УДК 517.9

В. Д. Кошманенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

КВАЗІТОЧКОВІ СПЕКТРАЛЬНІ МІРИ В ТЕОРІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ КОНФЛІКТУ

In the framework of dynamical picture of interacting physical systems, the notion of a spectral measure with quasipoint spectrum is introduced. It is shown that, under conflict interaction with point measures, only quasipoint singularly continuous measures are admitted for the transformation into measures with purely point spectrum.

В контексте динамической картины взаимодействующих физических систем введено понятие спектральной меры с квазиточечным спектром. Показано, что при конфликтном взаимодействии с точечными мерами только квазиточечные сингулярно непрерывные спектральные меры могут трансформироваться в меры с чисто точечным спектром.

1. Вступ. Нехай A, B позначають гамільтоніани (оператори енергії) двох конфліктно взаємодіючих фізичних систем у фіксованому гільбертовому просторі станів $\mathcal{H}$. Розглянемо спектральні міри самоспряжених операторів A, B у припущенні, що вони мають спільний циклічний вектор $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\mu(\Delta) := (E^A(\Delta)\psi, \psi)_{\mathcal{H}}, \quad \nu(\Delta) := (E^B(\Delta)\psi, \psi)_{\mathcal{H}},$$

де E^A, E^B — відповідні розклади одиниці операторів A, B, Δ — борелівські множини.

Конфліктна взаємодія між фізичними системами відбувається в моменти дискретного часу $t \equiv N = 0, 1, 2, \ldots$ і приводить до трансформації початкової пари операторів у послідовність інших самоспряжених операторів A^N, B^N. Математично це записуємо відображенням

$$\{A^N,\ B^N\} \xrightarrow{\divideontimes} \{A^{N+1},\ B^{N+1}\}, \quad A^0 = A, \quad B^0 = B,$$

де A^N, B^N позначають оператори енергії в момент $t = N$. Відображення $\divideontimes$ породжує динамічну систему (конфлікту) в термінах відповідних спектральних мір:

$$\{\mu^N, \nu^N\} \xrightarrow{\divideontimes} \{\mu^{N+1}, \nu^{N+1}\}, \quad \mu^0 = \mu, \quad \nu^0 = \nu.$$

Дія перетворення $\divideontimes$ (композиції конфлікту) взагалі невідома і будується виходячи з конкретної задачі чи моделі. В п. 3 ми визначаємо перетворення $\divideontimes$ в термінах мір, ґрунтуючись на відомих математичних моделях опису конфліктних процесів, на аналогах дискретних варіантів систем рівнянь Лотки – Вольтерра та моделях теорії ігор (див., наприклад, [1 – 11].

На міри μ, ν накладено умову структурної подібності (означення див. у роботах [12, 13]). Ця умова приводить до узагальнення поняття самоподібності, яке в математичному контексті було введене Хатчинсоном [14]. По суті, властивість структурної подібності мір випливає з того, що ці міри є образ-мірами нескінченних прямих добутків послідовностей дискретних мір (див. [15]), які вивчалися ще в роботі Какутні [16].

Внаслідок цієї умови кожна структурно-подібна міра має лише одну компоненту в лебеговому розкладі: або чисто абсолютно неперервну, або чисто точкову, або чисто сингулярно неперервну.

В процесі конфліктної еволюції

$$\{\mu^0,\nu^0\} \xrightarrow{*} \{\mu^1,\nu^1\} \xrightarrow{*} \ldots \xrightarrow{*} \{\mu^N,\nu^N\} \xrightarrow{*} \ldots \xrightarrow{*} \{\mu^\infty,\nu^\infty\}$$

спектральний тип мір, взагалі кажучи, змінюється. Як правило, граничні міри μ^∞, ν^∞ є сингулярно неперервними незалежно від типу початкових мір μ, ν. Задача про існування граничних інваріантних мір μ^∞, ν^∞ розв'язується окремо.

Але існують (екзотичні) випадки, коли одна з граничних мір, скажімо μ^∞, є чисто точковою, $\mu^\infty = \mu^\infty_{\rm pp}$. Так, у роботі [12] доведено, що чисто сингулярно неперервна міра $\mu \in \mathcal{M}_{\rm sc}$ при конфліктній взаємодії з іншою сингулярно неперервною мірою ν може трансформуватися в чисто точкову, $\{\mu,\nu\} \xrightarrow{*,\infty} \{\mu^\infty,\nu^\infty\}$, $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\rm pp}$, при певних досить сильних умовах. Ці умови формулюються як існування напрямку шокового пріоритету (однієї міри над іншою).

Взагалі, з точки зору задач математичної фізики явище, коли якась взаємодія між сингулярно неперервними спектральними мірами приводить до виникнення міри з точковим носієм (= спектром), є надзвичайно цікавим ефектом і заслуговує на глибокий аналіз.

У роботі досліджується наступне питання. Чи може виникнути чисто точкова спектральна міра при конфліктній взаємодії операторів енергії, один з яких має чисто сингулярно неперервну спектральну міру, а другий чисто точкову? Іншими словами, чи існують структурно-подібні міри $\mu_{\rm sc}$, $\nu_{\rm pp}$ такі, що виконується рівність

$$\mu_{\rm sc} \overset{\infty}{*} \nu_{\rm pp} = \mu^\infty_{\rm pp}?$$

Тобто, чи може сингулярно неперервна міра трансформуватися в точкову при конфліктній взаємодії з якоюсь точковою мірою? На перший погляд це здається неможливим, виходячи з аналізу топологічної структури носіїв сингулярно неперервних та чисто точкових мір (див. [17]).

У цій роботі введено поняття (сингулярної) квазіточкової спектральної міри. Основний результат стверджує, що для пари структурно-подібних мір $\mu = \mu_{\rm sc}$, $\nu = \nu_{\rm pp}$ гранична міра належить до класу чисто точкових мір, $\mu^\infty := \mu \overset{\infty}{*} \nu \in \mathcal{M}_{\rm pp}$, тоді і лише тоді, коли міра μ є квазіточковою.

2. Структурно-подібні квазіточкові міри. Далі будемо розглядати лише ймовірнісні міри на відрізку $\Delta_0 = [0,1]$.

Поняття структурно-подібної міри введено в роботах [12, 13]. Далі наведено деякий опис таких мір. Але одразу зазначимо, що ці міри утворюють значно ширший клас, ніж відомі самоподібні міри (див. [14], а також [18, 19]).

Усю множину структурно-подібних мір позначаємо через $\mathcal{M}^{\rm ss}$.

Кожна міра $\mu \in \mathcal{M}^{\rm ss}$ асоційована (пов'язана) з нескінченною стохастичною матрицею

$$P \equiv \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty = \{p_{ik}\}_{i=1,\ k=1}^{n,\ \infty}, \quad n > 1. \tag{1}$$

Тому іноді пишемо $\mu = \mu_P$. Стовпчики матриці P складаються з координат стохастичних векторів $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n_+$,

$$\mathbf{p}_k = (p_{1k},\ldots,p_{nk}), \quad p_{1k},\ldots,p_{nk} \geq 0, \quad p_{1k}+\ldots+p_{nk} = 1.$$

Нехай задано деяку систему подрібнень відрізка Δ_0 на замкнені відрізки, які можуть перетинатися лише в крайніх точках:

$$\Delta_0 = [0,1] = \bigcup_{i_1=1}^{n} \Delta_{i_1}, \quad \Delta_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2}, \ldots,$$

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots,$$

$$\Delta_0 = \bigcup_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ \mathrm{diam}(\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2}$$

Якщо значення міри μ на підмножинах k-го рангу $\Delta_{i_1 \ldots i_k}$ визначаються координатами p_{ik}:

$$\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_k}) = p_{i_1 1} \ldots p_{i_k k},$$

то очевидно виконується співвідношення

$$\mu(\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}) = p_{i_k k} \cdot \mu(\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1}}), \quad \Delta_{i_0} \equiv \Delta_0,$$

яке по суті і є властивістю структурної подібності міри. Насправді ця властивість потребує уточнення і більш детального пояснення.

У фрактальній геометрії [18, 19] подрібнення відрізка задається фіксованим (скінченним) набором стисків $\{T_i\}_{i=1}^{n}$. Для введення структурно-подібної міри потрібна послідовність таких наборів. Розглянемо на $\mathbb{R}^1$ сім'ю стисків

$$T = \{T_{ik}\}_{i=1,k=1}^{n,\infty}, \quad 2 \le n < \infty, \tag{3}$$

яка має наступні властивості. Коефіцієнти стиску відділені від нуля, $0 < c \le c_{ik} <$ < 1 і для кожного $k = 1, 2, \ldots$

$$\Delta_0 = \bigcup_{i_k=1}^{n} \Delta_{i_k k}, \quad \Delta_{i_k k} := T_{i_k k}\Delta_0, \quad \lambda(\Delta_{i_k k} \bigcap \Delta_{i'_k k}) = 0, \quad i_k \ne i'_k,$$

де λ позначає міру Лебега. Тепер подрібнення (2) не є довільними, а визначаються підмножинами

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} := T_{i_1 1} \ldots T_{i_k k}\Delta_0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

які пов'язані

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} = U_{i_1 \ldots i_k, i'_k \ldots i'_1} \Delta_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}$$

перетвореннями подібності

$$U_{i_1 \ldots i_k, i'_k \ldots i'_1} := T_{i_1 1} \ldots T_{i_k k}(T_{i'_1 1} \ldots T_{i'_k k})^{-1}, \quad 1 \le i_k, \quad i'_k \le n.$$

Наступне твердження еквівалентне означенню структурно-подібної міри. Міра μ належить $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ тоді і лише тоді, коли існують сім'я стисків T та стохастична матриця P (див. (3), (1)) такі, що

$$\mu(S_{i_1\ldots i_k}) = p_{i_1 1}\ldots p_{i_k k}, \tag{5}$$

де

$$S_{i_1\ldots i_k} := (T_{i_1 1}\ldots T_{i_k k}\Delta_0^{\#})\bigcap S_\mu, \quad S_\mu \equiv \operatorname{supp}\mu, \tag{6}$$

$\#$ позначає можливе видалення з Δ_0 однієї з крайніх точок (докладніше див. [13]). З (5), (6) випливає подібність структурних підмножин носія міри μ кожного фіксованого рангу $k = 1, 2\ldots$:

$$S_{i_1 i_2\ldots i_k} = U_{i_1\ldots i_k, i'_k\ldots i'_1} S_{i'_1 i'_2\ldots i'_k}, \tag{7}$$

а також рівність

$$\mu(S_{i_1\ldots i_k}) = p_{i_k k}\cdot\mu(S_{i_1\ldots i_{k-1}}), \ldots. \tag{8}$$

Зрозуміло, що для довільної міри співвідношення (7), (8), взагалі кажучи, не виконуються. Варто пояснити також, що при побудові міри μ за наперед заданими T і P властивість структурної подібності (7) потрібно доводити. Ця властивість з'являється внаслідок рівномірної апроксимації міри μ послідовністю кусково-рівномірно розподілених мір,

$$\mu = \lim_{k\to\infty}\mu_k,$$

де μ_k повністю визначається лише своїми значеннями на відрізках k-го рангу:

$$\mu_k(\Delta_{i_1\ldots i_k}) = p_{i_1 1}\ldots p_{i_k k}.$$

Якщо ввести тепер структурні підмножини носія міри μ_k:

$$S^k_{i_1\ldots i_l} := (T_{i_1 1}\ldots T_{i_l l}\Delta_0)\bigcap S_{\mu_k}, \quad S_{\mu_k} \equiv \operatorname{supp}\mu_k, \quad l \leq k,$$

то за побудовою вони очевидно будуть подібними (оскільки складаються з відрізків)

$$S^k_{i_1 i_2\ldots i_l} = U_{i_1\ldots i_l, i'_l\ldots i'_1} S^k_{i'_1 i'_2\ldots i'_l}, \quad l \leq k.$$

Ця властивість зберігається при граничному переході при $k\to\infty$.

Варто зауважити, що на відміну від випадку самоподібних мір носій структурно-подібної міри розкладається на подібні між собою підмножини лише на кожному k-му рівні подрібнення. Структурні підмножини різних рангів, взагалі кажучи, не є подібними.

Структурно-подібні міри можна ввести іншим чином. Вони є образ-мірами нескінченних прямих добутків дискретних мір (див., наприклад, [15, 16, 20]). Розглянемо ймовірнісний простір

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu^*) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathcal{A}_k, m_k),$$

де

$$(\Omega_k, \mathcal{A}_k, m_k), \quad \Omega_k = \{\omega_{i_k}\}_{i_k=1}^n, \quad m_k(\omega_{i_k}) = p_{i_k k} \geq 0,$$

— послідовність дискретних ймовірнісних просторів. Очевидно, що міра μ^* однозначно пов'язана із стохастичною матрицею P. Зокрема, на циліндричних множинах $\Omega_{i_1 \ldots i_k} := \omega_{i_1} \times \ldots \times \omega_{i_k} \times \prod_{l=1}^{\infty} \Omega_{k+l}$ ця міра задається добутками елементів матриці P:

$$\mu^*(\Omega_{i_1 \ldots i_k}) = \prod_{s=1}^{k} p_{i_s s}. \tag{9}$$

Якщо на відрізку $[0, 1]$ задано деяке подрібнення вигляду (2), пов'язане з фіксованою сім'єю стисків (3), то відображення

$$\pi \colon \Omega \ni \omega^* = \{\omega_{i_1} \times \omega_{i_2} \times \ldots \times \omega_{i_k} \times \ldots\} \to x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} \in \Delta_0$$

визначає на Δ_0 образ-міру μ_P:

$$\mu_P = \pi^{-1}\mu^*, \quad \mu(B) := \mu^*(\pi^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}. \tag{10}$$

В [20] показано, що образ-міра μ_P є структурно-подібною.

В [21] (див. також [22, 23]) показано, що носій образ-міри містить лише одну компоненту в розкладі Лебега. Цей результат є справедливим і для структурно-подібних мір.

Позначимо через $\mathcal{M}_{\mathrm{pp}}, \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}, \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$ класи чисто точкових, абсолютно неперервних та сингулярно неперервних мір відповідно.

Нехай задано структурно-подібну міру $\mu = \mu_P$, асоційовану із стохастичною матрицею P та сім'єю стисків T. Введемо числа

$$P_{\max}(\mu) := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\}, \quad \rho(\mu, T) := \prod_{k=1}^{\infty} (\Sigma_{i=1}^{n} \sqrt{p_{ik} c_{ik}}).$$

Теорема 1 [22, 23]. *Кожна структурно-подібна міра $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ має чистий спектральний тип*:

a) $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, *лише якщо* $P_{\max}(\mu) > 0$,

b) $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$, *лише якщо* $\rho(\mu, T) > 0$,

c) $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$, *лише якщо* $P_{\max}(\mu) = 0$ *та* $\rho(\mu, T) = 0$.

Дамо означення квазіточкової спектральної міри.

Послідовність невід'ємних чисел $0 \le x_k \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$, називаємо 0- або 1-збіжною, якщо $\sum_k x_k < \infty$ або, відповідно, $\sum_k (1 - x_k) < \infty$.

Досліджуємо структуру фіксованої стохастичної матриці P. З цією метою розглядаємо різні послідовності її елементів $\{p_{i_k k}\}_{k=1}^{\infty}$. Відповідно до наведеного вище означення послідовність $p_{i_k k}$ називаємо 0-*збіжною*, якщо $p_{i_k k} \to 0$, $k \to \infty$ настільки швидко (позначаємо $p_{i_k k} \downarrow 0$), що

$$\sum_k p_{i_k k} < \infty. \tag{11}$$

В іншому випадку послідовність $p_{i_k k}$ називаємо 1-*збіжною* (позначаємо $p_{i_k k} \uparrow 1$), якщо

$$\sum_k (1 - p_{i_k k}) < \infty. \tag{12}$$

Пару послідовностей $\{p_{i_k k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{p_{i'_k k}\}_{k=1}^{\infty}$ називаємо *диз'юнктною*, якщо множини їхніх індексів майже диз'юнктні, тобто $i_k \neq i'_k$ для всіх k, за можливим винятком скінченної кількості значень k (говоримо: майже для всіх k).

Зазначимо, що умови (12), (11) є досить специфічними і взагалі жодна з них може не виконуватися для довільно взятої послідовності елементів $\{p_{i_k k}\}_{k=1}^{\infty}$. Зокрема, якщо міра μ є чисто абсолютно неперервною, то легко зрозуміти, що з елементів відповідної їй матриці P неможливо сформувати жодної 0- чи 1-збіжної послідовності.

Але якщо міра μ є чисто точковою $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, то легко бачити, що у асоційованої з нею стохастичною матриці P можна виділити 1-збіжну послідовність елементів. Така послідовність складається з максимальних в кожному стовпчику елементів. Тобто послідовність $p_{\max,k} := \max_{i=1}^{n}\{p_{ik}\}$ є 1-збіжною (див. умову а) теореми 1). Усі інші диз'юнктні до неї послідовності є 0-збіжними. Отже, в один бік встановлено справедливість наступного твердження.

Твердження. *Структурно-подібна міра μ є чисто точковою, $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, тоді і лише тоді, коли у відповідної їй матриці P можна виділити точно $n-1$ диз'юнктну 0-збіжну послідовність. Еквівалентно, μ належить $\mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ тоді і лише тоді, коли у P існує лише одна 1-збіжна послідовність.*

Доведення. Легко зрозуміти, що для довільної структурно-подібної міри у відповідної матриці P внаслідок стохастичності векторів $\mathbf{p}_k$ може існувати не більше ніж $n-1$ диз'юнктна 0-збіжна послідовність. Оскільки існує хоча б одна послідовність, яка містить нескінченну кількість елементів $p_{\max,k} \geq 1/n$, то така послідовність не є 0-збіжною. Але якщо існує $n-1$ диз'юнктна 0-збіжна послідовність, то відповідна міра є чисто точковою. Адже тоді послідовність максимальних елементів з необхідністю є 1-збіжною.

Твердження доведено.

Означення. *Міру $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ називаємо квазіточковою* (*пишемо* $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{qp}}$), *якщо асоційована з нею матриця $P = \{\mathbf{p}_k\}$, $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}_+^n$, $n \geq 3$, має наступні властивості*:

1) *послідовність максимальних елементів $p_{k,\max} = \max_i\{p_{ik}\}$ кожного вектора $\mathbf{p}_k$ не є 1-збіжною,*

2) *існує лише одна диз'юнктна до $p_{k,\max}$ послідовність $p_{i'_k k}$, яка не є 0-збіжною.*

Еквівалентно, μ належить $\mathcal{M}_{\mathrm{qp}}$ тоді і лише тоді, коли з елементів матриці P можна побудувати точно $n-2$ взаємно диз'юнктні 0-збіжні послідовності. Тому наведене означення має сенс лише при $n > 2$. В такому випадку решта елементів матриці P в покоординатній сумі утворюють 1-збіжну послідовність:

$$E_k := p_{k,\max} + p_{i'_k k} \uparrow 1. \tag{13}$$

З першої умови цього означення випливає, що міра μ не належить $\mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$, а з другої — існування хоча б однієї 0-збіжної послідовності. Тому квазіточкова міра μ не належить $\mathcal{M}_{\mathrm{ac}}$ (не виконується умова б) теореми 1). Отже, квазіточкова міра з необхідністю є сингулярно неперервною.

Термін „квазіточкова" обумовлений тим, що послідовність $E_k := p_{k,\max} + p_{i'_k k}$ є 1-збіжною. Для цієї послідовності виконується умова

$$\prod_k E_k > 0.$$

Це означає, що для матриці P', у якої елементи $p_{k,\max}, p_{i'_k k}$ об'єднані в покоординатну суму, виконується умова а) теореми 1. Отже, асоційована з P' міра буде чисто точковою.

3. Існування інваріантних спектральних мір. Розглянемо довільну пару структурно-подібних мір $\mu,\ \nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, які є спектральними мірами двох взаємодіючих фізичних систем. Еволюцію взаємодії ми вивчаємо в дискретному часі і вважаємо, що взаємодія є конфліктною. Це означає, що в кожний момент конфронтації між фізичними системами відбувається перерозподіл носіїв (= спектрів) мір μ, ν. Іншими словами, змінюються гамільтоніани фізичних систем, хоча, можливо, і досить незначно. Таким чином виникає послідовність пар мір μ^N, ν^N, $N = 1, 2, \ldots$, які формують динамічну систему конфлікту

$$\{\mu^{N-1}, \nu^{N-1}\} \xrightarrow{\ast} \{\mu^N, \nu^N\}, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

де відображення $\ast$ (конфліктне перетворення) визначається відповідно до розуміння конкретної задачі і процесу взаємодії між фізичними системами.

У цьому пункті показано (див. теорему 2), що послідовність мір μ^N, ν^N збігається до пари інваріантних спектральних мір μ^∞, ν^∞, якщо закон конфліктної взаємодії $\ast$ задовольняє природні умови, які формулюються в термінах елементів стохастичних матриць.

Нехай пара стохастичних матриць

$$P = \{\mathbf{p}_k\} = \{p_{ik}\}, \quad R = \{\mathbf{r}_k\} = \{r_{ik}\}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \quad k \in \{1, \ldots, \infty\},$$

відповідає парі початкових мір $\mu = \mu^0$, $\nu = \nu^0$. Закон конфліктного перетворення $\ast$ вводимо в термінах стохастичних векторів

$$\mathbf{p}_k^N = \mathbf{p}_k^{N-1} \ast \mathbf{r}_k^{N-1}, \quad \mathbf{r}_k^N = \mathbf{r}_k^{N-1} \ast \mathbf{p}_k^{N-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

По $\mathbf{p}_k^N$, $\mathbf{r}_k^N$ будуємо матриці P^N, R^N, які відповідають мірам μ^N, ν^N.

Позначимо

$$\delta_{ik}^N := p_{ik}^N - r_{ik}^N, \quad \rho_{ik}^N := \frac{p_{ik}^N}{r_{ik}^N}, \quad \theta_k^N := (\mathbf{p}_k^N, \mathbf{r}_k^N) = \sum_i p_{ik}^N r_{ik}^N.$$

Далі припускаємо, що в початковий момент часу

$$\theta_k = (\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Головні умови, які ми накладаємо на закон конфліктного перетворення $\ast$, полягають у наступному. Для кожної пари нерівних координат $p_{ik} \neq r_{ik}$ різниця δ_{ik}^N та відношення ρ_{ik}^N повинні монотонно зростати (або спадати), а саме,

$$\begin{gathered} p_{ik} > r_{ik} \geq 0 \Rightarrow \delta_{ik}^N \nearrow, \quad \rho_{ik}^N \nearrow, \\ 0 \leq p_{ik} < r_{ik} \Rightarrow \delta_{ik}^N \searrow, \quad \rho_{ik}^N \searrow, \quad N \to \infty. \end{gathered} \tag{16}$$

Припускаємо також, що θ_k^N з необхідністю прямує до нуля,

$$\theta_k^N \to 0, \quad N \to \infty, \tag{17}$$

хоча далі буде показано, що в конкретних прикладах ця умова виконується автоматично.

Умови (16), (17) виконуються, наприклад, якщо перетворення $\divideontimes$ визначити формулами

$$p_{ik}^N = \frac{p_{ik}^{N-1}(1 - r_{ik}^{N-1})}{1 - \theta_k^{N-1}}, \quad r_{ik}^N = \frac{r_{ik}^{N-1}(1 - p_{ik}^{N-1})}{1 - \theta_k^{N-1}}. \tag{18}$$

Варто зазначити, що за умови (15) величина $\theta_k^{N-1} \neq 1$ для усіх N та k.

Умови (16), (17) виконуються також, якщо перетворення $\divideontimes$ задати формулами, які нагадують різницевий варіант рівнянь Лотки – Вольтерра:

$$p_{ik}^{N+1} = p_{ik}^N(1 + \theta_k^N - r_{ik}^N), \quad r_{ik}^{N+1} = r_{ik}^N(1 + \theta_k^N - p_{ik}^N). \tag{19}$$

Варто зауважити, що формули (18), (19) мають аналоги для неперервного часу:

$$\dot{p}_{ik}^t = \frac{p_{ik}^t(\theta_k^t - r_{ik}^t)}{1 - \theta_k^t}, \quad \dot{r}_{ik}^t = \frac{r_{ik}^t(\theta_k^t - p_{ik}^t)}{1 - \theta_k^t}.$$

$$\dot{p}_{ik}^t = p_{ik}^t(\theta_k^t - r_{ik}^t), \quad \dot{r}_{ik}^t = r_{ik}^t(\theta_k^t - p_{ik}^t), \quad t \geq 0.$$

Для них також справедливі наступні теореми з відповідними змінами у формулюваннях. Але це вимагає додаткових пояснень.

Теорема 2. *Нехай для структурно-подібних мір* $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ *задано перетворення* $\divideontimes$, *яке задовольняє умови* (15) – (17), *записані у термінах асоційованих з мірами стохастичних матриць. Тоді траєкторія динамічної системи конфлікту* (14) *збігається до нерухомої точки* $\{\mu^\infty, \nu^\infty\}$. *Це означає, що існують граничні спектральні міри*

$$\mu^\infty = \lim_{N\to\infty} \mu^N, \quad \nu^\infty = \lim_{N\to\infty} \nu^N,$$

які є інваріантними відносно перетворення $\divideontimes$:

$$\mu^\infty = \mu^\infty \divideontimes \nu^\infty, \ \ \nu^\infty = \nu^\infty \divideontimes \mu^\infty.$$

Доведення. Наведемо лише основну ідею доведення (докладніше див. [24, 25]. Якщо при фіксованому k для координат початкових векторів з індексом i виконується співвідношення $p_{ik} > r_{ik} \geq 0$, то неважко показати, що внаслідок умови (16) (або формул (18), (19)) існує границя $0 < \delta_{ik}^\infty = \lim_{N\to\infty} \delta_{ik}^N \leq 1$, в той час як відношення координат розбігається до нескінченності, $\rho_{ik}^N \nearrow \infty$. Як наслідок, для таких послідовностей координат існують границі

$$p_{ik}^\infty = \lim_{N\to\infty} p_{ik}^N, \quad r_{ik}^\infty = \lim_{N\to\infty} r_{ik}^N, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

При цьому $p_{ik}^\infty = \delta_{ik}^\infty > 0$, а початкова менша координата з необхідністю прямує до нуля: $r_{ik}^\infty = 0$. Більш того, з умови (17) випливає, що для будь-якої пари рівних початкових координат $p_{ik} = r_{ik}$ також існують граничні значення, до того ж нульові: $p_{ik}^\infty = r_{ik}^\infty = 0$. Для конкретних формул (18), (19) умову (17) можна не вимагати, вона виконується автоматично. В будь-якому разі на цьому шляху доводиться існування та ортогональність граничних векторів $\mathbf{p}_k^\infty$, $\mathbf{r}_k^\infty$. Звідси випливає існування граничних стохастичних матриць

$$P^{\infty} = \lim_{N\to\infty} P^N, \quad R^{\infty} = \lim_{N\to\infty} R^N,$$

з якими однозначно пов'язані структурно-подібні міри $\mu^{\infty}, \nu^{\infty} \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$. Як наслідок, це означає, що кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (14) збігається до нерухомої точки. Властивість інваріантності граничних мір μ^{∞}, ν^{∞} є наслідком ортогональності векторів $\mathbf{p}_k^{\infty}$, $\mathbf{r}_k^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорему доведено.

Наступна теорема дає якісний опис інваріантних граничних мір μ^{∞}, ν^{∞} у термінах точних граничних значень координат p_{ik}^{∞}, r_{ik}^{∞} стохастичних матриць P^{∞}, R^{∞}.

Введемо позначення

$$\mathbb{N}_{+,k} := \{i \colon \delta_{ik} > 0\}, \quad \mathbb{N}_{-,k} := \{i \colon \delta_{ik} < 0\}, \quad N = 0,$$

та

$$D_k := \sum_{i\in\mathbb{N}_{+,k}} \delta_{ik} = -\sum_{i\in\mathbb{N}_{-,k}} \delta_{ik}.$$

Ми вводимо додаткову умову на закон конфліктного перетворення $\circledast$. Припускаємо, що всі різниці δ_{ik}^N для пар нерівних координат $p_{ik} \neq r_{ik}$ зростають (або спадають) пропорційно:

$$\delta_{ik}^{N+1} = \delta_{ik}^N \cdot c_k^N, \quad c_k^N > 1, \tag{21}$$

до того ж коефіцієнт пропорційності c_k^N не залежить від індексу координат. Для конкретних формул (18), (19) ця умова також виконується автоматично.

Теорема 3. *При виконані умов* (15)–(17) *та* (21) *елементи граничних матриць* P^{∞}, R^{∞} *мають наступний явний опис*:

$$p_{ik}^{\infty} = \begin{cases} \delta_{ik}/D_k, & i \in \mathbb{N}_{+,k}, \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_{+,k}, \end{cases} \quad r_{ik}^{\infty} = \begin{cases} -\delta_{ik}/D_k, & i \in \mathbb{N}_{-,k}, \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_{-,k}. \end{cases} \tag{22}$$

Доведення. Якщо $p_{ik} = r_{ik}$ для деяких i, k, то вже показано, що координати $p_{ik}^N = r_{ik}^N$ збігаються до нуля при $N \to \infty$ і тому $p_i^{\infty} = r_i^{\infty} = 0$. Отже,

$$p_{ik}^{\infty} = r_{ik}^{\infty} = 0, \quad i \notin \mathbb{N}_{+,k} \bigcup \mathbb{N}_{-,k},$$

тобто формули (22) частково доведено.

У випадку, коли $i \in \mathbb{N}_{+,k}$, тобто різниця δ_{ik} є строго додатною, ітерація перетворення $\circledast$ приводить до того, що одна з послідовностей координат прямує до нуля, а саме, $r_{ik}^N \to 0$, $N \to \infty$, а друга має строго додатну границю, $p_{ik}^N \to p_{ik}^{\infty} > 0$. Це доводить рівність $r_{ik}^{\infty} = 0$ для всіх $i \in \mathbb{N}_{+,k}$. Аналогічно встановлюється збіжність $r_{ik}^N \to r_{ik}^{\infty} > 0$ та $p_{ik}^N \to 0$, якщо $i \in \mathbb{N}_{-,k}$. Для знаходження точних формул, які описують ненульові граничні значення p_{ik}^{∞}, r_{ik}^{∞}, проводимо наступні міркування.

Внаслідок додаткової умови (21) помічаємо, що відношення $\delta_{ik}^N/\delta_{jk}^N$ не залежать від N:

$$\frac{\delta_{ik}^1}{\delta_{jk}^1} = \frac{\delta_{ik}^N}{d_{jk}^N} = \frac{\delta_{ik}}{\delta_{jk}}, \quad i, j \in \mathbb{N}_{+,k}.$$

Ця властивість очевидно виконується і при граничному переході $N \to \infty$. Тому

$$\frac{\delta_{ik}^{\infty}}{\delta_{jk}^{\infty}} = \frac{\delta_{ik}}{\delta_{jk}}.$$

Далі, оскільки для $i \in \mathbb{N}_{+,k}$ $\delta_{ik}^{\infty} = p_{ik}^{\infty} > 0$, то

$$\frac{p_{ik}^{\infty}}{p_{jk}^{\infty}} = \frac{\delta_{ik}}{\delta_{jk}}, \quad i, j \in \mathbb{N}_{+,k}. \tag{23}$$

Аналогічно, за тією ж аргументацією

$$\frac{r_{ik}^{\infty}}{r_{jk}^{\infty}} = \frac{\delta_{ik}}{\delta_{jk}}, \quad i, j \in \mathbb{N}_{-,k}. \tag{24}$$

Тепер легко показати, що система рівнянь (23), (24) відносно граничних координат має єдиний розв'язок, який описано формулами (22). Дійсно, з (23) видно, що для $i \in \mathbb{N}_{+,k}$ усі координати p_{ik}^{∞} пропорційні до значень δ_{ik}, тобто $p_{ik}^{\infty} = C_{p,k}\delta_{ik}$, де коефіцієнти $C_{p,k}$ не залежать від i. Тепер, внаслідок стохастичності граничних векторів, $\sum_i p_{ik}^{\infty} = 1$, неважко показати, що $C_{p,k} = 1/D_k$. Отже, $p_{ik}^{\infty} = \delta_{ik}/D_k$, $i \in \mathbb{N}_{+,k}$. Аналогічно, для знаходження розв'язку системи рівнянь (24) покладаємо $r_{ik}^{\infty} = C_{r,k}\delta_{ik}$, $i \in \mathbb{N}_{-,k}$, і, використовуючи стохастичність вектора $\mathbf{r}_k^{\infty}$, знаходимо $C_{r,k} = -1/D_k$, де мінус з'являється внаслідок того, що $\delta_{ik} < 0$ для всіх $i \in \mathbf{N}_{-,k}$. Отже, $r_{ik}^{\infty} = -d_{ik}/D_k$, $i \in \mathbb{N}_{-,k}$.

Теорему доведено.

4. Трансформація сингулярно неперервної міри у точкову міру. Основним результатом роботи є наступна теорема. Вона стверджує, що сингулярно неперервна міра $\mu \in \mathcal{M}_{\rm sc}$ під дією конфліктної взаємодії з чисто точковою мірою $\nu \in \mathcal{M}_{\rm pp}$ може перейти у чисто точкову, лише якщо μ належить $\mathcal{M}_{\rm qp}$.

Теорема 4. *Припустимо, що для заданої пари структурно-подібних мір $\mu \in \mathcal{M}_{\rm sc}$, $\nu \in \mathcal{M}_{\rm pp}$*

$$\mu^{\infty} := \mu \overset{\infty}{\circledast} \nu \in \mathcal{M}_{\rm pp}.$$

Тоді початкова міра μ з необхідністю є квазіточковою, $\mu \in \mathcal{M}_{\rm qp}$. Більш того, для кожної структурно-подібної міри $\mu \in \mathcal{M}_{\rm qp}$ існує чисто точкова міра $\nu \in \mathcal{M}_{\rm pp}$ така, що μ^{∞} належить $\mathcal{M}_{\rm pp}$.

Доведення. Нехай задано міру $\mu \in \mathcal{M}_{\rm qp}$. Потрібно довести існування міри $\nu \in \mathcal{M}_{\rm pp}$ такої, що μ^{∞} належить $\mathcal{M}_{\rm pp}$. Нехай $I' = \{i'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $I = \{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ позначають дві диз'юнктні послідовності індексів такі, що відповідні їм послідовності матричних елементів $\{p_{i'_k k}\}$, $\{p_{i_k k}\}$ матриці P не є 0-збіжними (вони існують згідно з означенням міри $\mu \in \mathcal{M}_{\rm qp}$). Одна з цих послідовностей, а саме $p_{i_k k} = p_{k,\max}$, не є 1-збіжною, а тому не є і 0-збіжною, оскільки складається з максимальних елементів кожного стовпчика. Усі інші диз'юнктні послідовності $p_{j_k k}$ є 0-збіжними. Тому послідовність $E_k := p_{i'_k k} + p_{i_k k} \uparrow 1$ є 1-збіжною.

За шукану міру вибираємо довільну міру $\nu \in \mathcal{M}_{\rm pp}$, але таку, що $r_{k,\max} = r_{i'_k k}$, $i'_k \in I'$. Отже, $r_{i'_k k} \uparrow 1$. Зрозуміло, що всі інші диз'юнктні послідовності з елементів відповідної матриці R будуть 0-збіжними. Тепер з $r_{i'_k k} \uparrow 1$ випливає, що $p_{i'_k k} < r_{i'_k k}$ майже для всіх k, бо $p_{i'_k k} \leq 1 - 1/n$. Отже, $p_{i'_k k}^{\infty} \downarrow 0$, тому що майже всі $p_{i'_k k}^{\infty} = 0$ за теоремою 2. Треба перевірити, що всі послідовності $p^{\infty}_{j_k k}$, які є диз'юнктними до I, I', є 0-збіжними:

$$p^{\infty}_{j_k k} = \frac{p_{j_k k} - r_{j_k k}}{D_k} = \frac{\delta_{j_k k}}{D_k} \downarrow 0, \quad j_k \neq i_k \in I, \quad j_k \neq i'_k \in I'.$$

Це випливає з того, що $p_{j_k k} \downarrow 0$, $j_k \neq i_k, i'_k$ (за означенням квазіточкової міри), а також з того, що $r_{j_k k} \downarrow 0$, $j_k \neq i_k, i'_k$, оскільки лише одна послідовність $r_{i'_k k} = r_{k,\max} \uparrow 1$. Крім того, має значення той факт, що $D_k > c > 0$ майже для всіх k. В дійсності D_k зростає, оскільки містить доданок $\delta_{i_k k} = p_{i_k k} - r_{i_k k}$ з $p_{i_k k} = p_{k,\max} > 1/n$ та $r_{i_k k} \downarrow 0$. Отже,

$$\frac{\delta_{j_k k}}{D_k} < \frac{\delta_{j_k k}}{c} \downarrow 0,$$

бо $\delta_{j_k k} \downarrow 0$, як різниця двох 0-збіжних послідовностей. Залишилась єдина диз'юнктна послідовність

$$p^{\infty}_{i_k k} = \frac{p_{k,\max} - r_{i_k k}}{D_k},$$

яка очевидно є 1-збіжною.

Одну частину теореми доведено.

Навпаки, нехай $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sc}}$, $\nu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$ і $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$. Потрібно довести, що μ належить $\mathcal{M}_{\mathrm{qp}}$. Покажемо що у матриці P існує точно $n-2$ 0-збіжні послідовності.

Розглянемо послідовність $p^{\infty}_{k,\max}$, побудовану з максимальних елементів кожного стовпчика матриці P^{∞}. Вона є 1-збіжною за припущенням $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\mathrm{pp}}$. Тому можна записати

$$p^{\infty}_{k,\max} \equiv p^{\infty}_{i_k k} = \frac{p_{i_k k} - r_{i_k k}}{D_k} \uparrow 1, \quad i_k \in I, \tag{25}$$

де I позначає множину відповідних індексів i_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Побудуємо диз'юнктну до I множину індексів $I' = \{i'_k\} = I_{\mathrm{mp}} \bigcup I_{\mathrm{mr}}$, яка у свою чергу складається з двох диз'юнктних підмножин:

$$I_{mp} := \{i'_k \neq i_k \colon \; r_{i'_k k} = r_{k,\max}\},$$
$$I_{mr} := \{i'_k \neq i_k \colon \; p_{i'_k k} = \max\nolimits_{i_k}\{p_{i_k k} \neq p_{k,\max}\}\}.$$

Треба пояснити, що I_{mp} містить усі індекси i'_k такі, що $r_{i'_k k} = r_{k,\max} \neq r_{i_k k}$. Зрозуміло, що для кожного $k = 1, 2 \ldots$ існує $i'_k \neq i_k$ такий, що $r_{i'_k k} = r_{k,\max}$ (і тоді він належить до I_{mp}), або такий, що для нього $p_{i'_k k} = \max_{i_k}\{p_{i_k k} \neq p_{k,\max}\}$. Отже, $I_{mp} \bigcap I_{mr} = \emptyset$.

Зазначимо, що для кожного $i'_k \in I'$, $k = 1, 2, \ldots$, реалізується одна з можливостей

$$r_{i'_k k} = r_{k,\max} \neq r_{i_k k}, \quad i'_k \in I_{mp}, \tag{26}$$

або

$$r_{i'_k k} \neq r_{k,\max} = r_{i_k k}, \; i'_k \in I_{mr}.$$

Множина I_{mp} нескінченна. Дійсно, якщо припустити, що вона скінченна, то тоді за побудовою $r_{k,\max} = r_{i_k k}$ майже для всіх k. В такому випадку з (25) випливає, що $p_{i_k k} > r_{k,\max}$ майже для всіх k. Але тоді $p_{i_k k} \uparrow 1$, оскільки $r_{k,\max} \uparrow 1$. Це суперечить початковій умові $\mu \in \mathcal{M}_{\rm sc}$. Отже, множина I_{mp} не є скінченною. До речі, множина I_{mr} можливо є скінченною або навіть порожньою.

Тепер покажемо, що всі диз'юнктні послідовності $\{p_{j_k k}\}$ з $j_k \neq i'_k \in I'$ та $j_k \neq i_k \in I$ є 0-збіжними. Дійсно, завдяки $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\rm pp}$ та (25) для довільної такої послідовності виконується співвідношення

$$p^\infty_{j_k k} = \frac{p_{j_k k} - r_{j_k k}}{D_k} \downarrow 0.$$

Тому очевидно

$$p_{j_k k} - r_{j_k k} < \frac{p_{j_k k} - r_{j_k k}}{D_k},$$

оскільки $1/D_k > 1$. Отже, $p_{j_k k} - r_{j_k k} \downarrow 0$. Тому внаслідок того, що $r_{j_k k} \downarrow 0$, послідовність $p_{j_k k}$ є 0-збіжною, $p_{j_k k} \downarrow 0$. При цьому ми використали те, що $j_k \notin I, I'$ та $\nu \in \mathcal{M}_{\rm pp}$. Завдяки останньому $r_{j_k k} \neq r_{k,\max}$, де, нагадаємо, послідовність $r_{k,\max}$ відповідає множині I' (див. (26)).

Отже, ми побудували $n-2$ диз'юнктні 0-збіжні послідовності з елементів матриці P. Серед усіх елементів, які належать до цих послідовностей, лише скінченна кількість може бути елементами $p_{k,\max}$. Внаслідок виконання нерівностей $p_{k,\max} \geq$ $\geq 1/n$ наявність нескінченної кількості таких елементів суперечить 0-збіжності.

Тому послідовність $\{p_{k,\max}\}$ можна вважати диз'юнктною відносно побудованих $n-2$ 0-збіжних послідовностей $\{p_{j_k k}\}$. Нагадаємо, що $p_{k,\max} \not\to 1$, оскільки μ не належать $\mathcal{M}_{\rm pp}$.

З решти елементів матриці P утворюється ще одна диз'юнктна послідовність $p_{\bar{i}_k k}$, яка не є 0-збіжною. Дійсно, в противному разі ми б мали $n-1$ диз'юнктну 0-збіжну послідовність, а це б означало, що μ належить $\mathcal{M}_{\rm pp}$, тобто суперечність.

Отже, μ належить $\mathcal{M}_{\rm qp}$, оскільки з елементів $p_{j_k k}$ з індексами, диз'юнктними до I, I', можна побудувати точно $n-2$ послідовності, а з елементів $p_{i_k k}$, $p_{i'_k k}$, $i_k \in I$, $i'_k \in I'$, — дві послідовності, одна з яких не є 1-збіжною, а друга не є 0-збіжною.

Теорему доведено.

1. *Kuang Y.* Basic properties of mathematical population models // J. Biomath. – 2002. – № 17. – P. 129 – 142.
2. *Sigmund K.* The population dynamics of conflict and cooperation // Doc. Math. J. DMV. – 1998. – **1**. – P. 487 – 506.
3. *Bandyopadhyay M., Chattopadhayay J.* Ratio-dependent predator-prey model: effects of environmental fluctuation and stability // Nonlinearity. – 2005. – № 18. – P. 913 – 936.
4. *Lonzonn Y., Solomon S., Goldenberg J., Mazarsky D.* World-size global markets lead to economic instability // Acrificial Life. – 2003. – P. 357 – 370.
5. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. – Cambridge Univ. Press, 1998.
6. *Takahashi K. I., Salam K. MD. M.* Mathematical model of conflict with non-annihilating multi-opponent // J. Interdiscipl. Math. – 2006. – **9**, № 3. – P. 459 – 473.
7. *Kuang Y., Beretta E.* Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system // J. Math. Biol. – 1998. – № 36. – P. 389 – 406.
8. *Murray J. D.* Mathematical biology I: An Introduction. – Springer, 2002. – 551 p.
9. *Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration // J. Interdiscipl. Math. – 2008. – **11**, № 2. – P. 163 – 185.

10. *Jones A. J.* Game theory: mathematical models of conflict // Math. and Appl. – New York etc., 1980.
11. *Owen G.* Game theory. – Third ed. – San Diego, CA: Acad. Press, Inc., 1995.
12. *Кошманенко В. Д.* Відновлення спектрального типу граничних розподілів у динамічних системах конфлікту // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 771 – 784.
13. *Karataieva T., Koshmanenko V.* Origination of the singular continuous spectrum in the conflict dynamical systems // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2009. – **14**, № 1. – P. 309 – 319.
14. *Hutchinson J. E.* Fractals and selfsimilarity // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – **30**. – P. 713 – 747.
15. *Berezanskii Yu. M.* Selfadjoint operators in spaces of function of infinitely many of variables. – Providence, Rhode Island: AMS, 1986.
16. *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures // Ann. Math. – 1948. – **49**. – P. 214 – 224.
17. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід в дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Нац. пед. ун-т, 1998.
18. *Falconer K. J.* Fractal geometry. – Chichester: Wiley, 1990.
19. *Triebel H.* Fractals and spectra related to Fourier analysis and functional spaces. – Basel etc.: Birkhäuser, 1997.
20. *Koshmanenko V.* The structured similarity property for infinite products of measures // Infinite Dimens. Anal. and Top. – Yaremche, 2009. – P. 78 – 79.
21. *Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G.* Fine structure of the singular continuous spectrum // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2003. – **9**, № 2. – P. 101 – 119.
22. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Spectral properties of image measures under infinite conflict interactions // Positivity. – 2006. – **10**. – P. 39 – 49.
23. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Spectral properties of image measures after conflict interactions // Theory Stochast. Processes. – 2004. – **10**, № 3 – 4. – P. 73 – 81.
24. *Koshmanenko V.* On the conflict theorem for a pair of stochastic vectors // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 4. – P. 555 – 560.
25. *Koshmanenko V.* The theorem of conflict for probability measures // Math. Meth. Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.

Одержано 03.03.10