УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ КВАЗИИЗОМЕТРИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

We consider a family of the open discrete mappings $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ that distort in a special way the p-modulus of families of curves connecting the components of spherical condenser in a domain D in $\mathbb{R}^n,\ p > n-1,$ $p < n,$ and omitting a set of positive p-capacity. We establish that this family is normal provided that some function realizing the control of the considered distortion of curve family has a finite mean oscillation at every point or only logarithmic singularities of the order, which is not larger than $n-1.$ We prove that, under these conditions, an isolated singularity $x_0 \in D$ of the mapping $f\colon D\setminus\{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ is removable and, moreover, the extended mapping is open and discrete. As applications we obtain analogs of the known Liouville and Sokhotski – Weierstrass theorems.

Встановлено, що сім'я відкритих дискретних відображень $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, які спотворюють певним чином p-модуль сім'ї кривих, що з'єднують обгортки сферичного конденсатора в області D в $\mathbb{R}^n,\ p > n-1,$ $p < n,$ і випускають множину позитивної p-ємності, є нормальною сім'єю відображень за умови, що деяка дійснозначна функція, яка відповідає за контроль зазначеного вище спотворення сім'ї кривих, має скінченне середнє коливання у кожній точці або лише логарифмічні сингулярності порядку, що не перевищує $n-1.$ Встановлено, що за цих умов ізольована сингулярність $x_0 \in D$ відображення $f\colon D\setminus\{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ є усувною, більш того, продовжене відображення є відкритим та дискретним. Як застосування отримано аналоги відомих теорем Ліувілля і Сохоцького – Вейєрштрасса.

1. Введение. Основная цель настоящей статьи заключается в установлении двух важных свойств для одного класса пространственных отображений. Именно, речь идет об устранении особенности в изолированной точке границы, а также равностепенной непрерывности (нормальности) семейств отображений, искажающих емкости конденсаторов специальным образом. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n,$ $n \geq 2,$ m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n,$ запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение $f,$ заданное в области $D,$ непрерывно. Далее запись $d(A)$ означает евклидов диаметр, а $m(A)$ — меру Лебега множества A в $\mathbb{R}^n.$

Для того чтобы дать определение рассматриваемого ниже класса отображений, необходимо привести некоторые сведения о семействах, состоящих из кривых, а также модулях семейств кривых, играющих роль внешних мер (подробнее об этом см. ниже). Здесь и далее *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (открытого либо полуоткрытого интервала одного из видов $(a,b),$ $[a,b),$ $(a,b]$) в $\mathbb{R}^n,$ $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n.$ Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых $\gamma,$ а $f(\Gamma)=\{f\circ\gamma|\gamma\in\Gamma\}.$

Следующие определения можно найти, например, в разд. 1 – 6 гл. I в [1]. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n,$ если для всех кривых γ семейства Γ криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{\gamma}\rho(x)\ \ |dx|$ по кривой γ удовлетворяет условию $\int\limits_{\gamma}\rho(x)\ \ |dx|\geq 1.$ В этом случае пишем $\rho\in \operatorname{adm}\Gamma.$ Пусть $p\geq 1,$ тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma)=\inf\limits_{\rho\in\,\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{D}\rho^p(x)\ \ dm(x) \tag{1}$$

(см. разд. 6 гл. I в [1]). Приведенное выше понятие модуля при $p=n$ играет важную роль при изучении квазиконформных отображений. По-видимому, оно впервые встречается в работах Л. Альфорса и А. Берлинга [2, 3], а также О. Лехто и К. Виртанена (см., например, [4]). Как будет показано в настоящей работе, понятие модуля весьма полезно при изучении и других классов отображений, не только квазиконформных.

Свойства p-модуля, определенного соотношением (1), в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M_p(\varnothing) = 0$, имеет свойство монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и $\Gamma_2\colon \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M_p(\Gamma_1) \le M_p(\Gamma_2)$, а также свойство полуаддитивности

$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i) \tag{2}$$

(см. теорему 6.2 в разд. 6 гл. I в [1]). Заметим также, что если Γ_∞ — некоторое семейство, состоящее из неспрямляемых кривых, то $M_p(\Gamma_\infty) = 0$, (см. разд. 6 гл. I в [1, с. 18]). Упомянем еще об одном свойстве модуля. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае $M_p(\Gamma_1) \le M_p(\Gamma_2)$ (см. теорему 6.4 в разд. 6 гл. I в [1]). Заметим, что условие $p \ge 1$ здесь важно; кроме того, при $0 < p < 1$ упомянутый выше p-модуль имеет совсем другие, в некотором смысле, диаметрально противоположные свойства, поэтому этот случай рассматривать не будем.

Пусть $x_0 \in D$, $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция,

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r_i\}.$$

Для произвольных множеств E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ символ $\Gamma(E, F, D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,b)$. Приведем теперь следующее определение. Пусть $p \ge 1$. Говорят, что $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым* (p, Q)*-отображением в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \ \le \int\limits_A Q(x)\eta^p(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{3}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \ \ge\ 1.$$

Изучение неравенств типа (3) при $p = n$ восходит к Л. Альфорсу (см., например, теорему 3 в разд. D гл. I в [3]), а также к О. Лехто и К. Виртанену (см. неравенство (6.6) в разд. 6.3 гл. V в [4]). По поводу подробной мотивации изучения неравенства вида (3) см. также работы [7, 8]. Одна из распространенных модификаций соотношения (3) с показателем p, не равным n, впервые встречается в статье А. Гольберга [5]. В последней работе доказаны свойства ACL, а также дифференцируемость почти всюду для гомеоморфизмов, удовлетворяющих чуть более сильному неравенству, чем (3), при $p > n - 1$.

Пусть $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, dS,$$

где dS — элемент площади поверхности S, а ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)$ в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует конечный предел $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом.* Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенно особой точкой* отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела. Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с расстоянием d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f\colon X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f\colon X \to X'$.

Основными результатами настоящей работы являются два следующих утверждения.

Утверждение 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной p-емкости, $\mathfrak{F}_Q$ — семейство открытых дискретных отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, удовлетворяющих соотношению вида* (3) *с одним и тем же Q в каждой точке $x_0 \in D$ для соответствующих r_1, r_2 и функций η. Предположим, что $p \in (n-1, n)$ и функция Q имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$ либо $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$ для произвольного $x_0 \in D$. Тогда $\mathfrak{F}_Q$ образует нормальное семейство отображений.*

Утверждение 2. *Пусть $x_0 \in D$, $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению вида* (3) *в точке x_0 для соответствующих r_1, r_2 и функций η. Предположим, что $p \in (n-1, n)$ и функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$. Если p-емкость множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)$ положительна, то отображение f продолжимо в точку x_0 по непрерывности, причем продолженное отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ открыто и дискретно.*

Определения емкости, конечного среднего колебания, а также другие, использованные нами выше, приведены далее в тексте.

2. Предварительные сведения. Известно (см., например, разд. 13 гл. II в [1]), что в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено условие

$$M_n(f(\Gamma)) \leq K\, M_n(\Gamma) \tag{4}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M_n — (конформный) модуль семейства кривых, определенный выше при $p = n$. Другими словами, стандартное определение квазиконформности сводится к тому, что n-модуль любого семейства кривых искажается не более чем в K раз. Отметим, что выражение „конформный модуль” употребляется в случае p-модуля, определенного в (1), при $p = n$. Упомянутое выше словосочетание вполне оправдано тем, что для любого конформного отображения $g\colon D \to \mathbb{R}^n$, заданного в области $D \subset \mathbb{R}^n$, и для произвольного семейства кривых Γ, лежащего в области D, выполнено равенство $M_n(g(\Gamma)) = M_n(\Gamma)$ (см., например, теорему 8.1 гл. I в [1]). Отметим, что при $p \neq n$ даже линейные отображения $f_k(x) = kx$, $k \neq 0$, не сохраняют модуль семейств кривых, а именно, $M_p\left(f_k(\Gamma)\right) = k^{n-p} M_p(\Gamma)$ (см. теорему 8.2 там же). Предположим, что $p \neq n$ и

$$M_p(f(\Gamma)) \leq K\, M_p(\Gamma) \tag{5}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D. При дополнительном предположении, что f в (5) является гомеоморфизмом, Ф. Герингом установлено, что отображение f является *локально квазиизометричным*. Другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq C$$

(см., например, теорему 2 в [6]). Если функция Q в (3) ограничена, то мы немедленно приходим к неравенству (5), так как в этом случае в правой части неравенства (3) можно использовать определение p-модуля и перейти к инфимуму по всем подходящим η. Отметим, что свойство локальной квазиизометрии, приведенное выше, справедливо только при $p \neq n$ (см., например, [6]).

При $p = n$ такие свойства отображений вида (3), как устранение изолированных особенностей и нормальность семейств, изучены автором (см., например, [14, 15]. Поэтому в настоящей статье нас будет интересовать случай неравенства (3) преимущественно при неограниченных Q и при $p < n$. Отметим также, что случай $p > n$ связан с некоторым вырождением, на чем мы не будем акцентировать внимание.

В дальнейшем

$$B(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| < r\right\}, \quad \mathbb{B}^n := B(0,1).$$

Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $\left\{f^{-1}(y)\right\}$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x,y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \qquad h(x,y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Всюду ниже мы рассматриваем произвольное семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon D \to \to \overline{\mathbb{R}^n}$, как между метрическими пространствами (X, d) и (X', d'), где $X = D$,

$X' = \overline{\mathbb{R}^n},\ d(x,y) = |x-y|,\ d'(x,y) = h(x,y)$. *Хордальным диаметром* множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) = \sup_{x\,,y\,\in\,E} h(x,y). \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобятся понятия конденсатора и емкости конденсатора (см., например, § 5 в [9] или разд. 10 гл. II в [10]). *Конденсатором* называют пару $E = (A,\, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. Всюду далее p*-емкостью* конденсатора E называется величина

$$\operatorname{cap}_p E = \operatorname{cap}_p\,(A,\, C) = \inf_{u\,\in\,W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^p\; dm(x), \tag{7}$$

где $W_0(E) = W_0\,(A,\, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL,\ |\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n\,(\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, имеет *нулевую* p*-емкость* (пишут $\operatorname{cap}_p C = 0$), если существует ограниченное открытое множество A такое что, $C \subset A$, причем $\operatorname{cap}_p(A,C) = 0$. В противном случае говорят, что компакт C имеет положительную p-емкость и пишут $\operatorname{cap}_p C > 0$.

Можно также определить p-емкость для конденсатора в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (см., например, замечание 10.8 гл. II в [10]), а именно, используя связь

$$\operatorname{cap}_p E = M_p\,(\Gamma_E)\ , \tag{8}$$

где Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon [a,\, b) \to A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$ (см. предложение 10.2 гл. II в [10]). Другими словами, для конденсатора $E = (A,C)$ семейство Γ_E состоит из тех и только тех кривых, которые имеют начало в C, лежат в A и в то же время целиком не лежат ни в одном фиксированном компакте внутри A. В случае ограниченного множества A такие кривые должны „подходить” к границе A, однако, не обязаны быть спрямляемыми и, вообще говоря, к чему-то стремиться.

Далее будет использоваться следующая оценка емкости конденсатора $E = (A,C)$ в $\mathbb{R}^n$ (см., например, предложение 6 в [11]):

$$\operatorname{cap}_p\, E = \operatorname{cap}_p\,(A,C) \geq \left(c_1 \frac{(d(C))^p}{(m(A))^{1-n+p}}\right)^{1/(n-1)} \tag{9}$$

при $p > n-1$, где постоянная c_1 зависит только от n и p.

Пусть Ω_n обозначает объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Следующее определение можно найти, например, в разд. 6.1 гл. VI в [8]. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$ (пишем $\varphi \in FMO$ в x_0), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\; dm(x)\; <\; \infty\,,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \dfrac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \displaystyle\int_{B(x_0,\,\varepsilon)} \varphi(x)\; dm(x)$.

3. Формулировка и доказательство основных лемм.

Предложение 1. *Пусть* $E_0,\ E_1$ *— два множества в области* D, *содержащей кольцо* $A(a,b,0)=\{a<|x|<b\}$, *такие, что при любом* $r\in(a,b)$ *сфера* $S(0,r)$ *пересекает как* E_0, *так и* E_1, *причем* $E_0\cap E_1=\varnothing$. *Тогда при любом* $p\in(n-1,n)$,

$$M_p\left(\Gamma\left(E_0,E_1,D\right)\right)\geq\frac{2^n b_{n,p}}{n-p}\left(b^{n-p}-a^{n-p}\right)$$

(*см. теорему* 4 *в* [12]).

Следующая лемма доказана при $p=n$ О. Мартио, С. Рикманом и Ю. Вяйсяля (см., например, лемму 3.11 в [13] либо лемму 2.6 гл. III в [10]). В настоящей работе упомянутая выше лемма впервые доказывается при произвольном $p\in(n-1,n)$.

Лемма 1. *Пусть* F *— компактное собственное подмножество пространства* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *такое, что* $\mathrm{cap}_p\,F>0,\ n-1<p<n$. *Тогда для каждого* $a>0$ *существует* $\delta>0$ *такое, что для произвольного континуума* $C\subset\overline{\mathbb{R}^n}\setminus F$ *с условием* $h(C)\geq a$ *имеет место оценка*

$$\mathrm{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus F,\,C\right)\geq\delta. \tag{10}$$

Отметим, что в формулировке леммы 1 пара $E:=\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus F,C\right)$ действительно является конденсатором, p-емкость которого определена соотношением (7), а соотношение (10) анонсирует возможность оценки этой емкости снизу. Хордальный диаметр множества C, обозначенный в формулировке леммы 1 через $h(C)$, определен выше соотношением (6).

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что компакт F является ограниченным. Если это не так, то можно выбрать подкомпакт $F_1\subset F$ такой, что F_1 ограничен и $\mathrm{cap}_p\,F_1>0$, а затем воспользоваться свойством монотонности емкости $\mathrm{cap}_p(A,C)$ по первой компоненте A. Существование указанного выше компакта F_1 нетрудно показать следующим способом. Рассмотрим последовательность шаров $B(0,r_j)$ с центром в нуле и радиусов r_j, где $r_j\to\infty$ при $j\to\infty$. Обозначим $D_j=\overline{B(0,r_j)}\cap F$; некоторые из D_j могут быть пустыми. Пусть K — произвольный континуум, лежащий во множестве $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus F$; такой континуум существует в силу условия, что F — собственное подмножество пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда вследствие условия $\mathrm{cap}_p\,F>0$, а также соотношений (8) и (2) имеем

$$0<b_0:=M_p\left(\Gamma\left(K,F,\overline{\mathbb{R}^n}\right)\right)\leq\sum_{j=1}^{\infty}M_p\left(\Gamma\left(K,D_j,\overline{\mathbb{R}^n}\right)\right),$$

откуда следует, что хотя бы одно из слагаемых в правой части последнего соотношения больше нуля. Пусть это слагаемое соответствует индексу $j_0\in\mathbb{N}$, в таком случае полагаем $F_1:=\overline{B(0,r_{j_0})}\cap F$.

Итак, предположим, что компакт F ограничен. Тогда существует шар, его содержащий. Пусть $F\subset B(0,R)$. Заметим, что R можно выбрать настолько большим, что

$$h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,R)\right)<a/2\,. \tag{11}$$

Покажем, что C содержит подконтинуум C_1 такой, что $C_1\subset B(0,R)$ и $h(C_1)\geq a/4$.

Если континуум C целиком лежит в шаре $B(0,R)$, полагаем $C_1 := C$. Пусть найдется $z_0 \in C \cap \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,R)\right)$. Поскольку C — замкнутое множество, найдутся $x_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ такие, что $h(C) = h(x_0, y_0)$. Заметим, что точки x_0 и y_0 не могут одновременно принадлежать дополнению шара $B(0,R)$, ибо $h(C) \geq a$, а $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,R)\right) < a/2$ в силу (11). Пусть $x_0 \in B(0,R)$. Возможны два случая.

1) $y_0 \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0,R)$. Пусть C_2 — компонента связности множества $C \cap \overline{B(0,R)}$, содержащая точку x_0. Заметим, что, поскольку C — связное множество, найдется точка $z_1 \in C_2 \cap S(0,R)$. Тогда согласно неравенству треугольника

$$a \leq h(x_0, y_0) \leq h(x_0, z_1) + h(z_1, y_0) < h(C_2) + a/2,$$

откуда следует, что $h(C_2) > a/2$. Теперь в качестве C_1 можно взять, например, C_2.

2) $y_0 \in B(0,R)$. Сохранив обозначение для C_2, использованное выше, обозначим через C_3 компоненту связности множества $C \cap \overline{B(0,R)}$, содержащую точку y_0. Заметим, что, поскольку C — связное множество, найдется точка $z_2 \in C_3 \cap S(0,R)$. Тогда согласно неравенству треугольника и в силу соотношения (11)

$$a \leq h(x_0, y_0) \leq h(x_0, z_1) + h(z_1, z_2) + h(z_2, y_0) < h(C_2) + h(C_3) + a/2,$$

откуда следует, что либо $h(C_2) > a/4$, либо $h(C_3) > a/4$, что и требовалось установить; в качестве C_1 нужно взять либо C_2, либо, соответственно, C_3.

Итак, найдется континуум C_1 такой, что $C_1 \subset B(0,R)$ и $h(C_1) \geq a/4$. Заметим, что по определению p-емкости (7) $\operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus F,\, C\right) \geq \operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus F,\, C_1\right)$, поэтому вполне достаточно оценить снизу емкость последнего конденсатора. Полагаем $\Gamma_1 := \Gamma\left(F, S(0,2R), B(0,2R)\right)$. В силу условия $\operatorname{cap}_p F > 0$, а также соотношения (8) имеем

$$M_p(\Gamma_1) := \delta_1 > 0, \tag{12}$$

где δ_1 зависит только от p, R и компакта F. Обозначим теперь $\Gamma_2 = \big(C_1, S(0,2R), B(0,2R)\big)$. Заметим, что в силу соотношения (8) $\operatorname{cap}_p\left(B(0,2R), C_1\right) = M_p(\Gamma_2)$. Однако тогда согласно неравенству (9)

$$M_p(\Gamma_2) \geq \left(c_1 \frac{(d(C_1))^p}{\left(2^n \Omega_n R^n\right)^{1-n+p}}\right)^{1/(n-1)} \geq \left(c_1 \frac{(a/4)^p}{\left(2^n \Omega_n R^n\right)^{1-n+p}}\right)^{1/(n-1)} := \delta_2, \tag{13}$$

где δ_2 зависит только от p, R, a и n. Полагаем теперь $\Gamma_{1,2} = \Gamma\left(C_1, F, \overline{\mathbb{R}^n}\right)$. Заметим, что

$$M_p(\Gamma_{1,2}) = \operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus F,\, C_1\right) \tag{14}$$

в силу соотношения (8). Пусть $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_{1,2}$. Если $3\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_1$, либо $3\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_2$, то в силу неравенств (12) и (13) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x) \geq 3^{-p} \min\{\delta_1, \delta_2\}. \tag{15}$$

Пусть одновременно $3\rho \notin \operatorname{adm}\Gamma_1$ и $3\rho \notin \operatorname{adm}\Gamma_2$, тогда найдется пара кривых $\gamma_1 \in \Gamma_1$ и $\gamma_2 \in \Gamma_2$ таких, что

$$\int\limits_{\gamma_1} \rho(x)\, |dx| < 1/3, \qquad \int\limits_{\gamma_2} \rho(x)\, |dx| < 1/3. \tag{16}$$

В этом случае рассмотрим семейство кривых $\Gamma_4=\Gamma\left(|\gamma_1|,|\gamma_2|,B(0,2R)\setminus\overline{B(0,R)}\right)$, где, как обычно, $|\gamma|$ обозначает носитель кривой γ, т. е. $|\gamma|=\{x\in\mathbb{R}^n\colon \exists\, t\colon x=\gamma(t)\}$. Поскольку $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma_{1,2}$ и выполнены соотношения (16), имеем $\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,|dx|\ge 1/3$ для каждой кривой $\gamma\in\Gamma_4$. Однако тогда $3\rho\in\operatorname{adm}\Gamma_4$. По предложению 1

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^p(x)dm(x)\ge 3^{-p}M_p(\Gamma_4)\ge\delta_3, \tag{17}$$

где постоянная δ_3 зависит только от $n,\ p$ и R. Тогда в силу неравенств (15) и (17)

$$M_p(\Gamma_{1,2})\ge\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}:=\delta\,. \tag{18}$$

Требуемое утверждение следует из (18) на основании (14).

Лемма 1 доказана.

Кривая $\alpha\colon[a,\,c)\to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если: i) $\alpha(a)=x$; ii) $f\circ\alpha=\beta|_{[a,\,c)}$; iii) если $c<c'\le b$, то не существует кривой $\alpha'\colon[a,\,c')\to D$ такой, что $\alpha=\alpha'|_{[a,\,c)}$ и $f\circ\alpha'=\beta|_{[a,\,c')}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x\in\{f^{-1}(\beta(a))\}$. Тогда кривая $\beta\colon[a,\,b)\to\mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. следствие 3.3 гл. II в [10]).

Лемма 2. *Пусть $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое (p,Q)-отображение, $p\ge 1$. Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}Q(x)\psi_\varepsilon^p(|x-x_0|)\,dm(x)\le F(\varepsilon)\quad\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{19}$$

для некоторого $x_0\in D,\ 0<\varepsilon_0<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$ и некоторого семейства измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0,\varepsilon_0)$ функций $\{\psi_\varepsilon(t)\},\ \varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)$ таких, что

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_\varepsilon(t)dt<\infty\quad\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

Тогда

$$\operatorname{cap}_p f(E)\le F(\varepsilon)/I^p(\varepsilon,\varepsilon_0)\quad\forall\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)\,, \tag{20}$$

где $E=(A,\,C)\,,\ A=B\,(x_0,\,r_0)\,,\ C=\overline{B(x_0,\,\varepsilon)},\ r_0=\operatorname{dist}\,(x_0,\,\partial D)\,;$ считаем $r_0:=\infty$ при $D=\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Поскольку f — открытое и непрерывное отображение, то $E'=f(E)$ также является конденсатором. Если $\operatorname{cap}_p f(E)=0$, доказывать нечего. Пусть $\operatorname{cap}_p f(E)\ne 0$. Обозначим через $\Gamma^*_{f(E)}$ семейство всех спрямляемых кривых $\Gamma_{f(E)}$ (см. обозначения в соотношении (8)). Ясно, что кривые из $\Gamma^*_{f(E)}$ не проходят через ∞. Отметим, что $M_p\left(\Gamma^*_{f(E)}\right)=M_p\left(\Gamma_{f(E)}\right)=\operatorname{cap}_p f(E)$ (см. соотношение (8)). Заметим также, что каждая кривая $\gamma\in\Gamma^*_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие при отображении f, лежащее в A с началом в C. Пусть Γ^* — семейство максимальных поднятий кривых $\Gamma^*_{f(E)}$ при отображении f. Заметим, что $\Gamma^*\subset\Gamma_E$ (см., например, доказательство леммы 3.1 в [14]). Заметим также, что $\Gamma^*_{f(E)}>f(\Gamma^*)$, и, следовательно,

$$M_p\left(\Gamma^*_{f(E)}\right) \le M_p\left(f(\Gamma^*)\right) . \tag{21}$$

Рассмотрим $S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon)$, $S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0)$, где ε_0 взято из условия леммы и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Заметим, что, поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то $\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D\right) < \Gamma^*$ и, следовательно, $f(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D\right)) < f(\Gamma^*)$, поэтому

$$M_p\left(f(\Gamma^*)\right) \le M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D\right)\right)\right). \tag{22}$$

Из соотношений (21) и (22) следует, что $M_p\left(\Gamma^*_{f(E)}\right) \le M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D\right)\right)\right)$ и, таким образом, в силу соотношения (8)

$$\mathrm{cap}_p\, f(E) \le M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D\right)\right)\right). \tag{23}$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Заметим, что $\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\, dt = 1$. Тогда по определению кольцевого (p, Q)-отображения

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, D\right)\right)\right) \le \frac{1}{I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p_\varepsilon(|x-x_0|)\, dm(x). \tag{24}$$

Наконец, из соотношений (19), (23) и (24) следует соотношение (20).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное множество положительной p-емкости, $\mathfrak{F}_Q$ — семейство открытых дискретных кольцевых (p, Q)-отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, $p \in (n-1, n)$. Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p_\varepsilon(|x-x_0|)\, dm(x) = o\left(I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \tag{25}$$

для некоторой точки $x_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)$, где $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ — семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0, \varepsilon_0)$ функций таких, что $0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)dt < \infty$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда $\mathfrak{F}_Q$ равностепенно непрерывно в точке x_0.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$, $A = B\left(x_0, r_0\right)$, $C = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $r_0 = \mathrm{dist}\ (x_0, \partial D)$. Как и прежде, $r_0 := \infty$ при $D = \mathbb{R}^n$. Выберем произвольно число $a > 0$. Для этого числа найдется число $\delta = \delta(a)$, для которого выполнено условие леммы 1 относительно множества E, соответствующего условию леммы 3. Используя оценку (20), из условия (25) получаем $\mathrm{cap}_{\,p}\, f\left(\mathcal{E}\right) \le \alpha(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда для числа $\delta = \delta(a)$ найдется $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что

$$\mathrm{cap}_{\,p}\, f\left(\mathcal{E}\right) \le \delta \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_*(a)). \tag{26}$$

По соотношению (26) $\mathrm{cap}_{\,p}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E,\, f\left(\overline{B(x_0, \varepsilon)}\right)\right) \le \mathrm{cap}_{\,p}\Big(f\left(B(x_0, r_0)\right),$ $f\left(\overline{B(x_0, \varepsilon)}\right)\Big) \le \delta$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(a))$. Тогда из леммы 1 следует, что $h\left(f\left(\overline{B(x_0, \varepsilon)}\right)\right) < a$. Окончательно, для любого $a > 0$ существует $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что $h\left(f\left(\overline{B(x_0, \varepsilon)}\right)\right) < a$, как только $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*(a))$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $f\colon \mathbb{B}^n\setminus\{0\}\rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geq 2$, *— открытое дискретное кольцевое* (p,Q)*-отображение в точке* $x_0=0$, $n-1<p<n$, *удовлетворяющее условию* $\mathrm{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f\left(\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\right)\right)>0$. *Предположим, что существует* $0<\varepsilon_0<1$ *такое, что при* $\varepsilon\rightarrow 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p(|x|)\,dm(x)=o\left(I^p(\varepsilon,\varepsilon_0)\right), \tag{27}$$

где $\psi(t)$ *— неотрицательная на* $(0,\varepsilon_0)$ *функция такая, что* $0<I(\varepsilon,\varepsilon_0)=$ $=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty$ *для всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение* $f\colon \mathbb{B}^n\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\mathbb{B}^n$. *Непрерывность понимается в смысле пространства* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно хордальной метрики* h.

Доказательство. Предположим противное, т. е. отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0=0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ с $x_j\rightarrow 0$, $x_j'\rightarrow 0$, такие, что $h\left(f(x_j),\,f(x_j')\right)\geq a>0$ для всех $j\in\mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(0,\varepsilon_0)$. Положим $r_j=\max\left\{|x_j|,\,|x_j'|\right\}$. Соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(r_j)}\setminus\{0\}$. Обозначим эту кривую через C_j и рассмотрим конденсатор $E_j=(\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\,,C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f пара $f(E_j)$ также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$ (см. обозначения в соотношении (8)). Пусть Γ_j^* — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E_j)}$ при отображении f с началом в C_j, лежащих в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$. Имеем $\Gamma_j^*\subset\Gamma_{E_j}$. Поскольку $\Gamma_{f(E_j)}>f(\Gamma_j^*)$,

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\leq M_p\left(f(\Gamma_j^*)\right)\leq M_p\left(f(\Gamma_{E_j})\right). \tag{28}$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} разбивается на два подсемейства:

$$\Gamma_{E_j}=\Gamma_{E_{j_1}}\cup\Gamma_{E_{j_2}}, \tag{29}$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t)\colon[a,\,c)\rightarrow\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k\in[a,\,c)$ с $\alpha(t_k)\rightarrow 0$ при $t_k\rightarrow c-0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t)\colon[a,\,c)\rightarrow\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k\in[a,\,c)$ с $\mathrm{dist}\,(\alpha(t_k),\partial\mathbb{B}^n)\rightarrow 0$ при $t_k\rightarrow c-0$.

В силу соотношений (28), (29)

$$M_p\left(\Gamma_{f(E_j)}\right)\leq M_p(f(\Gamma_{E_{j_1}}))+M_p(f(\Gamma_{E_{j_2}})). \tag{30}$$

Покажем, что $M_p\left(f(\Gamma_{E_{j_1}})\right)=0$ для любого фиксированного $j\in\mathbb{N}$. Зафиксируем целое число $j\geq 1$ и положим $l_j=\min\{|x_j|,\,|x_j'|\}$. Из условия (27) следует, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\rightarrow\infty$ при $\varepsilon\rightarrow 0$, поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $I(a,b)>0$ при всех $a,\,b\in(0,\varepsilon_0)$. Рассмотрим кольцо $A_{\varepsilon,j}=\{x\in$ $\in\mathbb{R}^n\colon\varepsilon<|x|<l_j\}$ и соответствующее семейство функций

$$\eta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(\varepsilon,l_j), & t\in(\varepsilon,l_j),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(\varepsilon,l_j).\end{cases}$$

Имеем $\displaystyle\int\limits_{\varepsilon}^{l_j} \eta_\varepsilon(t)\,dt = \frac{1}{I\,(\varepsilon, l_j)} \int\limits_{\varepsilon}^{l_j} \psi(t)dt = 1$. Следовательно, по определению кольцевого (p,Q)-отображения,

$$M_p(f(\Gamma_{E_{j_1}})) \le \mathcal{F}(\varepsilon) := \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)^p} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^p(|x|)\,dm(x)\,. \tag{31}$$

Учитывая (27), имеем $\displaystyle\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^p(|x|)\,dm(x) = G(\varepsilon)\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt\right)^p$, где $G(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует, что $\mathcal{F}(\varepsilon) \to 0$. Отметим, что левая часть неравенства (31) не зависит от ε, а j фиксировано. Отсюда получаем $M_p(f(\Gamma_{E_{j_1}})) = 0$. Фиксируем (произвольно) некоторое $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Аналогично схеме, приведенной выше, рассмотрим кольцо $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_j < |x| < \varepsilon_1\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_j, \varepsilon_1), & t \in (r_j,\, \varepsilon_1), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_j,\, \varepsilon_1). \end{cases}$$

Имеем $\displaystyle\int\limits_{r_j}^{\varepsilon_1} \eta_j(t)dt = \frac{1}{I\,(r_j, \varepsilon_1)} \int\limits_{r_j}^{\varepsilon_1} \psi(t)dt = 1$. Таким образом, согласно условию (30) $M_p(f(\Gamma_{E_j})) \le \mathcal{S}(r_j) := \displaystyle\frac{1}{I(r_j, \varepsilon_1)^p} \int\limits_{r_j<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^p(|x|)\,dm(x)$. В силу условия (27) $\mathcal{S}(r_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Окончательно, в силу соотношения (8) $\operatorname{cap}_p f(E_j) \to 0$ при $j \to \infty$. С другой стороны, по лемме 1 $\operatorname{cap}_p f(E_j) \ge \delta > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x \to 0$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Лемма 4 доказана.

4. Доказательство основных результатов.

Предложение 2. *Пусть* $Q\colon D \to [1,\infty]$ *— измеримая по Лебегу функция,* $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $x_0 \in D$ *такие, что либо* $Q \in FMO(x_0)$, *либо* $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$. *Тогда можно указать* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и функцию* $\psi_\varepsilon(t) \equiv \psi(t) > 0$ *такие, что в точке* x_0 *выполнено условие* (25) *леммы* 3.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть $Q \in FMO(0)$ и $\varepsilon_0 < \min\left\{\,\operatorname{dist}\,(0, \partial D)\,,\ e^{-1}\right\}$. На основании следствия 6.3 гл. VI в [8] для функции $0 < \psi(t) = \dfrac{1}{(t\,\log\,(1/t))^{n/p}}$ будем иметь

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p(|x|)\;dm(x) = \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,dm(x)}{\left(|x|\log\dfrac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon \to 0$. Заметим также, что при малых t выполнено $\psi(t) \ge \dfrac{1}{t\,\log\,(1/t)}$, поэтому $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \displaystyle\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt \ge \log\frac{\log\,(1/\varepsilon)}{\log\,(1/\varepsilon_0)}$. Тогда

$$\frac{1}{I^p(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p(|x|)\;dm(x) \le O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-p} \to 0$$

при $\varepsilon\to 0.$ Таким образом, предложения 2 в случае $Q\in FMO$ доказано.

Покажем его справедливость в случае $q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r\to 0.$ Как и прежде, можно считать, что $x_0=0.$ Фиксируем $\varepsilon_0<\min\left\{\mathrm{dist}\,(0,\,\partial D)\,,\,1\right\}.$ Положим $\psi(t)=\dfrac{1}{(t\,\log{(1/t)})^{n/p}}.$ Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p(|x|)\;dm(x)\;=\int\limits_{\varepsilon\,<\,|x|\,<\,\varepsilon_0}\frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\dfrac{1}{|x|}\right)^n}=$$

$$=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\int\limits_{|x|=r}\frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\dfrac{1}{|x|}\right)^n}\,dS\right)dr\le$$

$$\le\omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r\log{(1/r)}}=\omega_{n-1}\log\frac{\log{(1/\varepsilon)}}{\log{(1/\varepsilon_0)}}\;\le\;\omega_{n-1}I(\varepsilon,\varepsilon_0),$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\;:=\;\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt\;\to\;\infty$ при $\varepsilon\;\to\;0.$ Отсюда снова $\dfrac{1}{I^p(\varepsilon)}\displaystyle\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^p(|x|)\;dm(x)\;\to 0$ при $\varepsilon\to 0.$

Предложение 2 полностью доказано.

***Доказательство утверждений* 1 *и* 2.** В случае условия $Q\in FMO(x_0),$ выполненного для произвольного $x_0\in D,$ как и в случае $q_{x_0}(r)=\,O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r\to 0,$ выполненного также для произвольного $x_0\in D,$ доказательство утверждения 1 непосредственно следует из леммы 3, предложения 2 и известного критерия Арцела – Асколи. Аналогично, доказательство утверждения 2 следует из леммы 4 и предложения 2.

5. Некоторые следствия. Как и в случае рассмотрения вопросов, связанных с устранением особенностей отображений с неограниченной характеристикой при $p=n$ (см., например, [14, 15]), из утверждения 2 вытекают некоторые следствия, формулировки которых приведены ниже. Их доказательство проводится аналогично упомянутому выше случаю $p=n,$ и поэтому в большинстве случаев не приводится.

Теорема 1. *Пусть $x_0\in D,$ $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое (p,Q)-отображение в точке $x_0,$ $n-1<p<n,$ а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо $q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r\to 0.$ Тогда точка x_0 является устранимой для отображения f в том и только в том случае, когда f ограничено в некоторой окрестности U точки $x_0.$*

Теорема 2. *Пусть $x_0\in D,$ $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое (p,Q)-отображение в точке $x_0,$ $n-1<p<n,$ а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0 либо $q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r\to 0.$*

Если $\operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f\left(U\setminus\{x_0\}\right)\right)>0$ *для некоторой окрестности* U *точки* x_0, *то* f *может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного кольцевого* (p,Q)*-отображения* $\overline{f}\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$.

Для отображения $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$, множества $E\subset D$ и $y\in\overline{\mathbb{R}^n}$ определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т. е.

$$N(y,f,E)=\operatorname{card}\left\{x\in E\colon f(x)=y\right\}.$$

Теорема 3 (аналог теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса). *Пусть* $x_0\in D$, $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — *открытое дискретное кольцевое* (p,Q)*-отображение в точке* x_0, $n-1<p<n$, *а функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* x_0 *либо* $q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r\to 0$. *Если* x_0 — *существенно особая точка отображения* f, *то существует множество* $C\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ *типа* F_σ *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$, *имеющее* p*-емкость нуль, такое, что* $N\left(y,f,U\setminus\{x_0\}\right)=\infty$ *для любой окрестности* U *точки* x_0 *и для всех* $y\in\overline{\mathbb{R}^n}\setminus C$.

Пусть теперь D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, содержащая внешность некоторого шара $B(0,r_0)$, $r_0>0$. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, $\varphi\in FMO(\infty)$, если функция $\varphi^*(x)=\varphi\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0, т. е. $\displaystyle\int\limits_{|x|>R}|\varphi(x)-\varphi_R|\frac{dm(x)}{|x|^{2n}}=O\left(\frac{1}{R^n}\right)$ при $R\to\infty$, где $\displaystyle\varphi_R=\frac{R^n}{\Omega_n}\int\limits_{|x|>R}\varphi(x)\frac{dm(x)}{|x|^{2n}}$ (см., например, разд. 5 в [15]). Аналогично, для бесконечности можно переформулировать условия вида $q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$:

$$\int\limits_{S(0,\,R)}Q(x)dS=O\left(R^{n-1}\left[\log R\right]^{n-1}\right). \tag{32}$$

Будем говорить, что отображение $f\colon\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое* (p,Q)*-отображение в точке* $x_0=\infty$, если отображение $\widetilde{f}=f\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$ является кольцевым (p,Q')-отображением в точке $x_0=0$ с $Q'=Q\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$, т. е. условие

$$M_p\left(f\left(\Gamma\left(S(R_1),S(R_2),A\right)\right)\right)\leq\int\limits_A Q(y)\eta^p\left(|y|\right)dm(y),$$

где $S(R_i)=S(0,R_i)$, $i=1,2$, выполнено в кольце $A=A(R_1,R_2,0)=\{R_1<|y|<R_2\}$ для произвольных $0<R_1<R_2<\infty$ и произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta\colon(R_1,R_2)\to[0,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\eta(r)\,dr\geq 1$. На основании утверждения 2 получаем следующий результат.

Теорема 4 (аналог теоремы Лиувилля). *Пусть* $f\colon\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — *открытое дискретное кольцевое* (p,Q)*-отображение в точке* $x_0=\infty$, $n-1<p<n$, *а функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* ∞ *либо удовлетворяет*

условию (32) *при* $R \to \infty$. *Тогда* $\operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) = 0$. *В частности,* f *не может отображать все* $\mathbb{R}^n$ *на ограниченную область.*

Доказательство. Предположим противное, а именно, что $\operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) > 0$. Тогда для вспомогательного отображения $\widetilde{f} = f\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$, $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, имеем $\widetilde{f}\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right) = f\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)$, поэтому

$$\operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \widetilde{f}\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)\right) = \operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)\right) \geq \operatorname{cap}_p\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) > 0.$$

В этом случае в силу теоремы 2 отображение $\widetilde{f}$ продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $\overline{\widetilde{f}}\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$. Это равносильно тому, что f также продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $\overline{f}\colon \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда множество $\overline{f}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\right)$ одновременно открыто и замкнуто в $\overline{\mathbb{R}^n}$, откуда следует, что $\overline{f}(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$. Однако последнее противоречит сделанному выше предположению.

Теорема 4 доказана.

1. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer, 1971. – **229**.
2. *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. – 1950. – **83**. – P. 101 – 129.
3. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969.
4. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973.
5. *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress Anal. – 2009. – P. 218 – 228.
6. *Gehring F.* Lipschitz mappings and p-capacity of rings in n-space // Ann. Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175 – 193.
7. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
9. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
10. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **3**, № 26.
11. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185 – 206.
12. *Caraman P.* Relations between p-capacity and p-module (I) // Rev. roum. math. pures et appl. – 1994. – **39**, № 6. – P. 509 – 553.
13. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – **465**. – P. 1 – 13.
14. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 6. – С. 131 – 158.
15. *Севостьянов Е. А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. РАН. Сер. мат. – 2010. – **74**, № 1. – С. 159 – 174.

Получено 25.10.10