УДК 519

П. Д. Варбанец, С. А. Кирбат (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ $\overline{S}_k(n)$

An asymptotic formula is constructed for a mean value of the function $\overline{S}_k(n)$ which is dual to the Smarandache function $S_k(n)$. O- and Ω-estimates for the second moment of the remainder term are obtained.

Побудовано асимптотичну формулу для середнього значення функції $\overline{S}_k(n)$, яка є дуальною до функції Смарандача $S_k(n)$. Отримано O- і Ω-оцінки другого моменту залишкового члена.

1. Введение. Пусть k — фиксированное натуральное число. Обозначим через $S_k(n)$ функцию натурального аргумента, которая определяется как наибольшее натуральное число m такое, что $m^k|n$. Функцию $\overline{S}_k(m)$ можно рассматривать как двойственную к функции Смарандача, исследованной в работах [1, 2]. Функция $\overline{S}_k(n)$ изучалась в работах [3, 4].

Целью настоящей статьи является построение верхних и нижних оценок остаточного члена в асимптотической формуле для среднего значения $\overline{S}_k(n)$.

Легко видеть, что функция $\overline{S}_k(n)$ мультипликативна и $\overline{S}_k(p^a) = p^{[a/k]}$ для простого числа p (здесь $[u]$ обозначает целую часть вещественного числа u). Отсюда следует, что производящий ряд Дирихле для последовательности $\{S_k(n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, в области $\Re s > 1$ имеет вид

$$F_k(s) := \sum \frac{\overline{S}_k(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)}. \tag{1}$$

Будем различать случаи $k = 2$ и $k \geq 3$.

Нам понадобятся некоторые стандартные обозначения: $s = \sigma + it$ — комплексное число; $\sigma = \Re s$, $t = \Im s$; $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана; символ Виноградова $\ll$ означает то же, что и символ Ландау O; γ — постоянная Эйлера; $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера; $\varepsilon > 0$ — произвольно малое, не всегда одно и то же; $\exp(u) = e^u$.

2. Вспомогательные результаты. Будем использовать некоторые факты о дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

Лемма 1. *Для $\zeta(s)$ справедливы следующие соотношения*:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O\left(|s-1|\right) \quad \textit{в окрестности точки} \quad s = 1, \tag{2}$$

$$\zeta(s) \ll |t|^{c(1-\sigma)^{3/2}} \left(\log|t|\right)^{2/3}, \quad c > 0 \ \textit{— константа},$$

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2, \quad |t \geq 3|, \tag{3}$$

$$\left(\zeta(s)\right)^{-1} \ll \left(\log(|t|+3)\right)^{2/3}, \quad \textit{если} \quad \sigma \geq 1,$$

$$\begin{aligned} &\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s), \quad \textit{где} \quad \chi(s) = \pi^{-1/2+s}\frac{\Gamma\left((1-s)/2\right)}{\Gamma\left(s/2\right)}, \\ &|\chi(s)| \asymp (1+|t|)^{1/2-\sigma}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt \ll T\min\left(\log T, \frac{1}{\sigma-1/2}\right), && \textit{если}\ \ \sigma \geq \frac{1}{2},\\
&\int\limits_1^T |\zeta(\sigma+it)|^4 dt \ll \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}T, && \textit{если}\ \ \sigma > \frac{1}{2},\\
&\int\limits_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt \ll T\log^4 T && \textit{в остальных случаях}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство см. в [5].

Лемма 2 (верхняя оценка среднего значения полинома Дирихле)**.** *Пусть* $S(s) = \sum_{N_1<n\leq N_2} a_n n^{-s}$ *— полином Дирихле,* $a_n \in \mathbb{C}$. *Тогда для любых вещественных* T_0 *и* T_1 *имеем*

$$\int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S(it)|^2 dt = \sum_{N_1<n\leq N_2} (T+Bn)|a_n|^2, \tag{6}$$

где B *— абсолютная постоянная.*

Доказательство см. в [4]).

Лемма 3 [6]**.** *Пусть для* $\Re s \geq \sigma_0$ *ряд Дирихле* $1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-s}$ *сходится абсолютно и определяет регулярную в области* $\left\{\Re s \geq \frac{1}{2},\ M \leq \Im s \leq 2M\right\}$ *функцию* $F(s)$, *причем* $F(s) \ll \exp(M^D)$ *и* $a_n \ll \exp(M^D)$ *для некоторого* $D>0$. *Тогда*

$$\frac{1}{M}\int\limits_M^{2M} \left|F\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \gg \sum_{n\leq \frac{1}{100}M} \frac{|a_n|^2}{n}\left(1-\frac{\log n}{\log M}+\frac{1}{\log\log M}\right). \tag{7}$$

3. Верхняя оценка $\boldsymbol{\Delta_k(x)}$. В работе [7] получена асимптотическая формула для суммы

$$G_k(x) := \sum_{n\leq x} \overline{S}_k(n).$$

Докажем теорему, которая уточняет главный член асимптотики для $G(x)$ и улучшает остаточный член.

Теорема 1. *При* $x\to\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$G_k(x) = A_k(x) + \Delta_k(x),$$

где

$$A_k(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi^2}x\left(\log x + 3\gamma - 1 - \dfrac{12}{\pi^2}\zeta'(2)\right), & \textit{если}\ \ k=2,\\[2ex] \dfrac{\zeta(2)}{\zeta(3)}x + \dfrac{\zeta(2/3)}{2\zeta(2)}x^{2/3}, & \textit{если}\ \ k=3,\\[2ex] \dfrac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)}x, & \textit{если}\ \ k\geq 4,\end{cases}$$

$$\Delta_k(x) \ll \begin{cases} x^{3/4}(\log x)^{3/2}, & \textit{если} \;\; k=2, \\ x^{1/2}(\log x)^{2}, & \textit{если} \;\; k=3, \\ x^{1/2}(\log x)^{3/2}, & \textit{если} \;\; k=4, \\ x^{1/2}\log x, & \textit{если} \;\; k\geq 5. \end{cases}$$

***Замечание* 1.** В работе [7] пропущено второе слагаемое главного члена асимптотики при $k=3$, а в остаточных членах x^{ε} мы заменили степенями $\log x$.

***Доказательство теоремы* 1.** Поскольку $\overline{S}_k(n) \leq n^{1/k}$, то, полагая $c_k = \dfrac{k+1}{k} + \dfrac{1}{\log x}$, по формуле Перрона для каждого $T > 1$ получаем

$$\sum_{n\leq x} \overline{S}_k(n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k-iT}^{c_k+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)}\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^{(k+1)/k}}{T}(\log x)^{\alpha}\right), \tag{8}$$

где α — кратность полюса подынтегральной функции в точке $s=1$ (т. е. $\alpha=2$, если $k=2$, и $\alpha=1$ при $k\geq 3$).

Пусть сначала $k=2$. Передвинем контур интегрирования на прямую $\Re s = \dfrac{3}{4}$. Тогда из оценок (3) – (5) и неравенства Коши – Шварца имеем

$$\sum_{n\leq x} \overline{S}_2(n) = \operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}\right) +$$

$$+O\left(\frac{x^{3/2}}{T}\right) + O\left(x^{3/4}(\log T)^{3/2}\right) + O\left(\frac{x^{3/2}}{T}\log^2 x\right).$$

Учитывая (2) и разложения

$$\frac{1}{\zeta(2s)} = \frac{1}{\zeta(2)} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}(s-1) + O(|s-1|^2), \quad \left(\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\right),$$

$$\frac{x^s}{s} = x + (x\log x - 1)(s-1) + O(|s-1|^2),$$

при $T=x$ получаем

$$S_2(x) = \frac{3}{\pi^2}x\left(\log x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2}\zeta'(2)\right) + O\left(x^{3/4}(\log x)^{3/2}\right). \tag{9}$$

При $k\geq 3$ передвинем контур интегрирования в (8) на прямую $\Re s = \dfrac{1}{2}$. Тогда

$$S_3(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-iT}^{1/2+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)}\frac{x^s}{s}ds +$$

$$+O\left(x^{1/2}\log^2 T\right) + O\left(\frac{x^{4/5}}{T}\log x\right) +$$

$$+\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)}\frac{x^s}{s}\right) + \operatorname*{res}_{s=\frac{2}{3}}\left(\frac{\zeta(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)}\frac{x^s}{s}\right). \tag{10}$$

Теперь в силу (5) и неравенства Коши – Шварца имеем

$$\left|\int\limits_{\frac12-iT}^{1/2+iT}\frac{\zeta(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)}\frac{x^s}{s}ds\right|\ll x^{1/2}\left(\int\limits_1^T\frac{\left|\zeta\left(\frac12+it\right)\right|^2}{t}dt\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_1^T\frac{\left|\zeta\left(\frac12+3it\right)\right|^2}{t}dt\right)^{1/2}\ll x^{1/2}\log^2 T. \tag{11}$$

Полагая $T = x$, получаем утверждение теоремы при $k = 3$. В случае $k = 4$ подынтегральная функция имеет полюс первого порядка в точке $s = \dfrac12$. Поэтому в новом контуре мы предусматриваем обход точки $s = \dfrac12$ по правой полуокружности $\left|s-\dfrac12\right| = \dfrac{1}{\log x}$. При $k \geq 5$ этот обход не нужен. Следовательно, рассуждая, как и в случае $k = 3$, находим

$$A_k(x) = \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)}x, \quad k = 4, 5, \ldots,$$

$$\Delta_4(x) = O\left(x^{1/2}(\log x)^{3/2}\right),$$

$$\Delta_k(x = O\left(x^{1/2}\log x\right), \quad k = 5, 6, \ldots,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

4. *O*-оценка среднего квадрата остаточного члена $\boldsymbol{\Delta_k(x)}$. Основной целью данной статьи является исследование $\Delta_k(x)$ в среднем квадратичном.

Теорема 2. *Для $X \to \infty$ имеем*

$$\int\limits_1^X \Delta_k^2(x)dx \ll \begin{cases} X^2(\log X)^{14/3}, & \textit{если } \ k=2,\\ X^{(k+3)/k}\log^2 X, & \textit{если } \ k\geq 3.\end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Сначала приведем стандартную формулу Перрона

$$\sum_{n\leq x}\overline{S}_k(n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F_k(s)\frac{x^s}{s}ds, \quad c>2, \tag{13}$$

где $F_k(s)$ определено формулой (1).

Положим

$$a(k) = a = \begin{cases}\dfrac12+\dfrac{1}{\log x}, & \text{если } \ k=2,\\[2ex] \dfrac{3}{2k}+\dfrac{1}{\log x}, & \text{если } \ k\geq 3.\end{cases}$$

Рассмотрим случай $k = 2$.

Передвинем контур интегрирования в (13) на прямую $\Re s = \dfrac12 + \dfrac{1}{\log x}$. Тогда согласно теореме о вычетах имеем

$$\Delta_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F_2(s) \frac{x^s}{s} ds. \tag{14}$$

Из (14) следует, что $\dfrac{1}{s}F_2(s)$ является преобразованием Меллина для функции $\Delta_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$, а потому равенство Парсеваля для преобразования Меллина приводит к соотношению

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_2(a+it)|^2 \frac{dt}{|a+it|^2} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \Delta_2^2\left(\frac{1}{x}\right) x^{2a-1} dx = \int\limits_{0}^{\infty} \Delta^2(x) x^{-2a-1} dx. \tag{15}$$

Известно, что интегралы в (15) слева и справа сходятся или расходятся одновременно.

Учитывая, что $F_2(s) = \zeta(s)\zeta(2s-1)\zeta^{-1}(2s)$, из (15) получаем

$$\int\limits_{X}^{2X} \Delta_2^2(x) dx \ll X^{2a+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(a+it)|^2 |\zeta(2a-1+2it)|^2}{|\zeta(2a+2it)|^2} \frac{dt}{|a+it|^2} \ll$$

$$\ll X^{2a+1} \int\limits_{0}^{\infty} \Delta_2^2(x) dx. \tag{16}$$

В последнем интеграле разобьем промежуток интегрирования на три части: $(0,3)$, $(3,Y)$ и (Y,∞), где $Y = \exp(10 \log X \log\log X)$.

В силу (3), (4) имеем

$$\zeta(2a-1+2it) =$$

$$= \zeta\left(\frac{2}{\log X} + 2it\right) \ll (1+t)^{1/2-2/\log X} \left|\zeta\left(1 - \frac{2}{\log X} + 2it\right)\right| \ll$$

$$\ll \begin{cases} \log X, & \text{если } 0 \le t \le 3, \\ t^{1/2-2/\log X + C_1(\log X)^{-3/2}} (\log t)^{2/3}, & \text{если } t \ge t \ge 3, \end{cases} \tag{17}$$

$$\zeta^{-1}\left(1 + \frac{2}{\log X} + 2it\right) \ll (\log(t+3))^{2/3}. \tag{18}$$

Поэтому, используя (2)–(5), (17), (18), получаем

$$I_1 := \int\limits_{0}^{3} |F_2(a+it)|^2 \frac{dt}{|a+it|^2} \ll \log^2 X, \tag{19}$$

$$I_2 := \int\limits_{3}^{Y} t^{-1-4/\log X} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log X} + it\right)\right|^2 t^{C_1(\log X)^{-3/2}} (\log t)^{8/3} dt \ll$$

$$\ll \int\limits_3^Y \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log X}+it\right)\right|^2 t^{-1+3/(\log X)}(\log t)^{8/3}dt. \tag{20}$$

Для вычисления последнего интеграла полагаем

$$U(t)=t^{-1+3/\log X}(\log t)^{8/3}, \qquad V(t)=\int\limits_3^t \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log X}{}_i v\right)\right|^2 dv,$$

а затем, интегрируя по частям и используя (5), приходим к оценке

$$I_2 \ll (\log X)^{14/3}. \tag{21}$$

Далее, имеем

$$I_3=\int\limits_Y^\infty |F_2(a+it)|^2\frac{dt}{|a+it|^2}=\sum_{i=1}^\infty \int\limits_{2^{j-1}Y}^{2^jY} |F_2(a+it)|^2\frac{dt}{|a+it|^2}. \tag{22}$$

Теперь, применяя предыдущие рассуждения, для каждого $M\geq Y$ получаем

$$\int\limits_M^{2M} |F_2(a+it)|^2\frac{dt}{|a+it|^2} \ll M^{-2/\log X}(\log M)^{11/3} \ll M^{-1/\log X}. \tag{23}$$

Следовательно, из (22), (23) имеем $I_3 \ll 1$, а потому

$$I_1+I_2+I_3 \ll (\log X)^{14/3}. \tag{24}$$

Таким образом, при $k=2$ теорема доказана.

При $k\geq 3$ переносим контур интегрирования в (13) на прямую $\Re s=\dfrac{3}{2k}+\dfrac{1}{\log X}$ и, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем

$$I_1 \ll \log^2 X, \quad I_2,\, I_3 \ll 1. \tag{25}$$

Поскольку соотношение (16) при $k\geq 3$ принимает вид

$$\int\limits_X^{2X} \Delta_k^2(x)dx \ll X^{2a(k)+1}(I_1+I_2+I_3), \tag{26}$$

непосредственно получаем утверждение теоремы при $k\geq 3$:

$$\int\limits_X^{2X} \Delta_k^2(x)dx \ll X^{(k+3)/k}\log^2 X. \tag{27}$$

Теорема доказана.

5. Ω-оценка. Теперь установим Ω-результат для второго момента остаточного члена $\Delta_k(x)$. При этом будем использовать схему A. Ivić, который в работе [8] получил Ω-оценку второго момента для остаточного члена в задаче о числе неизоморфных абелевых групп конечного порядка.

Теорема 3. *Справедлива оценка*

$$\int\limits_1^X \Delta_2^2(x)dx = \Omega(X^2 \log X).$$

Доказательство. Воспользуемся парой Меллина e^x, $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx, \quad \Re z > 0.$$

С помощью обратного преобразования Меллина получаем

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \quad c > 0.$$

Положим $x = U^h$, $h > 0$, и учтем, что $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. Тогда приходим к стартовому интегралу

$$\exp(-U^h) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} U^{-\omega} \Gamma\left(1 + \frac{\omega}{h}\right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad c_0 > 0. \tag{28}$$

Умножая обе части (28) на $n^{-s}\overline{S}_2(n)$, полагая $U = \dfrac{n}{Y}$ и суммируя по n, имеем

$$\sum_{n=1}^\infty \overline{S}_2(n) n^{-s} \exp\left(\left(-\frac{n}{y}\right)^h\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} F_2(s+\omega) Y^\omega \Gamma\left(1 + \frac{\omega}{h}\right) \frac{d\omega}{\omega}. \tag{29}$$

В дальнейшем считаем, что $s = \dfrac{1}{2} + it$, $T^{1-\delta} \le t \le T$, $Y = T^B$, $h = \log^2 T$, $\delta > 0$ — достаточно малое, $B > 1$ — подходящая постоянная (ее значение будет уточнено позже).

В (29) передвинем контур интегрирования на прямую $\Re s = -\dfrac{1}{4}$, при этом мы пройдем через два полюса подынтегральной функции в точках $\omega = 0$ и $\omega = 1 - s$.

Учтем, что вычет в точке $\omega = 0$ равен $F_2(s)$, а вычет в точке $\omega = 1 - s$ дает вклад в оценку интеграла в (29), равный $O(1)$ (чтобы это увидеть, достаточно воспользоваться формулой Стирлинга для $\Gamma(z)$ в полосе $-1 < \Re z \le 2$). Кроме того, интеграл на прямой $\Re\omega = -\dfrac{1}{4}$ также оценивается как $O(1)$ (в силу экспоненциального убывания $\Gamma(z)$ при $|\Im z| \to \infty$).

Таким образом, из (29) следует

$$F_2(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\overline{S}_k(n)}{n^s} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right) + O(1) =$$

$$= \sum_{n \le T} \frac{\overline{S}_2(n)}{n^s} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right) + \sum_{T < n \le 2Y} \frac{\overline{S}_2(n)}{n^s} \exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right) +$$

$$+\sum_{n>2Y}\frac{\overline{S}_2(n)}{n^s}\exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right)+O(1):=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3+O(1). \qquad (30)$$

Из определения $\overline{S}_2(n)$ следует, что $\overline{S}_2(n)\le n^{1/2}$, а потому условие $n>2Y$ в сумме $\sum_3$ приводит к оценке $\sum_3\ll 1$.

Таким образом,

$$F_2(s)=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+O(1).$$

Установим верхнюю и нижнюю оценки для интеграла

$$\int\limits_{T^{1-\delta}}^{T}\left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{t^2}.$$

Пусть $M\in[T^{1-\delta},T]$. В силу представления (1) имеем

$$\int\limits_{M}^{2M}\left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{t^2}\gg M^{-2}\int\limits_{M}^{2M}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{|\zeta(it)|^2}{|\zeta(1+2it)|^2}dt. \qquad (31)$$

Поскольку $|\zeta(\sigma+it)|=|\zeta(\sigma-it)|$, в силу (4)

$$|\zeta(1+2it)|=|\zeta(-2it)||\chi(1+2it)|=|\zeta(2it)||t|^{-1/2}.$$

Поэтому можно записать

$$\int\limits_{M}^{2M}\left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{t^2}\gg\int\limits_{M}^{2M}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{t}\gg\log M. \qquad (32)$$

Тогда

$$\int\limits_{T^{1-\delta}}^{T}\left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{t^2}\ge\sum_{j=1}^{[\delta\log(T/4)]}\int\limits_{2^{-j-1}T}^{2^{-j}T}\left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{t^2}\gg\log^2 T \qquad (33)$$

с постоянной в символе $\gg$, зависящей от δ.

С другой стороны,

$$\int\limits_{T^{1-\delta}}^{T}\left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{t^2}\ll\int\limits_{T^{1-\delta}}^{T}\left(\left|\sum\nolimits_1\right|^2+\left|\sum\nolimits_2\right|^2+O(1)\right)\frac{dt}{t^2}:=$$

$$:=\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2+O\left(T^{-1+\delta}\right). \qquad (34)$$

Далее, полагая $T_1=T^{1-\delta}$, $T_{1j}=2^jT_1$ и применяя лемму 2, имеем

$$\mathfrak{I}_1\ll T^{-2-2\delta}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-2j}\int\limits_{T_{1j-1}}^{T_{1j}}\left|\sum_{n\le T}\overline{S}_2(n)n^{-1/2+it}\exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right)\right|^2dt\ll$$

$$\ll T^{-2+2\delta}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-2j}\sum_{n\le T}(n-T_{1j})\frac{\overline{S}_2^2(n)}{n}\ll$$

$$\ll T^{-\frac{3}{2}+2\delta}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-2j}T\sum_{n\le T}\frac{\overline{S}_2(n)}{n}\ll T^{-1/2+2\delta}\log^2 T\ll T^{-\varepsilon} \tag{35}$$

$\left(\text{здесь } \delta<\frac{1}{8}, \varepsilon>0 - \text{достаточно малое число}\right)$.

Осталось оценить $\mathfrak{I}_2$.

По теореме 1 имеем

$$\sum_{n\le x}\overline{S}_2(n)=A_2(x)+O\left(x^{3/2}\log^{3/2}x\right)=A_2(x)+\Delta_2(x),$$

где $A_2(x)=\dfrac{3}{\pi^2}x\left(\log x+3\gamma-1-\dfrac{12}{\pi^2}\zeta'(2)\right)$.

Поэтому, применяя абелевое суммирование, получаем

$$\sum_{T<n\le Y}\overline{S}_2(n)h^{-1/2-it}\exp\left(-\left(\frac{n}{Y}\right)^h\right)\ll$$

$$\ll YT^{-1/2}t^{-1}\log T+\int_T^{2Y}u^{-1/2-it}\exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^h\right)d\Delta_2(u):=I_1+I_2. \tag{36}$$

Возьмем $B=2-\dfrac{3}{2}\delta$, тогда в силу $Y=T^B$, $T^{1-\delta}<t\le T$ имеем

$$I_1\ll T^{-\varepsilon}. \tag{37}$$

Далее, интегрированием по частям в I_2 получаем

$$I_2=O\left(T^{-1/2}T^{3/4}\right)+$$

$$+\int_T^{2Y}\Delta_2(u)\exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^h\right)\left(\frac{1}{2}+it+h\left(\frac{u}{Y}\right)^h\right)u^{-3/2-it}dt. \tag{38}$$

В последнем интеграле наибольший вклад дает слагаемое, содержащее множитель t. Поэтому простые вычисления приводят к оценке

$$I_2\ll T^{1/4}+\left|\int_T^{2Y}t\Delta_2(u)\exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^h\right)u^{-3/2-it}du\right|. \tag{39}$$

Таким образом, из (34)–(39) находим

$$\int_{T^{1-\delta}}^{T}\left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{dt}{t^2}\ll\int_{T^{1-\delta}}^{T}\left|\sum_{T\le n\le 2Y}\int_0^1\Delta_2(u+n)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\left(\frac{u+n}{Y}\right)^h\right)(u+n)^{-3/2-it}du\right|^2dt+O(1). \tag{40}$$

В последнем внутреннем интеграле применим неравенство Коши – Шварца, изменим порядок интегрирования, а затем применим лемму 1. В результате получим

$$\int_{T^{1-\delta}}^{T} \left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll$$

$$\ll \int_0^1 \sum_{T\le n\le 2Y} \Delta_2^2(u+n)\exp\left(-2\left(\frac{u+n}{Y}\right)^h\right)(u+n)^{-3}(n+T)du + O(1) \ll$$

$$\ll \int_T^Y \Delta_2^2(x)x^{-2}dx + O(1). \qquad (41)$$

Итак, в силу (33) и (41) имеем

$$\log^2 T \ll \int_{T^{1-\delta}}^{T} \left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll \int_T^Y \Delta_2^2(x)x^{-2}dx + O(1). \qquad (42)$$

Если теперь предположить, что

$$\int_M^{2M} \Delta_2^2(x)x^{-2}dx = o(M^2\log M),$$

то соотношение (42) перейдет в противоречивое соотношение

$$\log^2 T \ll \int_{T^{1-\delta}}^{T} \left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll o(\log^2 T).$$

Следовательно, мы доказали, что

$$\int_X^{2X} \Delta_2^2(x)dx = \Omega(X^2\log X).$$

Теорема 3 доказана.

***Следствие* 1.** $\Delta_2(x) = \Omega\left(x^{1/2}\log^{1/2} x\right)$.

***Замечание* 2.** По рассмотренной выше схеме доказательства теоремы 3 можно рассмотреть и случаи $k = 3, 4, \ldots$.

При $k = 3, 4, \ldots$, дословно повторяя предыдущие рассуждения, получаем неравенство

$$\int_{T^{1-\delta}}^{T} \left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll \int_T^Y \Delta_k(x)x^{-2}dx + O(1). \qquad (43)$$

Кроме того, при $k = 3$

$$\left|F_2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 = \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+3it\right)\right|^2 \left|\zeta^{-1}\left(\frac{3}{2}+3it\right)\right|^2.$$

Заметим, что при $\sigma > 1$

$$\zeta(\sigma+it)\zeta(\sigma+3it) = \sum \frac{C_n}{n^{\sigma+it}},$$

где

$$C_n = \sum_{m^3 d = n} a_m, \quad a_m = \begin{cases} m^{1/3}, & \text{если} \quad m = \ell^3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_{n \le x} \frac{|C_n|^2}{n} \gg \sum_{\substack{n \le x \\ n = \ell^3}} n^{-1/3} \gg \log x.$$

Поэтому при $k = 3$, применяя лемму 3, имеем

$$\frac{1}{M} \int\limits_M^{2M} \left| F_3 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \gg \log M. \tag{44}$$

При $k \ge 4$ непосредственно получаем

$$\frac{1}{M} \int\limits_M^{2M} \left| F_k \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \gg \frac{1}{M} \int\limits_M^{2M} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \gg \log M.$$

Следовательно, из оценок (43), (44) можно получить Ω-оценки вида

$$\int\limits_X^{2X} \Delta_k(x) dx = \Omega(X \log X), \quad k \ge 3,$$

которые, по-видимому, не интересны.

6. Заключение. Из теоремы 2 можно вывести, что для почти всех $x \le X$ при $X \to \infty$, за исключением $o(X)$, справедлива оценка $\Delta_2(x) \ll x^{1/2} \log^{1/2} x$. Поэтому можно сделать предположение, что при всех $k = 2, 3, \ldots$ и всех $x \to \infty$ $\Delta_k(x) \ll x^{1/2} \log^{\alpha_k} x$, $\alpha_k \ge 0$. Кроме того, сравнение теорем 2 и 3 показывает, что O- и Ω-оценки второго момента остаточного члена $\Delta_2(x)$ близки к неулучшаемым. Проблема построения Ω-оценок для второго момента $\Delta_k(x)$, $k \ge 3$, остается открытой.

1. *Balacenoin J., Seleacu V.* History of the Smarandache function // Smarandache Not. J. – 1999. – **10**, № 1–3. – P. 192 – 201.
2. *Ding Liping.* On the mean value of the Smarandache ceil function // Sci. Magna. – 2005. – **1**, № 2. – P. 74 – 77.
3. *Lu Yaming.* On a dual function of the Smarandache function // Res. on Smarandache Problems in the Number Theory (Hexis, Phoenix, AZ). – 2005. – **2**. – P. 55 – 57.
4. *Montgomery H., Vaughan R.* Hilbert's inequality // J. London Math. Soc. – 1974. – **2**, № 8. – P. 73 – 82.
5. *Ivić A.* The Riemann zeta-function. – New York: Joun Wiley Sons, 1985.
6. *Ramachandra K.* On the mean-value and Omega-theorems for the Riemann zeta-function // Tata Inst. Found. Res. – Bombay, 1995.
7. *Xiaoyan Li.* The mean value of the kth Smarandache dual function // Proc. Fifth Int. Conf. Number Theory and Smarandache Notions. – Hexis, 2009. – P. 128 – 132.
8. *Ivić A.* On the number of subgroups of finite abelian groups // J. Théorie Nombres Bordeaux. – 1997. – **9**. – P. 371 – 381.

Получено 25.10.10