УДК 512.554

С. И. Клипков (Главный информационно-вычислительный центр НЭК „Укрэнерго”, Киев)

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ РАНГА ДВА НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

By using the introduced notion of a parameter of hypercomplex numerical system, we propose a new approach to the construction of a hypercomplex numerical systems of rank two over a field of complex numbers. We show that quadroplex (bicomplex) numbers and quaternions can be considered as a special cases of the universal system of hypercomplex numbers that correspond to some values of the mentioned parameter. We consider principal algebraic characteristics of the universal system of hypercomplex numbers. We also present examples of possible applications of numbers of universal hypercomplex system to certain values of the introduced parameter.

На основі введеного поняття – параметра гіперкомплексної числової системи – запропоновано новий підхід до побудови гіперкомплексних числових систем рангу два над полем комплексних чисел. Показано, що квадриплексні (бікомплексні) числа і кватерніони можна розглядати як окремі випадки універсальної системи гіперкомплексних чисел, які відповідають певним значенням зазначеного параметра. Розглянуто основні алгебраїчні властивості універсальної системи гіперкомплексних чисел. Наведено приклади, які ілюструють можливість застосування чисел універсальної гіперкомплексної системи для ряду значень введеного параметра.

В настоящее время известны две системы гиперкомплексных чисел, конструируемые комплексным удвоением комплексных чисел. В данном случае термин „комплексное удвоение” означает, что вводимая вторая мнимая единица j, как и первая i, удовлетворяет соотношению $j^2 = -1$, в отличие от существующего в математике двойного удвоения $j^2 = 1$ или дуального $j^2 = 0$ [1, 2]. Коммутативное комплексное удвоение приводит к алгебре квадриплексных чисел [2, 3], которые в математической литературе называют также бикомплексными числами или пространственными комплексными числами. Квадриплексные числа, сохраняя присущее комплексным числам свойство коммутативности умножения, не являются алгебраическим расширением поля комплексных чисел, так как не удовлетворяют аксиомам поля (имеют делители нуля). Некоммутативное комплексное удвоение образует алгебру кватернионов [1, 2], которая является алгеброй с делением (удовлетворяет аксиомам поля) и, таким образом, представляет собой единственное алгебраическое расширение поля комплексных чисел.

Сложение квадриплексных чисел и кватернионов, представленных в виде комплексных составляющих, осуществляется по обычному закону

$$(\dot{A} + \dot{B}j) + (\dot{C} + \dot{D}j) = (\dot{A} + \dot{C}) + (\dot{B} + \dot{D})j. \tag{1}$$

По обычному закону умножаются также квадриплексные числа, представленные комплексными составляющими, что с учетом соотношения $j^2 = -1$ приводит к формуле [2]

$$(\dot{A} + \dot{B}j)(\dot{C} + \dot{D}j) = \dot{A}\dot{C} - \dot{B}\dot{D} + (\dot{A}\dot{D} + \dot{B}\dot{C})j. \tag{2}$$

Закон умножения кватернионов в комплексных составляющих отличается от правила умножения квадриплексных чисел [1, 2]

$$(\dot{A} + \dot{B}j)(\dot{C} + \dot{D}j) = \dot{A}\dot{C} - \dot{B}\hat{D} + (\dot{A}\dot{D} + \dot{B}\hat{C})j. \tag{3}$$

Появление в произведении кватернионов (3) сопряженных комплексных чисел $\hat{D}$ и $\hat{C}$ обусловлено некоммутативностью кватернионов. Поскольку для кватернионов некоммутативность определяется соотношением

$$ji = -ij, \tag{4}$$

то $j\dot{D} = \hat{D}j$ и $j\dot{C} = \hat{C}j$.

Законы умножения квадриплексных чисел (2) и кватернионов (3) можно записать в виде одного параметрического выражения

$$(\dot{A} + \dot{B}j)(\dot{C} + \dot{D}j) = \dot{A}\dot{C} - \dot{B}\dot{D}e^{-i2\dot{k}\alpha_D} + (\dot{A}\dot{D} + \dot{B}\dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C})j, \tag{5}$$

где $\alpha_D = \operatorname{arctg}\dfrac{D''}{D'}$ — угол комплексного числа $\dot{D} = D' + D''i$, $\alpha_C = \operatorname{arctg}\dfrac{C''}{C'}$ — угол комплексного числа $\dot{C} = C' + C''i$, $\dot{k} = k' + k''i$ — комплексный параметр, который в случае квадриплексных чисел равен комплексному нулю ($\dot{0} = 0 + 0i$), а в случае кватернионов — комплексной единице ($\dot{1} = 1 + 0i$). При других значениях введенного параметра $\dot{k} \in \mathbf{C}$ выражение (5) может рассматриваться как закон умножения элементов более общей системы гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$, которую в дальнейшем будем называть универсальной и для которой условие некоммутативности имеет более сложный вид, чем (4). Действительно, из выражения (5) следует $j\dot{D} = \dot{D}e^{-i2\dot{k}\alpha_D}j$ и $j\dot{C} = \dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C}j$. Поэтому перемещение мнимой единицы j относительно любого комплексного числа $\dot{G}$ при выполнении рассматриваемой операции умножения (5) определяется соотношением

$$ji = \dot{R}_G ij = (R'_G + R''_G i)ij, \tag{6}$$

где

$$R'_G = \frac{e^{2k''\alpha_G}\left[G''\cos(2k'\alpha_G) - G'\sin(2k'\alpha_G)\right]}{G''},$$

$$R''_G = -\frac{e^{2k''\alpha_G}\left[G'\cos(2k'\alpha_G) + G''\sin(2k'\alpha_G)\right] - G'}{G''}.$$

В приведенных выше выражениях нижний индекс отражает их связь с комплексным числом $\dot{G}$. Таким образом, в рамках рассматриваемой универсальной системы гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$ некоммутативность описывается более общим соотношением (6) и зависит от действительных составляющих комплексного параметра $\dot{k}$ гиперкомплексной системы $\mathbf{H}$ и действительных составляющих комплексного числа, относительно которого перемещается мнимая единица j. Легко проверить, что из выражения (6) следуют коммутативность квадриплексных чисел и условие некоммутативности (4) для кватернионов. Поэтому с точки зрения операций сложения (1), умножения (5), а также выражения (6), описывающего некоммутативность, квадриплексные числа ($\dot{k} = \dot{0}$) и кватернионы ($\dot{k} = \dot{1}$) можно рассматривать как частные случаи предложенной универсальной системы гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$, которая представляет собой алгебру ранга два над полем комплексных чисел и для которой, в общем случае, введенный параметр $\dot{k}$ может принимать любые комплексные значения $\dot{k} \in \mathbf{C}$.

Выражение (6) позволяет также рассматривать предлагаемую универсальную систему гиперкомплексных чисел как алгебру ранга четыре над полем действительных чисел. При этом в качестве базисных элементов, как и при представлении квадриплексных чисел [2], целесообразно использовать единицы $1, i, j$ и ij. Тогда закон умножения (5) в действительных составляющих может быть представлен в виде таблицы.

	C'	$C''i$	$D'j$	$D''ij$
A'	$A'C'$	$A'C''i$	$A'D'j$	$A'D''ij$
$A''i$	$A''C'i$	$-A''C''$	$A''D'ij$	$-A''D'j$
$B'j$	$B'C'j$	$B'C''(R'_C + R''_C i)\,ij$	$-B'D'$	$B'D''(R''_D - R'_D i)$
$B''ij$	$B''C'ij$	$B''C''(-R''_C + R'_C i)\,ij$	$-B''D'i$	$B''D''(R'_D + R''_D i)$

Как следует из таблицы, комбинации базисных элементов ji, jij, iji и $ijij$, содержащие произведение ji, представлены с учетом (6). Поскольку для квадриплексных чисел $R'_C = R'_D = 1$, $R''_C = R''_D = 0$, а для кватернионов $R'_C = R'_D = -1$, $R''_C = R''_D = 0$, при подстановке указанных значений рассматриваемая таблица принимает вид таблиц умножения соответствующих числовых систем [2].

При значениях параметра $\dot{k}$, отличных от $\dot{0}$ и $\dot{1}$, продуцируемые гиперкомплексные числовые системы представляют собой некоммутативные неассоциативные алгебры, не удовлетворяющие в полной мере аксиомам кольца. Тем не менее, прикладное значение таких алгебр для ряда действительных значений рассматриваемого параметра ($\dot{k} = k' + 0i$) приведено в [4]. В этой же работе показана связь между появлением гиперкомплексных решений таких алгебр и матрицей первого приближения, построенной с использованием понятия псевдопроизводной, для систем нелинейных комплексных уравнений, содержащих нелинейные комбинации прямых и сопряженных комплексных неизвестных.

Рассмотрим основные свойства предлагаемой универсальной системы гиперкомплексных чисел $\mathbf{H}$ с точки зрения аксиом кольца.

1. Число $\overleftrightarrow{0} = (\dot{0} + \dot{0}j) \in \mathbf{H}$ является нулем $\mathbf{H}$.

2. $\mathbf{H}$ является коммутативной группой относительно сложения. Поэтому для $\overleftrightarrow{A}$, $\overleftrightarrow{B}$, $\overleftrightarrow{C} \in \mathbf{H}$ выполняются следующие соотношения: $\overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{B} + \overleftrightarrow{A}$, $\overleftrightarrow{A} + (\overleftrightarrow{B} + \overleftrightarrow{C}) = (\overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{B}) + \overleftrightarrow{C}$, $\overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{0} = \overleftrightarrow{A}$, $\overleftrightarrow{A} - \overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{0}$, что следует непосредственно из (1).

3. Произведение $\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{B}$ замкнуто по отношению к умножению (5).

4. В общем случае $\dot{k} \neq \dot{0}$, $\dot{k} \neq \dot{1}$ для умножения не выполняется ассоциативный закон $\overleftrightarrow{A}(\overleftrightarrow{B}\overleftrightarrow{C}) \neq (\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{B})\overleftrightarrow{C}$.

5. Число $\overleftrightarrow{1} = (\dot{1} + \dot{0}j) \in \mathbf{H}$ со значением угла комплексной единицы $\alpha_1 = 0$ является левой и правой единицей. Поэтому $\overleftrightarrow{1}\overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{A}$ и $\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{1} = \overleftrightarrow{A}$, что следует непосредственно из (5).

6. Выполняются соотношения $\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{0} = \overleftrightarrow{0}\overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{0}$ для любого элемента $\overleftrightarrow{A} \in \mathbf{H}$.

7. Выполняется один из дистрибутивных законов $(\overleftrightarrow{B} + \overleftrightarrow{C})\overleftrightarrow{A} = (\overleftrightarrow{B}\overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{C}\overleftrightarrow{A})$, но $\overleftrightarrow{A}(\overleftrightarrow{B} + \overleftrightarrow{C}) \neq (\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{B} + \overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{C})$.

8. Для элементов **H**, которые не являются правыми делителями нуля, существуют левые обратные элементы.

Выражение для левого обратного элемента можно в общем случае определить из выражения (5). Действительно, универсальное гиперкомплексное число $\overleftrightarrow{A} = \dot{A} + \dot{B}j$ будет обратным к универсальному гиперкомплексному числу $\overleftrightarrow{B} = \dot{C} + \dot{D}j$, если удовлетворяется система комплексных уравнений

$$\dot{A}\dot{C} - \dot{B}\dot{D}e^{-i2\dot{k}\alpha_D} = \dot{1}, \tag{7}$$

$$\dot{A}\dot{D} + \dot{B}\dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C} = \dot{0}. \tag{8}$$

Решение указанной системы уравнений приводит к следующим выражениям для комплексных составляющих левого обратного элемента:

$$\dot{A} = \frac{\dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C}}{\dot{C}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_C} + \dot{D}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_D}}, \tag{9}$$

$$\dot{B} = \frac{-\dot{D}}{\dot{C}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_C} + \dot{D}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_D}}. \tag{10}$$

Отметим, что при значении параметра $\dot{k} = \dot{0}$ гиперкомплексной системы выражения (9), (10) приводят к комплексным составляющим обратного элемента квадриплексного числа [2]

$$\dot{A} = \frac{\dot{C}}{\dot{C}^2 + \dot{D}^2}, \tag{11}$$

$$\dot{B} = \frac{-\dot{D}}{\dot{C}^2 + \dot{D}^2}, \tag{12}$$

а при значении $\dot{k} = \dot{1}$ непосредственно следуют известные выражения для обратного элемента кватерниона

$$\dot{A} = \frac{\hat{C}}{\dot{C}\hat{C} + \dot{D}\hat{D}}, \tag{13}$$

$$\dot{B} = \frac{-\dot{D}}{\dot{C}\hat{C} + \dot{D}\hat{D}}, \tag{14}$$

так как числители выражений (13), (14) представляют собой комплексные составляющие сопряженного кватерниона, а их знаменатель является квадратом модуля кватерниона.

Для определения делителей нуля универсальной системы гиперкомплексных чисел **H** рассмотрим систему уравнений

$$\dot{A}\dot{C} - \dot{B}\dot{D}e^{-i2\dot{k}\alpha_D} = \dot{0}, \tag{15}$$

$$\dot{A}\dot{D} + \dot{B}\dot{C}e^{-i2\dot{k}\alpha_C} = \dot{0}. \tag{16}$$

Решение указанной системы относительно комплексных составляющих $\dot{C}$, $\dot{D}$

правого множителя $\overleftrightarrow{B} \in \mathbf{H}$ при условиях $\dot{A} \neq \dot{0}$, $\dot{B} \neq \dot{0}$ приводит к уравнению

$$\dot{C}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_C} + \dot{D}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_D} = \dot{0}, \tag{17}$$

которое позволяет установить соотношения между углами α_C, α_D и модулями C, D комплексных составляющих $\dot{C}$, $\dot{D}$, определяющие правые делители нуля:

$$\alpha_C = \alpha_D + \Delta\alpha, \tag{18}$$

$$C = De^{-k''\Delta\alpha}, \tag{19}$$

где $\Delta\alpha$ — необходимая для выполнения рассматриваемого условия разность между углами α_C и α_D, которая вычисляется по формуле

$$\Delta\alpha = \pm\frac{\pi}{2(1 - k')}. \tag{20}$$

Отметим, что уравнение (17) соответствует равенству нулю знаменателя выражений (9), (10) для определения левого обратного элемента, из чего следует, что правые делители нуля не имеют левых обратных элементов.

Теперь из системы уравнений (15), (16) определим выражения для левых делителей нуля. Относительно составляющих $\dot{A}$, $\dot{B}$ указанная система приводится к уравнению

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 e^{-i2\dot{k}(\alpha_C + \alpha_D)} = \dot{0}, \tag{21}$$

из которого можно получить соотношения между углами α_A, α_B и модулями A, B комплексных составляющих $\dot{A}$, $\dot{B}$ гиперкомплексного числа $\overleftrightarrow{A} \in \mathbf{H}$, определяющие левые делители нуля:

$$\alpha_A = \alpha_B \mp \frac{\pi}{2} - k'(\alpha_C + \alpha_D), \tag{22}$$

$$A = Be^{k''(\alpha_C + \alpha_D)}. \tag{23}$$

Отметим противоположный характер использования знаков + и − в выражениях (20) и (22).

Таким образом, если для некоторого числа универсальной гиперкомплексной системы $\overleftrightarrow{B} \in \mathbf{H}$ не удовлетворяются соотношения (18), (19), т. е. это число не является правым делителем нуля, то для данного числа существует левый обратный элемент, комплексные составляющие которого вычисляются по формулам (9), (10). Если же некоторое число $\overleftrightarrow{B} \in \mathbf{H}$ представляет собой правый делитель нуля, то в этом случае для него всегда можно определить число $\overleftrightarrow{A} \in \mathbf{H}$, являющееся левым делителем нуля, использовав соотношения (22), (23). При этом $\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{0}$. Отметим, что в общем случае левые делители нуля зависят от углов комплексных составляющих правых делителей нуля.

Для квадриплексных чисел ($\dot{k} = \dot{0}$) соотношения (18), (19) между углами и модулями комплексных составляющих гиперкомплексного числа $\overleftrightarrow{B}$, определяющие его принадлежность к правым делителям нуля, и соотношения (22), (23) между углами и модулями комплексных составляющих гиперкомплексного числа $\overleftrightarrow{A}$, определяющие его принадлежность к левым делителям нуля, соответственно принимают вид $\alpha_C = \alpha_D \pm \frac{\pi}{2}$, $C = D$ и $\alpha_A = \alpha_B \mp \frac{\pi}{2}$, $A = B$. В действительных составляющих указанные условия имеют следующий вид. Для правых делителей нуля $C' = -D''$, $C'' = D'$ или $C' = D''$, $C'' = -D'$. Для левых делителей нуля $A' = B''$, $A'' = -B'$ или $A' = -B''$, $A'' = B'$. Таким образом, в случае квадриплексных чисел также можно говорить о правых и левых делителях нуля в смысле их совместного использования. Чтобы получить квадриплексный нуль, квадриплексные делители нуля необходимо умножать следующим образом:

$$\left[(B'' - B'i) + (B' + B''i)\,j\right] \times \left[(-D'' + D'i) + (D' + D''i)\,j\right] = \overleftrightarrow{0}$$

или

$$\left[(-B'' + B'i) + (B' + B''i)\,j\right] \times \left[(D'' - D'i) + (D' + D''i)\,j\right] = \overleftrightarrow{0}.$$

Другие комбинации умножения делителей нуля приводят не к квадриплексному нулю, а к квадриплексному числу, которое в свою очередь является делителем нуля.

Отметим также, что условия неделимости квадриплексных чисел можно получить из выражений (11), (12), приравняв их знаменатель к нулю.

Как следует из выражения (20), единственной ассоциативной алгеброй, не имеющей правых делителей нуля, а следовательно, и левых, являются кватернионы ($\dot{k} = \dot{1}$), так как в этом случае $\Delta\alpha$ становится бесконечно большим числом, что вполне ожидаемо и закономерно, поскольку кватернионы являются алгеброй с делением.

Из выражений (9), (10) можно определить действительный модуль универсального гиперкомплексного числа. Для этого необходимо умножить комплексный знаменатель этих выражений на его сопряженное значение. В результате получим действительный неотрицательный полином четвертой степени

$$P_{\text{л}} = C^4 e^{4k''\alpha_C} + D^4 e^{4k''\alpha_D} +$$
$$+ 2C^2 D^2 e^{2k''(\alpha_C + \alpha_D)} \cos\left[2(1 - k')(\alpha_C - \alpha_D)\right] \geq 0. \tag{24}$$

Указанный полином можно рассматривать как четвертую степень модуля. Равенство нулю полинома (24) возможно в двух случаях, когда $\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{0}$ или $\overleftrightarrow{B}$ является правым делителем нуля, что следует из сопоставления выражений (18), (20) и (24).

Подставляя в (24) значения $\dot{k}$, соответствующие квадриплексным числам и кватернионам, получаем известные выражения для четвертой степени модуля указанных числовых систем:

для квадриплексных чисел

$$P_{\text{л}} = C'^4 + C''^4 + D'^4 + D''^4 + 2C'^2C''^2 + 2C'^2D'^2 - 2C'^2D''^2 -$$
$$- 2C''^2D'^2 + 2C''^2D''^2 + 2D'^2D''^2 + 8C'C''D'D'',$$

для кватернионов

$$P_{\text{л}} = \left(C'^2 + C''^2 + D'^2 + D''^2\right)^2.$$

Теперь рассмотрим возможность определения правых обратных элементов для каждого из элементов универсальной гиперкомплексной системы **H**. В этом случае необходимо найти комплексные составляющие $\dot{C}$, $\dot{D}$, удовлетворяющие уравнениям системы (7), (8). Как следует из указанной системы уравнений, наряду с рассматриваемыми комплексными составляющими в состав неизвестных входят также их углы, умноженные на параметр гиперкомплексной системы $\dot{k}$, что не позволяет получить аналитические выражения для определения правого обратного элемента в общем виде. Общим утверждением для всех значений параметра $\dot{k}$ в данном случае может быть только то, что правых обратных элементов не имеют элементы гиперкомплексной системы чисел $\mathbf{H}$, являющиеся левыми делителями нуля.

Это следует из того, что знаменатель выражений для комплексных составляющих $\dot{C}$, $\dot{D}$, которые можно представить в виде

$$\dot{C} = \frac{\dot{A}}{\dot{A}^2 + \dot{B}^2 e^{-i2\dot{k}(\alpha_C+\alpha_D)}}, \tag{25}$$

$$\dot{D} = \frac{-\dot{B}e^{-i2\dot{k}\alpha_C}}{\dot{A}^2 + \dot{B}^2 e^{-i2\dot{k}(\alpha_C+\alpha_D)}}, \tag{26}$$

соответствует левой части уравнения (21).

Из формул (25), (26) можно получить еще одно выражение для действительного модуля гиперкомплексного числа, связанного с вычислением правых обратных элементов. Умножая знаменатель указанных формул на его сопряженное значение, получаем неотрицательный полином

$$P_{\text{п}} = A^4 + B^4 e^{4k''(\alpha_C+\alpha_D)} +$$

$$+ 2A^2B^2e^{2k''(\alpha_C+\alpha_D)}\cos\left\{2\left[(\alpha_A - \alpha_B) + k'(\alpha_C + \alpha_D)\right]\right\} \geq 0. \tag{27}$$

Приведенный полином также можно рассматривать как четвертую степень модуля. Равенство нулю полинома (27) возможно в двух случаях: когда $\overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{0}$ или $\overleftrightarrow{A}$ является левым делителем нуля, что следует из сопоставления выражений (22) и (27). Отметим, что для квадриплексных чисел и кватернионов значения полиномов $P_{\text{л}}$ и $P_{\text{п}}$, а следовательно, и соответствующих им модулей совпадают. Что касается гиперкомплексных числовых систем с другими значениями параметра $\dot{k}$, то для них значения левого и правого модуля отличаются между собой.

Поскольку в общем случае получить выражения для правого обратного элемента не представляется возможным, в качестве примера рассмотрим как вычисляются правые обратные элементы при значении параметра $\dot{k} = 0{,}5 + 0i$ гиперкомплексной системы. Отметим, что при указанном значении параметра выражение для некоммутативности (6) принимает вид

$$ji = \left(-\frac{G - G'}{G''}i\right)ij,$$

так как $R'_G = 0$, а $R''_G = -\dfrac{G - G'}{G''}$. Поэтому замена при умножении рассматриваемых гиперкомплексных чисел ji на $\left(-\dfrac{D - D'}{D''}i\right)ij$ приводит к соотношению $j\dot{D} = Dj$ для комплексного числа $\dot{D}$ и, следовательно, к соотношению $j\dot{C} = Cj$ для комплексного числа $\dot{C}$. Приведенные соотношения следуют также непосредственно из правила умножения (5). Таким образом, система уравнений для определения правых обратных элементов (7), (8) при $\dot{k} = 0{,}5 + 0i$ принимает вид

$$\dot{A}\dot{C} - \dot{B}D = \dot{1},$$

$$\dot{A}\dot{D} + \dot{B}C = \dot{0}.$$

В результате решения рассматриваемой системы уравнений получим формулы

$$\alpha_D = \pi - \alpha_A + \alpha_B,$$

$$\alpha_C = \arcsin\left[\frac{B^2}{A^2}\sin(\alpha_B)\right] - \alpha_A, \tag{28}$$

$$C = \frac{A}{A^2\cos(\alpha_A + \alpha_C) - B^2\cos(\alpha_B)}, \tag{29}$$

$$D = C\frac{B}{A}.$$

Итак, если некоторый элемент гиперкомплексной системы чисел **H** с параметром $\dot{k} = = 0{,}5 + j0$ не является левым делителем нуля, то он может иметь два правых обратных элемента, или один, или не иметь ни одного в зависимости от значения выражения под знаком arcsin в формуле (28). Как следует из указанного выражения, для того чтобы значение угла α_C было действительным, необходимо выполнение условия

$$\alpha_B \le \arcsin\left(\frac{A^2}{B^2}\right).$$

Если же рассматриваемый элемент гиперкомплексной системы чисел **H** является левым делителем нуля, то выполняется равенство $A = B$ и из (28) следует $\alpha_B = \alpha_A + \alpha_C$. Это приводит к нулевому значению знаменателя в выражении (29), что не позволяет определить модуль C комплексной составляющей $\dot{C}$ правого обратного элемента. Кроме того, в этом случае выполняются условия $\Delta\alpha = \pi$ и $\alpha_A = \alpha_B - \frac{\pi}{2} - 0{,}5(\alpha_C + \alpha_D)$, следующие из соотношений (20), (22) между углами комплексных составляющих для правого и левого делителей нуля, соответствующих рассматриваемому параметру $\dot{k} = 0{,}5 + 0i$ гиперкомплексной системы.

В заключение рассмотрим в качестве примера возможные гиперкомплексные решения $\overleftrightarrow{X} = \dot{X} + \dot{Y}j$ обычного квадратного уравнения с комплексными коэффициентами

$$\overleftrightarrow{X}\overleftrightarrow{X} + \dot{A}\overleftrightarrow{X} + \dot{B} = \dot{0}. \tag{30}$$

Гиперкомплексное уравнение (30) можно рассматривать как систему двух комплексных уравнений

$$\dot{X}^2 - \dot{Y}^2 e^{-i2\dot{k}\alpha_Y} + \dot{A}\dot{X} + \dot{B} = \dot{0}, \tag{31}$$

$$\dot{Y}\left(\dot{X} + \dot{X}e^{-i2\dot{k}\alpha_X} + \dot{A}\right) = \dot{0}. \tag{32}$$

Как следует из уравнения (32), решения рассматриваемой системы можно разделить на две части. Первые два решения соответствуют условию $\dot{Y} = \dot{0}$. В этом случае система уравнений преобразуется в обычное приведенное уравнение с комплексными коэффициентами, тривиальными решениями которого являются два комплексных числа

$$\dot{X}_{1,2} = -\frac{\dot{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{\dot{A}^2}{4} - \dot{B}}\,. \tag{33}$$

Вторая часть решений связана с условием

$$\dot{X} + \dot{X}e^{-i2\dot{k}\alpha_X} + \dot{A} = \dot{0}\,. \tag{34}$$

Рассмотрим эти решения для ряда значений параметра $\dot{k}$.

1. $\dot{k} = \dot{0}$ (квадриплексные числа). В этом случае из уравнения (34) получаем $\dot{X} = -\frac{\dot{A}}{2}$, а из уравнения (31) — $\dot{Y}_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{\dot{A}^2}{4} + \dot{B}}$. Таким образом, квадратное уравнение с комплексными коэффициентами наряду с двумя комплексными решениями (33) имеет два квадриплексных решения

$$\overset{\leftrightarrow}{X}_{1,2} = -\frac{\dot{A}}{2} \pm \left(\sqrt{-\frac{\dot{A}^2}{4} + \dot{B}}\right) j\,.$$

2. $\dot{k} = \dot{1}$ (кватернионы). Для кватернионов уравнение (34) преобразуется к виду

$$\dot{X} + \hat{X} + \dot{A} = \dot{0}\,,$$

причем его решение требует, чтобы коэффициент $\dot{A}$ был действительным числом. Следовательно, при комплексном значении $\dot{A}$ кватернионы имеют только два комплексных решения (33), что вполне объяснимо, так как кватернионы являются единственным расширением поля комплексных чисел и, следовательно, не могут давать дополнительных решений. Если же рассматривать коэффициент $\dot{A}$ как действительный ($\dot{A} = A' + 0i$), то в этом случае $X' = -\frac{A'}{2}$, а из (31) следует, что коэффициент $\dot{B}$ также должен быть действительным. В результате приходим к квадратному уравнению с действительными коэффициентами, для которого значения остальных составляющих кватерниона определяются соотношением

$$X''^2 + Y'^2 + Y''^2 = -\frac{A'^2}{4} + B'\,. \tag{35}$$

Поскольку левая часть уравнения (35) является неотрицательным числом, при отрицательном значении правой части, что соответствует двум действительным корням рассматриваемого квадратного уравнения, кватернионных решений не существует. Правда, в данном случае можно говорить о бикватернионных решениях. Если же правая часть уравнения является положительной, то квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет бесконечное множество кватернионных решений, что обусловлено неоднозначностью кватернионов с точки зрения их вырождения в комплексные числа.

3. $\dot{k} = 0{,}5 + 0i$. Эта алгебра рассматривалась выше в качестве примера для определения правых обратных элементов. В этом случае уравнение (34) преобразуется к виду

$$\dot{X} + X + \dot{A} = \dot{0} \tag{36}$$

и имеет одно решение при условии $\cos\alpha_A < 0$, что соответствует двум диапазонам углов $-\frac{3\pi}{2} < \alpha_A < -\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha_A < \frac{3\pi}{2}$. Если выполняются указанные условия, то решением уравнения (36) являются значения $\alpha_X = 2\alpha_A$, $X = -\frac{A}{2\cos\alpha_A}$. Поскольку из уравнения (31) следует соотношение

$$\dot{Y}Y = \dot{X}^2 + \dot{A}\dot{X} + \dot{B}, \tag{37}$$

то $Y = \sqrt{D}$, а $\alpha_Y = \alpha_D$, где D и α_D — соответственно модуль и угол комплексного числа $\dot{D} = \dot{X}^2 + \dot{A}\dot{X} + \dot{B}$ в правой части соотношения (37).

4. $\dot{k} = 0 + i$. Для этой алгебры уравнение (34) преобразуется к виду

$$\dot{X} + \dot{X}e^{2k''\alpha_X} + \dot{A} = \dot{0}$$

и имеет два решения $\alpha_{X1,2} = \alpha_A \pm \pi$, $X = \frac{A}{e^{2k''\alpha_X} + 1}$. Учитывая, что для рассматриваемого случая из уравнения (31) следует соотношение

$$\dot{Y}^2 e^{2k''\alpha_Y} = \dot{X}^2 + \dot{A}\dot{X} + \dot{B}, \tag{38}$$

получаем $\alpha_Y = \frac{\alpha_D}{2}$, $Y = \sqrt{\frac{D}{e^{2k''\alpha_Y}}}$, где D и α_D — соответственно модуль и угол комплексного числа $\dot{D} = \dot{X}^2 + \dot{A}\dot{X} + \dot{B}$ в правой части соотношения (38).

1. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. – М.: Мир, 1984. – 144 с.
2. *Синьков М. В., Губарени Н. М.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 138 с.
3. *Люш В. В.* Теория функций триплексного переменного. – Л.: Ленингр. кораблестроит. ин-т, 1936. – 164 с.
4. *Клипков С. И.* К вопросу математического моделирования предельных режимов электрических систем переменного тока // Электрические сети и системы. – 2009. – № 5. – С. 36 – 46.

Получено 02.03.10