матрица S, удовлетворяющая условиям

$$SA^T B^+_{EE} A C^+_{EE} A^T = A^T, \quad SA^T B^+_{EE} A C^+_{EE} = A^T B^+_{EE} A C^+_{EE} S, \quad C^+_{EE} S = (C^+_{EE} S)^T . \tag{23}$$

Матрица A^+_{BC} удовлетворяет первому уравнению в (5) при выполнении условий (23). Действительно, учитывая (23), можно записать $A^T B^+_{EE} A C^+_{EE} S A^T =$

$= A^T$, $AS^T C_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ A = A$, $AC_{EE}^+ SA^T B_{EE}^+ A = A$, откуда в силу представления A_{BC}^+ формулой (21) и следует утверждение.

Чтобы показать, что матрица A_{BC}^+ удовлетворяет второму уравнению в (5), умножим первое уравнение в (23) слева на $C_{EE}^+ S$, а справа на B_{EE}^+. Учитывая второе условие в (23) и представление (21) для A_{BC}^+, получаем

$$C_{EE}^+ S^2 A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ = C_{EE}^+ S A^T B_{EE}^+ = A_{BC}^+,$$

$$C_{EE}^+ S A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ S A^T B_{EE}^+ = A_{BC}^+, \qquad A_{BC}^+ A A_{BC}^+ = A_{BC}^+,$$

т. е. матрица A_{BC}^+, определенная формулой (21), удовлетворяет второму уравнению в (5).

Далее, подставляя в третье уравнение из (5) представление для A_{BC}^+ из (21), с учетом первого условия в (20) и третьего условия в (23) получаем $AC_{EE}^+ SA^T B_{EE}^+ B = AC_{EE}^+ SA^T = AS^T C_{EE}^+ A^T = (AC_{EE}^+ SA^T)^T$, т. е. $AA_{BC}^+ B$ является симметричной матрицей и, следовательно, A_{BC}^+ удовлетворяет третьему уравнению в (3).

Наконец, подставляя в четвертое уравнение из (5) представление для A_{BC}^+ из (21) и учитывая вторые условия в (20), (23) и третье условие в (23), имеем

$$CC_{EE}^+ SA^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+ C = CC_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+ SC = CC_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ AS^T C_{EE}^+ C =$$

$$= (CC_{EE}^+ SA^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+ C)^T,$$

так что $CA_{BC}^+ A$ является симметричной матрицей, т. е. удовлетворяет четвертому условию в (5).

Теперь покажем, что существует матрица S, которая удовлетворяет (23) при выполнении условий (20). Для этого используем теорему Гамильтона – Кэли, согласно которой любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Поскольку $A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+ \in \mathbb{R}^{n\times n}$, справедливо равенство

$$(A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+)^n + \alpha_1 (A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+)^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+ + \alpha_n E = 0. \quad (24)$$

Пусть матрицы B и C положительно определенные и матрица $A^T B^{-1} AC^{-1}$ имеет обратную. Тогда $\alpha_n \neq 0$ и можно было бы положить $S = (A^T B^{-1} AC^{-1})^{-1}$. Легко проверить, что такая матрица удовлетворяет условиям (23). Но матрица $A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+$ является вырожденной и, следовательно, $\alpha_n = 0$. Пусть среди коэффициентов α_p, $p = 1, \ldots, n-1$, α_k будет последний, отличный от нуля коэффициент полинома $f(\lambda) = \det\left[\lambda E - A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+\right]$ и

$$S = -\alpha_k^{-1}\left[(A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+)^{k-1} + \alpha_1 (A^T B_{EE}^+ AC_{EE}^+)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E\right]. \quad (25)$$

Из вида матрицы S, определенной формулой (25), следует, что для нее выполняются второе и третье условия в (23). Покажем, что для матрицы S также выполняется первое условие в (23).

Учитывая (25), из (24) получаем

$$S(A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+)^{n-k+1} \;=\; (A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+)^{n-k}. \tag{26}$$

В силу леммы 1 из (26) имеем

$$S(A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+)^2 \;=\; A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+. \tag{27}$$

Умножим справа обе части равенства (27) на A^T, после чего с учетом второго равенства в (23) получим

$$(A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+)^2 S A^T \;=\; A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ A^T. \tag{28}$$

Легко убедиться, что из первого и второго условий в (21) соответственно следует

$$\mathrm{rk}(A^T B_{EE}^+) \;=\; \mathrm{rk}(A), \qquad \mathrm{rk}(A C_{EE}^+) \;=\; \mathrm{rk}(A). \tag{29}$$

Тогда матрицы $A^T B_{EE}^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A C_{EE}^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ согласно (29) имеют одинаковый ранг, который положим равным r. А в силу леммы 2 ранг матрицы $A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ A^T$ также равен r.

Чтобы показать, что из равенства (28) следует первое равенство в (23) при выполнении условий (29), используем скелетное разложение матриц [15] $A^T B_{EE}^+$, $A C_{EE}^+$ и A^T, т.е. представим их в виде $A^T B_{EE}^+ = KL$, $A C_{EE}^+ = MN$, $A^T = PQ$, где $K \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $N \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $P \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times m}$ — матрицы полного ранга. Тогда (28) примет вид

$$KLMNPQB_{EE}^+ A C_{EE}^+ S A^T \;=\; KLMNPQ. \tag{30}$$

Матрица $K^T K$ невырождена, поскольку $K \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — матрица полного ранга с $n \ge r$ [15]. Умножим равенство (30) слева сначала на K^T, а потом на $(K^T K)^{-1}$. В результате получим

$$LMNPQB_{EE}^+ A C_{EE}^+ S A^T \;=\; LMNPQ. \tag{31}$$

Матрицы LM и NP — квадратные, невырожденные ранга r. Действительно, ранг этих матриц будет r, так как согласно (29) из леммы 2 следует, что ранг матрицы $KLMNPQ = A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ A^T$ равен r. Но ранг матрицы-произведения не может превышать ранги матриц-сомножителей, а ранги матриц-сомножителей LM и NP не могут превышать r, поскольку r — порядок этих матриц.

Умножим равенство (31) слева сначала на $(LM)^{-1}$, а затем на $(NP)^{-1}$. В результате получим

$$QB_{EE}^+ A C_{EE}^+ S A^T \;=\; Q. \tag{32}$$

Теперь, умножая слева (32) на P и используя второе равенство из (23), получаем первое равенство в (23).

Поскольку матрица S, определенная формулой (22), удовлетворяет равенствам (23) при выполнении условий (20), матрица A_{BC}^+, определенная формулой (21), удовлетворяет системе матричных уравнений (5) при выполнении условий (20).

Таким образом, показано, что решение системы матричных уравнений (5) при выполнении условий (20) существует, причем оно представимо формулой (21). Покажем, что это представление единственно, т. е. существует единственная взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами, определяемая системой (5) при выполнении условий (20). Доказательство проведем от противного.

Предположим, что кроме матрицы S существует еще матрица S_* для представления A_{BC}^+ в виде (21) при выполнении условий (20). Обозначим $\tilde{S} = S - S_*$, 0 — нулевая матрица. Тогда $C_{EE}^+ \tilde{S} A^T B_{EE}^+ = 0$. Умножим это равенство справа на $AC_{EE}^+ A^T$. Тогда, учитывая первое равенство в (23) и второе в (29), получаем $C_{EE}^+ \tilde{S} A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ A^T = C_{EE}^+ A^T = A^T = 0$. Последнее равенство при $C \neq 0$, $B \neq 0$ возможно, если $\tilde{S}$ или A — нулевые матрицы. Следовательно, при $A \neq 0$ матрица $\tilde{S}$ нулевая, в силу чего матрица S в (21) и, значит, матрица A_{BC}^+ определяются единственным образом. Если A — нулевая матрица, то из (21) следует, что взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами будет нулевой. В последнем также можно убедиться непосредственной проверкой условий (5), (20). Обратно, если вместо условий в (20) положить $B_{EE}^+ BA = 0$, $AC_{EE}^+ C = 0$, то $\mathrm{rk}(A^T B_{EE}^+) = 0$, $\mathrm{rk}(AC_{EE}^+) = 0$ и равенства (29) выполняются только для матрицы $A = 0$.

Таким образом, установлено, что условия (20) являются достаточными для существования единственного решения системы матричных уравнений (5). Покажем, что условия (20) являются необходимыми для существования единственного решения системы (5).

Предположим, что система матричных уравнений (5) имеет единственное решение $X = A_{BC}^+$, и покажем, что в этом случае выполняются условия (20). Сначала покажем, что при выполнении (5) выполняется первое условие в (20). Третье условие в (5) перепишем в виде

$$B(A_{BC}^+)^T A^T = AA_{BC}^+ B. \tag{33}$$

Умножим (33) слева на $B_{EE}^+ B$. В силу равенства $BB_{EE}^+ B = B$ имеем

$$B(A_{BC}^+)^T A^T = B_{EE}^+ BAA_{BC}^+ B. \tag{34}$$

Вычитая (34) из (33), получаем

$$(AA_{BC}^+ - B_{EE}^+ BAA_{BC}^+)B = 0. \tag{35}$$

Для произвольной матрицы A, удовлетворяющей третьему условию в (5), равенство (35) возможно в трех случаях, а именно, когда

$$AA_{BC}^+ = B_{EE}^+ BAA_{BC}^+, \tag{36}$$

$B = 0$, столбцы матрицы B принадлежат нуль-пространству матрицы $AA_{BC}^+ - B_{EE}^+ BAA_{BC}^+ = (E - B_{EE}^+ B)AA_{BC}^+$.

Пусть выполняется равенство (36). Умножим (36) слева на A_{BC}^+. Учитывая второе условие в (5), получаем $A_{BC}^+ = A_{BC}^+ B_{EE}^+ BAA_{BC}^+$. Но согласно второму условию в (5) последнее равенство возможно, если $B_{EE}^+ BA = A$, т. е. при выполнении первого условия в (20). Если матрица B нулевая, то согласно (35)

$AA^+_{BC}B = 0$ и в силу предположения о единственности решения системы (5) имеем $A = 0$ и $A^+_{BC} = 0$. Тогда, очевидно, первое условие в (20) выполняется. Третье предположение из перечисленных возможных будет иметь место, если $AA^+_{BC}B = 0$ или $AA^+_{BC}B = B$. Выполнение этих равенств влечет выполнение равенства (36). Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить справа (36) на B и учесть равенство $BB^+_{EE}B = B$. А равенство (36) возможно при выполнении первого условия в (20), что и требовалось показать.

Теперь покажем, что при выполнении (5) выполняется второе условие в (20). Четвертое условие в (5) перепишем в виде

$$A^T(A^+_{BC})^TC = CA^+_{BC}A. \tag{37}$$

Умножим (37) справа на CC^+_{EE}. В силу равенства $CC^+_{EE}C = C$ имеем

$$A^T(A^+_{BC})^TC = CA^+_{BC}AC^+_{EE}C. \tag{38}$$

Вычитая (38) из (37), получаем

$$C(A^+_{BC}A - A^+_{BC}AC^+_{EE}C) = 0. \tag{39}$$

Для произвольной матрицы A, удовлетворяющей четвертому условию в (5), равенство (39) возможно в трех случаях, а именно, когда

$$A^+_{BC}A = A^+_{BC}AC^+_{EE}C, \tag{40}$$

$C = 0$, столбцы матрицы $A^+_{BC}A - A^+_{BC}AC^+_{EE}C = A^+_{BC}A(E - C^+_{EE}C)$ принадлежат нуль-пространству матрицы C.

Пусть выполняется равенство (40). Умножим (40) справа на A^+_{BC}. Учитывая второе условие в (5), получаем $A^+_{BC} = A^+_{BC}AC^+_{EE}CA^+_{BC}$. Но согласно второму равенству в (5) последнее равенство возможно, когда $AC^+_{EE}C = A$, т. е. при выполнении второго условия в (20). Если матрица C нулевая, то согласно (39) $CA^+_{BC}A = 0$ и в силу предположения о единственности решения системы (5) имеем $A = 0$ и $A^+_{BC} = 0$. Тогда, очевидно, второе условие в (20) выполняется. Третье предположение из перечисленных возможных будет иметь место, если $CA^+_{BC}A = 0$ или $CA^+_{BC}A = C$. Выполнение этих равенств влечет за собой выполнение равенства (40). Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить слева (40) на C и учесть равенство $CC^+_{EE}C = C$. А равенство (40), как показано выше, влечет выполнение второго условия в (20), что и требовалось показать.

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Из* (21), (22) *вытекает, что взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями* (5), (20), *имеет также представления*

$$A^+_{BC} = S_1C^+_{EE}A^TB^+_{EE} = C^+_{EE}A^TB^+_{EE}S_2 = C^+_{EE}A^TS_3B^+_{EE} =$$
$$= C^{+1/2}_{EE}S_4C^{+1/2}_{EE}A^TB^+_{EE} = C^+_{EE}A^TB^{+1/2}_{EE}S_5B^{+1/2}_{EE},$$

где S_1, S_2, S_3 — *многочлены от симметризуемых матриц, а* S_4, S_5 — *многочлены от симметричных матриц вида*

$$S_1 = -\alpha_k^{-1}\Big[(C^+_{EE}A^TB^+_{EE}A)^{k-1} + \alpha_1(C^+_{EE}A^TB^+_{EE}A)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\Big],$$

$$S_2 = -\alpha_k^{-1}\Big[(AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+})^{k-1} + \alpha_1(AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\Big],$$

$$S_3 = -\alpha_k^{-1}\Big[(B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+}A^T)^{k-1} + \alpha_1(B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+}A^T)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\Big],$$

$$S_4 = -\alpha_k^{-1}\Big[(C_{EE}^{+1/2}A^T B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2})^{k-1} + \alpha_1(C_{EE}^{+1/2}A^T B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\Big],$$

$$S_5 = -\alpha_k^{-1}\Big[(B_{EE}^{+1/2}AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+1/2})^{k-1} + \alpha_1(B_{EE}^{+1/2}AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+1/2})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E\Big].$$

***Следствие* 2.** *Из* (21), (22) *вытекает, что симметризуемые идемпотентные матрицы* $A_{BC}^{+}A$ *и* AA_{BC}^{+} *имеют представления*

$$A_{BC}^{+}A = C_{EE}^{+}SA^T B_{EE}^{+}A = f(C_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+}A) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}\Big[(C_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+}A)^{k} + \alpha_1(C_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+}A)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}(C_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+}A)\Big],$$

$$AA_{BC}^{+} = AC_{EE}^{+}SA^T B_{EE}^{+} = f(AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+}) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}\Big[(AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+})^{k} + \alpha_1(AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+})^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}(AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+})\Big].$$

***Следствие* 3.** *Имеют место равенства* (23).

***Следствие* 4.** *Из* (21), (22) *вытекают равенства* $A^T B_{EE}^{+}AA_{BC}^{+} = A^T B_{EE}^{+}$, $A_{BC}^{+}AC_{EE}^{+}A^T = C_{EE}^{+}A^T$.

***Замечание* 3.** Если матрицы B и C (или же одна из этих матриц) нулевые, то система матричных уравнений (5) при условиях (20) имеет решение тогда и только тогда, когда A — нулевая матрица, причем псевдообратная к ней также нулевая.

***Замечание* 4.** Если матрицы B и C положительно определенные, то в предыдущих утверждениях (теорема 1, следствия 1 – 4) вместо псевдообратных матриц к этим матрицам необходимо использовать обратные. Тогда условия (20) заведомо выполняются и получим представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно определенными весами. Из соответствующего представления взвешенной псевдообратной матрицы для невырожденных весов следует представление псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза, полученное в работе [16]. В [10] описан алгоритм, позволяющий на основе представления псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза в терминах коэффициентов характеристического многочлена матрицы $A^T A$ вычислять эту матрицу за приемлемое число арифметических операций. В настоящей работе формула (21) используется ниже при обосновании существования единственного взвешенного нормального псевдорешения и разложения взвешенных псевдообратных матриц.

Лемма 4. *Ранги матриц* A, A_{BC}^{+}, $A_{BC}^{+}A$, AA_{BC}^{+}, $C_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+}A$, $A^T B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+}$, $AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+}$, $B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+}A^T$, $C_{EE}^{+1/2}A^T B_{EE}^{+}AC_{EE}^{+1/2}$, $B_{EE}^{+1/2}AC_{EE}^{+}A^T B_{EE}^{+1/2}$, *определенных в теореме* 1, *при выполнении условий* (29) *совпадают.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{rk}(A) = r$. Из первого равенства в (5) имеем $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(AA_{BC}^{+}A) \le \mathrm{rk}(AA_{BC}^{+}) \le \mathrm{rk}(A)$, т. е. $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(AA_{BC}^{+})$. Из второго равенства в (5) получаем $\mathrm{rk}(A_{BC}^{+}) = \mathrm{rk}(A_{BC}^{+}AA_{BC}^{+}) \le \mathrm{rk}(AA_{BC}^{+}) \le \mathrm{rk}(A_{BC}^{+})$, т. е. $\mathrm{rk}(A_{BC}^{+}) = \mathrm{rk}(AA_{BC}^{+})$. Из последних двух равенств имеем $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{BC}^{+}) = \mathrm{rk}(AA_{BC}^{+})$. Аналогично, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{BC}^{+}) = \mathrm{rk}(A_{BC}^{+}A)$.

Поскольку ранг матрицы-произведения матриц не превышает ранга каждой из матриц-сомножителей, в силу первого условия в (29) $\operatorname{rk}(A^T B_{EE}^{+1/2}) = \operatorname{rk}(A) = r$, так что, учитывая свойство равенства рангов исходной матрицы и транспонированной, находим $\operatorname{rk}(A^T B_{EE}^{+} A) = \operatorname{rk}\left\{(B_{EE}^{+1/2} A)^T B_{EE}^{+1/2} A\right\} = r$. Далее, используя неравенство Фробениуса, получаем $\operatorname{rk}(A^T B_{EE}^{+} A) + \operatorname{rk}(A C_{EE}^{+}) \le \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+})$, откуда в силу второго условия в (29) и последнего равенства имеем $\operatorname{rk}(A) \le \operatorname{rk}(A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+}) \le \operatorname{rk}(A)$, т. е. $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+}) = r$. Учитывая свойство равенства рангов исходной матрицы и транспонированной, из последнего равенства получаем $\operatorname{rk}(C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A) = r$. В силу условий (29) подобные рассуждения приводят к равенству

$$\operatorname{rk}(A C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+}) = \operatorname{rk}(B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+} A^T) = r.$$

Рассмотрим матрицу $C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+1/2}$. Учитывая свойство равенства рангов исходной матрицы и матрицы-произведения транспонированной и исходной матриц, находим

$$\operatorname{rk}(C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+1/2}) = \operatorname{rk}\left\{(B_{EE}^{+1/2} A C_{EE}^{+1/2})^T B_{EE}^{+1/2} A C_{EE}^{+1/2}\right\} = \operatorname{rk}(B_{EE}^{+1/2} A C_{EE}^{+1/2}). \quad (41)$$

На основании неравенства Фробениуса $\operatorname{rk}(B_{EE}^{+1/2} A) + \operatorname{rk}(A C_{EE}^{+1/2}) \le \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B_{EE}^{+1/2} A C_{EE}^{+1/2})$, откуда в силу (29) имеем $\operatorname{rk}(B_{EE}^{+1/2} A C_{EE}^{+1/2}) = \operatorname{rk}(A)$. На основании этого равенства и равенства (41) получаем $\operatorname{rk}(C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+1/2}) = r$. Подобные рассуждения приводят к равенству $\operatorname{rk}(B_{EE}^{+1/2} A C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+1/2}) = r$.

Лемма 4 доказана.

***Замечание* 5.** Пусть $\operatorname{rk}(A) = 1$. Тогда согласно лемме 4 $\operatorname{rk}(A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+}) = 1$ и на основании (21), (22) получаем формулу $A_{BC}^{+} = \left[\operatorname{tr}(A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+})\right]^{-1} \times C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+}$ для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, где $\operatorname{tr}(L)$ — след матрицы L.

3. Теорема существования и единственности взвешенных нормальных псевдорешений. Обозначим через $Y = A_B^{(1,3)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ матрицу, удовлетворяющую условиям

$$AYA = A, \qquad (AYB)^T = AYB, \quad (42)$$

$$B_{EE}^{+} BA = A, \quad (43)$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно полуопределенная матрица.

Лемма 5. *Вектор* $x^{(1,3)} = A_B^{(1,3)} f$ *является решением по методу взвешенных наименьших квадратов с положительно полуопределенным весом* $B_{EE}^{+} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *СЛАУ* (17), *т. е. удовлетворяет условию*

$$\left\| Ax^{(1,3)} - f \right\|_{B_{EE}^{+}} = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| Ax - f \right\|_{B_{EE}^{+}}. \quad (44)$$

Доказательство. Условие (44) равносильно неравенству

$$\left\| AA_B^{(1,3)}f - f \right\|_{B_{EE}^+} \leq \left\| Ax - f \right\|_{B_{EE}^+} \qquad \forall f \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку $Ax - f = AA_B^{(1,3)}f - f + A(x - A_B^{(1,3)}f)$, это неравенство можно представить в виде

$$\left\| AA_B^{(1,3)}f - f \right\|_{B_{EE}^+} \leq \left\| AA_B^{(1,3)}f - f + Aw \right\|_{B_{EE}^+},$$

где $w = x - A_B^{(1,3)}f$. Пусть $u = AA_B^{(1,3)}f - f$, $v = Aw$, тогда последнее неравенство примет вид $\|u\|_{B_{EE}^+} \leq \|u + v\|_{B_{EE}^+}$ или $Ax - f = AA_B^{(1,3)}f - f + A(x - A_B^{(1,3)}f)$, откуда

$$0 \leq \|v\|_{B_{EE}^+}^2 + 2(u, B_{EE}^+ v)_E. \tag{45}$$

Так как $\|v\|_{B_{EE}^+}^2 \geq 0$ и $(u, B_{EE}^+ v)_E = f^T \left[(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A - B_{EE}^+ A \right] w$ зависит от произвольных f и w, неравенство (45) равносильно требованию

$$(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A = B_{EE}^+ A. \tag{46}$$

Покажем, что равенство (46) и два равенства (42) при выполнении условия (43) эквивалентны. Из первого равенства в (42) следует, что $B_{EE}^+ AA_B^{(1,3)} A = B_{EE}^+ A$. Учитывая (43), из этого равенства получаем $B_{EE}^+ AA_B^{(1,3)} BB_{EE}^+ A = B_{EE}^+ A$. В силу второго равенства в (42) из последнего равенства имеем $B_{EE}^+ B(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A - B_{EE}^+ A = 0$, откуда $B_{EE}^+ B\left[(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A - B_{EE}^+ A \right] = 0$. Это равенство возможно в трех случаях, а именно, когда $B_{EE}^+ B = 0$, $(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A = B_{EE}^+ A$, $B_{EE}^+ B(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A = B_{EE}^+ A$.

Если проекционная матрица $B_{EE}^+ B$ нулевая, то первый случай возможен при $B = 0$. Второе предположение из перечисленных возможных, которое совпадает с (46), означает, что среди столбцов матрицы $B_{EE}^+ A$ нет тех, которые принадлежат нуль-пространству идемпотентной матрицы $(A_B^{(1,3)})^T A^T$. В силу равенства $B_{EE}^+ BB_{EE}^+ = B_{EE}^+$ выполнение второго предположения влечет выполнение третьего предположения. Таким образом, из равенств (42) следует (46).

Обратно, умножая (46) слева на B и учитывая условие (43), находим $B(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A = A$. Умножая это равенство справа на $A_B^{(1,3)} B$, имеем $B(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ AA_B^{(1,3)} B = AA_B^{(1,3)} B$, т. е. $AA_B^{(1,3)} B$ является симметричной матрицей. Кроме того, из (46), второго равенства из (42) и условия (43) последовательно получаем $B(A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A = BB_{EE}^+ A$, $(AA_B^{(1,3)} B)^T B_{EE}^+ A = A$, $AA_B^{(1,3)} BB_{EE}^+ A = A$, $AA_B^{(1,3)} A = A$, т. е. первое равенство в (42), что и завершает доказательство леммы 5.

Решение системы (17) по методу взвешенных наименьших квадратов с положительно полуопределенной матрицей-весом B_{EE}^+ в общем случае не является единственным. Общий вид такого решения устанавливает следующая лемма.

Лемма 6. *Множество векторов, удовлетворяющих* (44), *определяется формулой*

$$z = A_B^{(1,3)}f + (E - A^{(1)}A)y, \tag{47}$$

где $A^{(1)}$ *— матрица, удовлетворяющая первому условию в* (5), y *— произвольный вектор из* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Во-первых, z удовлетворяет условию (44), так как в силу первого равенства из (42) имеем $A(E - A^{(1)}A)y = 0$, во-вторых, каждое решение $\tilde{z} = \tilde{A}_B^{(1,3)}f$, удовлетворяющее (44), можно представить в виде (47), взяв $y = A_B^{(1,3)}f - \tilde{A}_B^{(1,3)}f$. Покажем это.

Подставив в (47) значение y, получим $\tilde{z} = A_B^{(1,3)}f + A^{(1)}A\tilde{A}_B^{(1,3)}f - A^{(1)}AA_B^{(1,3)}f$. Тогда для доказательства леммы 6 достаточно показать, что

$$A^{(1)}A\tilde{A}_B^{(1,3)}f - A^{(1)}AA_B^{(1,3)}f = 0. \tag{48}$$

Очевидно, что для матрицы $\tilde{A}_B^{(1,3)}$, как и для $A_B^{(1,3)}$, должно выполняться равенство (46), в силу которого

$$(\tilde{A}_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A = (A_B^{(1,3)})^T A^T B_{EE}^+ A. \tag{49}$$

Используем скелетное разложение матриц [15], а также равенство $\operatorname{rk}(A^T) = \operatorname{rk}(B_{EE}^+ A) = r$, которое следует из первого равенства в (29). Пусть $A^T = KL$, $B_{EE}^+ A = PS$, где $K \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $P \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $S \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Тогда (49) примет вид

$$(\tilde{A}_B^{(1,3)})^T KLPS = (A_B^{(1,3)})^T KLPS. \tag{50}$$

Матрица SS^T невырождена, поскольку $S \in \mathbb{R}^{r\times n}$ — матрица полного ранга с $r \le n$ [15]. Умножим равенство (50) справа сначала на S^T, а затем на $(SS^T)^{-1}$. В результате получим

$$(\tilde{A}_B^{(1,3)})^T KLP = (A_B^{(1,3)})^T KLP. \tag{51}$$

Матрица $LP \in \mathbb{R}^{r\times r}$ невырожденная. Действительно, из равенства $\operatorname{rk}(B_{EE}^+ A) = r$ имеем $\operatorname{rk}(B_{EE}^{+1/2} A) = r$, в силу чего получаем $\operatorname{rk}(A^T B_{EE}^+ A) = \operatorname{rk}\left[(B_{EE}^{+1/2} A)^T B_{EE}^{+1/2} A \right] = \operatorname{rk}(B_{EE}^{+1/2} A) = r$. Следовательно, $\operatorname{rk}(KLPS) = \operatorname{rk}(A^T B_{EE}^+ A) = r$. Тогда $\operatorname{rk}(LP) = r$, поскольку r — порядок матрицы LP и ранг матрицы-произведения не может превышать ранги матриц-сомножителей.

Умножая (51) справа на $(LP)^{-1}$, получаем $(\tilde{A}_B^{(1,3)})^T K = (A_B^{(1,3)})^T K$. Далее, умножая последнее равенство справа на L, находим $(\tilde{A}_B^{(1,3)})^T A^T = (A_B^{(1,3)})^T A^T$, т. е. $A\tilde{A}_B^{(1,3)} = AA_B^{(1,3)}$, откуда следует равенство (48) и, следовательно, утверждение леммы 6.

Теорема 2. *Вектор* $x^+ = A_{BC}^+ f$, *где матрица* A_{BC}^+ *определена условиями* (5), (20), *является в* $\overline{\mathbb{R}}^n(C)$ *взвешенным нормальным псевдорешением*

СЛАУ (17) *с положительно полуопределенными весами* B_{EE}^{+} *и* C, *а именно, единственным решением задачи: найти*

$$\min_{x \in \bar{\mathbb{R}}^n(C) \bigcap \Omega} \| x \|_C, \qquad \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_{B_{EE}^{+}}. \tag{52}$$

Доказательство. Лемма 6 устанавливает, что вектор $z = A_B^{(1,3)} f$ с матрицей $A_B^{(1,3)}$, определенной условиями (42), (43), минимизирует норму $\|\cdot\|_{B_{EE}^{+}}$ невязки $Ax - f$, т. е. принадлежит множеству Ω, определенному в (52). Пусть матрица $A_B^{(1,3)}$ удовлетворяет еще второму и четвертому условиям в (5) и второму условию в (20). Тогда $A_B^{(1,3)} = A_{BC}^{+}$ и

$$A_{BC}^{+} A A_{BC}^{+} = A_{BC}^{+}, \qquad (C A_{BC}^{+} A)^T = C A_{BC}^{+} A. \tag{53}$$

Лемма 6 утверждает, что множество векторов, принадлежащих Ω, определяется формулой (47). Очевидно, что вектор $z^{+} = A_{BC}^{+} f + (E - A_{BC}^{+} A) y$ также принадлежит Ω. Согласно (52) среди множества векторов z^{+} необходимо выбрать те, которые принадлежат $\bar{\mathbb{R}}^n(C)$. Поскольку y — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, положим $y \in \bar{\mathbb{R}}^n(C) \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в силу представления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами формулой (21), равенства $C_{EE}^{+} C C_{EE}^{+} = C_{EE}^{+}$ и второго условия (20) имеем $\tilde{z}^{+} = A_{BC}^{+} f + C C_{EE}^{+} (E - A_{BC}^{+} A) y$ $\forall y \in \bar{\mathbb{R}}^n(C)$ и, очевидно, $\tilde{z}^{+} \in \bar{\mathbb{R}}^n(C)$. Покажем, что вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$ удовлетворяет первому условию в (52), т. е. имеет минимальную норму в $\bar{\mathbb{R}}^n(C)$ среди векторов $\tilde{z}^{+} \in \bar{\mathbb{R}}^n(C) \bigcap \Omega$. Для этого должно выполняться неравенство $\left\| A_{BC}^{+} f \right\|_C \le \left\| A_{BC}^{+} f + C C_{EE}^{+} (E - A_{BC}^{+} A) y \right\|_C$ $\forall f \in \mathbb{R}^n$, $y \in \bar{\mathbb{R}}^n(C)$. Пусть $u = A_{BC}^{+} f$, $v = C C_{EE}^{+} (E - A_{BC}^{+} A) y$. Тогда $\| u \|_C \le \| u + v \|_C$ или $\| u \|_C^2 \le \| u \|_C^2 + \| v \|_C^2 + 2(u, Cv)_E$, откуда

$$0 \le \| v \|_C^2 + 2(u, Cv)_E. \tag{54}$$

Поскольку $\| v \|_C^2 \ge 0$ и $(u, Cv)_E = f^T [(A_{BC}^{+})^T C - (A_{BC}^{+})^T C A_{BC}^{+} A] y$ зависит от произвольных векторов $f \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \bar{\mathbb{R}}^n(C)$, неравенство (54) равносильно требованию $(u, Cv)_E = 0$ или

$$(A_{BC}^{+})^T C = (A_{BC}^{+})^T C A_{BC}^{+} A. \tag{55}$$

Далее, использовав формулу (21), покажем, что равенство (55) и два равенства (53) эквивалентны. Действительно, из первого равенства в (53) следует $(A_{BC}^{+})^T C = (A_{BC}^{+})^T A^T (A_{BC}^{+})^T C$. После подстановки второго равенства из (53) в последнее равенство получаем (55). Обратно, после умножения (55) слева на A^T устанавливаем, что $C A_{BC}^{+} A$ — симметричная матрица. Кроме того, из (55) и второго равенства в (53) имеем $(A_{BC}^{+})^T C = (A_{BC}^{+})^T A^T (A_{BC}^{+})^T C$. Умножая это равенство справа на C_{EE}^{+} и учитывая (21), получаем $(A_{BC}^{+})^T = (A_{BC}^{+})^T A^T (A_{BC}^{+})^T$, т. е. первое условие в (53).

Таким образом, вектор $x^+ = A^+_{BC} f$ является решением задачи (52). Покажем, что этот вектор является единственным решением указанной задачи. Доказательство проведем от противного. Пусть кроме x^+ существует еще другое решение задачи (52), которое обозначим x^+_*. Его можно представить в виде $x^+_* = x^+ - x$, где $x = x^+ - x^+_*$. Это решение должно принадлежать множеству векторов из $\overline{\mathbb{R}}^n(C) \bigcap \Omega$. Выше определены векторы $\tilde{z}^+$, которые принадлежат этому множеству. Тогда каждый вектор $\tilde{z}^+$ можно представить в виде $\tilde{z}^+ = x^+ - x$ и

$$x^+_* = \tilde{z}^+ = x^+ + v, \quad x^+ = A^+_{BC} f \quad \forall f \in \mathbb{R}^n, \quad v = CC^+_{EE}(E - A^+_{BC}A)y \quad \forall y \in \overline{\mathbb{R}}^n(C).$$

Возможны два случая. Во-первых, при выполнении условия $A^+_{BC}Ay = CC^+_{EE}y = y$ вектор $v = 0$. Вектор $v = 0$, если $y \in \overline{\mathbb{R}}^n(C)$ является образом идемпотентной матрицы $A^+_{BC}A$. Тогда для всех таких y имеем $x^+_* = \tilde{z}^+ = A^+_{BC} f$. Второй случай включает множество векторов x^+_*, для которых $v \neq 0$. Тогда $\left\| x^+_* \right\|^2_C = \left\| x^+ \right\|^2_C + \| v \|^2_C + 2(u, Cv)_E$. Третье слагаемое в правой части этого равенства в силу (55) равно нулю. Поскольку вектор $v \neq 0 \in \overline{\mathbb{R}}^n(C)$, $\| v \|_C$ является нормой (а не полунормой), в силу чего с учетом того обстоятельства, что по предположению $v \neq 0$, имеем $\| v \|^2_C > 0$. Следовательно, в этом случае $\left\| x^+ \right\|_C$ всегда меньше $\left\| x^+_* \right\|_C$. Таким образом, вектор $x^+ = A^+_{BC} f$ является единственным решением задачи (52).

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 6.** Если правая часть СЛАУ (17) f принадлежит нуль-пространству матрицы B^+_{EE}, то из (21) следует, что СЛАУ (17) имеет нулевое взвешенное нормальное псевдорешение.

4. Разложение в ряды и произведения взвешенных псевдообратных матриц. В настоящем пункте на основании результатов п. 3, а именно, представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц, и леммы 3 получены и исследованы разложения в матричные степенные ряды и произведения взвешенных псевдообратных матриц с положительными показателями степеней.

Теорема 3. *Для произвольной матрицы* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *симметричных положительно полуопределенных матриц* $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *удовлетворяющих условиям* (5), (20), *и действительного числа*

$$0 < \sigma < 2\left[\lambda_{\max}(C^{+1/2}_{EE} A^T B^+_{EE} A C^{+1/2}_{EE}) \right]^{-1} \tag{56}$$

имеют место соотношения

$$A^+_{BC} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{+1/2}_{EE}(E - \sigma C^{+1/2}_{EE} A^T B^+_{EE} A C^{+1/2}_{EE})^k C^{+1/2}_{EE} A^T B^+_{EE}, \tag{57}$$

$$\left\| A^+_{BC} - A^+_{\sigma,p} \right\|_{CB^{1/2}} \leq \max_{\lambda_i \neq 0} \left\{ \lambda_i^{-1/2} \left| 1 - \sigma\lambda_i \right|^p \right\}, \tag{58}$$

где

$$A^+_{\sigma,p} = \sigma \sum_{k=0}^{p-1} C_{EE}^{+1/2}(E - \sigma C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^{+1/2})^k C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^+, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

λ_i — *собственные значения матрицы* $L = C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^{+1/2}$.

Доказательство. Матрица $L = C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^{+1/2}$ симметричная и положительно полуопределенная, так что ее собственные значения действительные и неотрицательные. Обозначим через $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, собственные значения матрицы L. Поскольку матрица L симметричная, имеют место соотношения

$$Q^T L Q = \Lambda, \quad L = Q \Lambda Q^T, \quad Q^T Q = E. \tag{59}$$

Рассмотрим одно из слагаемых ряда (57). Учитывая (59) и два первых равенства из (23), можем записать

$$\sigma C_{EE}^{+1/2}(E - \sigma L)^k C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^+ = \sigma C_{EE}^{+1/2} Q (E - \sigma\Lambda)^k Q^T L^2 C_{EE}^{+1/2} S^2 A^T B_{EE}^+ =$$

$$= \sigma C_{EE}^{+1/2} Q (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^2 Q^T C_{EE}^{+1/2} S^2 A^T B_{EE}^+. \tag{60}$$

Поскольку $\sigma(E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^2 = \operatorname{diag}\left\{\sigma(1 - \sigma\lambda_i)^k \lambda_i^2\right\}$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma(E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^2 = \Lambda, \tag{61}$$

т. е. этот матричный ряд сходится к матрице $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$.

Действительно, при выполнении условия (56), когда $\lambda_i > 0$, число $|1 - \sigma\lambda_i| < 1$ и матричный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma(E - \sigma\Lambda)^k \Lambda$ сходится к диагональной матрице с элементами, равными единице при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$, в силу чего и следует (61).

Учитывая формулу (21), два первых равенства из (23) и соотношения (59) – (61), получаем

$$\sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+1/2}(E - \sigma L)^k C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^+ = C_{EE}^{+1/2} Q \Lambda Q^T C_{EE}^{+1/2} S^2 A^T B_{EE}^+ =$$

$$= C_{EE}^{+1/2} L C_{EE}^{+1/2} S^2 A^T B_{EE}^+ = C_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ S^2 A^T B_{EE}^+ =$$

$$= C_{EE}^+ S^2 A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ A^T B_{EE}^+ = C_{EE}^+ S A^T B_{EE}^+ = A_{BC}^+,$$

т. е. формулу (57).

Перейдем к доказательству оценки (58). Поскольку

$$A_{BC}^+ - A_{\sigma,p}^+ = \sigma \sum_{k=p}^{\infty} C_{EE}^{+1/2}(E - \sigma L)^k C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^+,$$

в силу первого равенства в (59) и двух первых равенств в (23) имеем

$$A_{BC}^+ - A_{\sigma,p}^+ = \sigma C_{EE}^{+1/2} Q \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^+ A C_{EE}^+ S A^T B_{EE}^+. \tag{62}$$

Положим в (11) $M = E_n$. Поскольку при этом условие (10) выполняется для любых матриц A и B, на основании (11) из (62) получим

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,p}^{+} \right\|_{CB^{1/2}} \le$$

$$\le \sigma \left\| C_{EE}^{+1/2} Q \right\|_{CE_n} \left\| \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+} S A^T B_{EE}^{+} \right\|_{E_n B^{1/2}}. \quad (63)$$

Нетрудно убедиться, что для матрицы $A_{BC}^{+} - A_{\sigma,p}^{+}$, определенной в (62), выполняются условия (7), если в них положить $H = C$, $V = B^{1/2}$, так что $\|\cdot\|_{CB^{1/2}}$ — норма (а не полунорма) для этой матрицы.

Учитывая то, что собственные значения идемпотентной матрицы есть 0 и 1 [15], в силу ортогональности матрицы Q, определения величины матричной нормы согласно формуле (9) из (63) имеем

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,p}^{+} \right\|_{CB^{1/2}} \le \left\| \sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+} S A^T B_{EE}^{+} \right\|_{E_n B^{1/2}}. \quad (64)$$

В силу (21), (23), (59) можем записать

$$(E - \sigma\Lambda)^k Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+} S A^T B_{EE}^{+} = (E - \sigma\Lambda)^k Q^T L C_{EE}^{+1/2} S A^T B_{EE}^{+} =$$

$$= (E - \sigma\Lambda)^k Q^T Q \Lambda Q^T C_{EE}^{+1/2} S A^T B_{EE}^{+} = (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} Q^T C_{EE}^{+1/2} S A^T B_{EE}^{+} =$$

$$= (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T Q \Lambda Q^T C_{EE}^{+1/2} S A^T B_{EE}^{+} =$$

$$= (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+} S A^T B_{EE}^{+} =$$

$$= (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+}.$$

Тогда (64) примет вид

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,p}^{+} \right\|_{CB^{1/2}} \le \left\| \sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} \right\|_{E_n B^{1/2}}.$$

Для оценки правой части в этом неравенстве опять используем (11), где положим $M = E_n$. В результате получим

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,p}^{+} \right\|_{CB^{1/2}} \le \left\| \sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \right\|_{E_n E_n} \left\| \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} \right\|_{E_n B^{1/2}}. \quad (65)$$

Поскольку матричный ряд $\sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2}$ сходится к диагональной матрице с элементами, равными $\lambda_i^{-1/2}$ при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$, а сумма $\sigma \sum_{k=0}^{p-1} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2}$ является диагональной матрицей с элементами, равными $[1 - (1 - \sigma\lambda_i)^p]\lambda_i^{-1/2}$ при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$, $\sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2}$ есть диагональная матрица с элементами, равными $\lambda_i^{-1/2}(1 - \sigma\lambda_i)^p$ при $\lambda_i > 0$ и нулю при $\lambda_i = 0$. Следовательно,

$$\left\| \sigma \sum_{k=p}^{\infty} (E - \sigma\Lambda)^k \Lambda^{1/2} \right\|_{E_n E_n} = \max_{\lambda_i \neq 0} \left\{ \lambda_i^{-1/2} \left| 1 - \sigma\lambda_i \right|^p \right\}. \tag{66}$$

Оценим вторую норму в правой части соотношения (65). Учитывая (59), определение величины матричной нормы формулой (9) и то, что ненулевые собственные значения матрицы-произведения при перестановке матриц-сомножителей не изменяются [17], а собственные значения проекционной матрицы равны 0 и 1, получаем

$$\left\| \Lambda_{EE}^{+1/2} Q^T C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} \right\|_{E_n B^{1/2}} = \left[\lambda_{\max} (C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+1/2} Q \Lambda_{EE}^{+} Q^T) \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\lambda_{\max} (L L_{EE}^{+}) \right]^{1/2} = 1. \tag{67}$$

В силу (66), (67) из (65) следует оценка (58), что и завершает доказательство теоремы 3.

***Следствие* 5.** *Нетрудно убедиться, что из* (57) *вытекают следующие соотношения*:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)^k C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+} (E - \sigma A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+})^k A^T B_{EE}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} (E - \sigma A C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+})^k =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+} A^T (E - \sigma B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+} A^T)^k B_{EE}^{+} =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+1/2} (E - \sigma B_{EE}^{+1/2} A C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+1/2})^k B_{EE}^{+1/2}.$$

***Замечание* 7.** В формуле (56), определяющей σ, вместо $\lambda_{\max}(C_{EE}^{+1/2} A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+1/2})$ можно использовать максимальное собственное значение одной из матриц $C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A$, $A^T B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+}$, $A C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+}$, $B_{EE}^{+} A C_{EE}^{+} A^T$, $B_{EE}^{+1/2} A C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+1/2}$, так как согласно [17] эти матрицы имеют одинаковые собственные значения как матрицы, полученные в результате перестановки матриц-сомножителей.

Чтобы получить формулы разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения, будем использовать тождество (19). При выполнении предположений теоремы 3 в силу следствия 5, а именно, разложения

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)^k C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} \tag{68}$$

и тождества (19), получаем следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{\infty} \{ E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)^{2^k} \} C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+}. \tag{69}$$

Обозначим $A^+_{\sigma,n} = \sigma\prod_{k=0}^{n-1}\{E + (E - \sigma C^+_{EE}A^T B^+_{EE}A)^{2^k}\}C^+_{EE}A^T B^+_{EE}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда в силу тождества (19) и соотношения (58) имеем

$$\left\| A^+_{BC} - A^+_{\sigma,n} \right\|_{CB^{1/2}} \le \max_{\lambda_i \ne 0}\left\{ \lambda_i^{-1/2} \left| 1 - \sigma\lambda_i \right|^{2^n} \right\}. \tag{70}$$

На основании (69) можно получить другие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения:

$$A^+_{BC} = \sigma C^+_{EE}\prod_{k=0}^{\infty}\{E + (E - \sigma A^T B^+_{EE}AC^+_{EE})^{2^k}\}A^T B^+_{EE} =$$

$$= \sigma C^{+1/2}_{EE}\prod_{k=0}^{\infty}\{E + (E - \sigma C^{+1/2}_{EE}A^T B^+_{EE}AC^{+1/2}_{EE})^{2^k}\}C^{+1/2}_{EE}A^T B^+_{EE} =$$

$$= \sigma C^+_{EE}A^T B^+_{EE}\prod_{k=0}^{\infty}\{E + (E - \sigma AC^+_{EE}A^T B^+_{EE})^{2^k}\} =$$

$$= \sigma C^+_{EE}A^T\prod_{k=0}^{\infty}\{E + (E - \sigma B^+_{EE}AC^+_{EE}A^T)^{2^k}\}B^+_{EE} =$$

$$= \sigma C^+_{EE}A^T B^{+1/2}_{EE}\prod_{k=0}^{\infty}\{E + (E - \sigma B^{+1/2}_{EE}AC^+_{EE}A^T B^{+1/2}_{EE})^{2^k}\}B^{+1/2}_{EE}.$$

***Замечание* 8.** Для взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (1), (2), разложения в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения получены соответственно в работах [12, 18].

5. Построение итерационных процессов. В данном пункте опишем методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, основанную на разложениях взвешенных псевдообратных матриц, полученных в п. 4.

Сначала при построении итерационного процесса для вычисления взвешенных псевдообратных матриц используем их разложение (68) в матричный степенной ряд. Положим

$$X_k = \sigma\sum_{i=0}^{k-1}(E - \sigma C^+_{EE}A^T B^+_{EE}A)^i C^+_{EE}A^T B^+_{EE}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для вычисления A^+_{BC} получим итерационный процесс

$$X_1 = \sigma C^+_{EE}A^T B^+_{EE}, \quad X_k = (E - \sigma C^+_{EE}A^T B^+_{EE}A)X_{k-1} + \sigma C^+_{EE}A^T B^+_{EE} =$$

$$= X_{k-1} + \sigma C^+_{EE}A^T B^+_{EE}(E - AX_{k-1}), \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{71}$$

Оценка близости k-го приближения к A^+_{BC} по схеме (71) определяется формулой (58), где следует положить $p = k$.

Теперь для построения итерационного процесса используем разложение (69) взвешенных псевдообратных матриц в матричное степенное произведение. Положим

$$X_k = \sigma\prod_{i=0}^{k-1}\left\{E + (E - \sigma C^+_{EE}A^T B^+_{EE}A)^{2^i}\right\}C^+_{EE}A^T B^+_{EE}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_1 = \sigma\{E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)\} C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+},$$

$$X_k = \{E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)^{2^{k-1}}\} X_{k-1} =$$

$$= X_{k-1} + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)^{2^{k-1}} X_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{72}$$

Оценка близости k-го приближения к A_{BC}^{+} по схеме (72) определяется формулой (70), где следует положить $n = k$.

Рассмотрим методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений системы (17). Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (71). Тогда для вычисления приближения к $x^{+} = A_{BC}^{+} f$ получим итерационный процесс

$$x_1 = \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} f, \quad x_k = (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A) x_{k-1} + \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} f =$$

$$= x_{k-1} + \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} (f - A x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{73}$$

Теорема 4. *Итерационный процесс* (73) *сходится к* x^{+}, *определенным в* (52), *причем имеет место оценка*

$$\left\| x^{+} - x_k \right\|_C \leq \max_{\lambda_i \neq 0} \left\{ \lambda_i^{-1/2} \left| 1 - \sigma \lambda_i \right|^k \right\} \| f \|_{B_{EE}^{+}}, \tag{74}$$

где λ_i *и матрицы* B, C *определены в теореме* 3.

Доказательство. Сходимость последовательности векторов, определенных формулами (73), к взвешенному нормальному псевдорешению СЛАУ (17) при $k \to \infty$ следует из того факта, что данная последовательность построена на основе матричного степенного ряда, сходящегося к взвешенной псевдообратной матрице. Покажем справедливость оценки (74).

Поскольку $x^{+} = A_{BC}^{+} f$, $x_k = X_k f$, на основании определения нормы прямоугольной матрицы формулой (8) и того, что в силу (21), (71) и равенства $B_{EE}^{+} B^{1/2} B_{EE}^{+1/2} = B_{EE}^{+}$ следует $(A_{BC}^{+} - X_k) B^{1/2} B_{EE}^{+1/2} = A_{BC}^{+} - X_k$, имеем

$$\left\| x^{+} - x_k \right\|_C = \left\| (A_{BC}^{+} - X_k) B^{1/2} B_{EE}^{+1/2} f \right\|_C \leq \left\| A_{BC}^{+} - X_k \right\|_{CB^{1/2}} \| f \|_{B_{EE}^{+}}. \tag{75}$$

Так как $X_k = A_{\sigma,k}^{+}$, учитывая (58), из (75) получаем (74), т. е. утверждение теоремы 4.

Для вычисления приближения к x^{+} на основании (72) получим итерационный процесс

$$x_1 = \sigma\{E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)\} C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} f,$$

$$x_k = \{E + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)^{2^{k-1}}\} x_{k-1} =$$

$$= x_{k-1} + (E - \sigma C_{EE}^{+} A^T B_{EE}^{+} A)^{2^{k-1}} x_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{76}$$

Аналогично теореме 4 на основании оценки (70) имеем следующую теорему.

Теорема 5. *Итерационный процесс* (76) *сходится к* x^+, *определенным в* (52), *причем имеет место оценка*

$$\left\| x^+ - x_k \right\|_C \le \max_{\lambda_i \ne 0} \left\{ \lambda_i^{-1/2} \left| 1 - \sigma\lambda_i \right|^{2k} \right\} \| f \|_{B_{EE}^+},$$

где λ_i *и матрицы* B, C *определены в теореме* 3.

1. *Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O.* Weighted pseudoinverses with singular weights // SIAM J. Appl. Math. – 1971. – **21**, № 3. – P. 480 – 482.
2. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. 2. Вырожденные веса // Кибернетика и систем. анализ. – 2008. – № 3. – С. 75 – 102.
3. *Галба Е. Ф.* Взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1323 – 1327.
4. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и регуляризация задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – **44**, № 11. – С. 1928 – 1946.
5. *Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С.* Разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения и итерационные методы // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1269 – 1290.
6. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2007. – **47**, № 5. – С. 747 – 766.
7. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами // Там же. – 2009. – **49**, № 8. – С. 1347 – 1363.
8. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – **26**. – P. 394 – 395.
9. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. – **51**, № 3. – P. 406 – 413.
10. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 223 с.
11. *Галба Е. Ф., Молчанов И. Н., Скопецкий В. В.* Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 5. – С. 150 – 169.
12. *Галба Е. Ф.* Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, № 6. – С. 882 – 896.
13. *Lancaster P., Rozsa P.* Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. angew. Math. und Mech. – 1984. – **64**, № 9. – S. 439 – 441.
14. *Икрамов Х. Д.* Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1992. – **32**, № 8. – С. 155 – 169.
15. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
16. *Decell H. P.* An applcation of the Cayley – Hamilton theorem to generalized matrix inversion // SIAM Rev. – 1965. – **7**, № 4. – P. 526 – 528.
17. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
18. *Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2005. – **45**, № 10. – С. 1731 – 1755.

Получено 27.05.10