УДК 517.9

О. В. Капустян, Т. Б. Шкляр (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ДОДАТНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВКЛЮЧЕНЬ СУБДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Sufficient conditions of the existence of a nonnegative solution are obtained for an evolution inclusion of subdifferential type with multivalued non-Lipschitz perturbation. Under the additional condition of dissipativity, the existence of the global attractor in the class of nonnegative functions is proved.

Получены достаточные условия существования неотрицательного решения для эволюционного включения субдифференциального типа с многозначным нелипшицевым возмущением. При дополнительном условии диссипативности доказано существование глобального аттрактора в классе неотрицательных функций.

Вступ. У роботі розглядається проблема розв'язності у класі невід'ємних функцій для еволюційного включення субдиференціального типу з багатозначним неліпшицевим збуренням типу Немицького, що є напівнеперервним зверху. Систематичні дослідження проблеми розв'язності і регулярності для нескінченновимірних еволюційних включень субдиференціального типу з ліпшицевим по фазовій змінній однозначним збуренням проведено в [1, 2]. У класі багатозначних збурень відповідні результати одержано в [3, 4]. Сучасні дослідження в цьому напрямі викладено в [5]. Існування невід'ємних розв'язків для неліпшицевих еволюційних рівнянь параболічного типу для гладких збурень одержано в [6], для неперервної правої частини — в роботі [7]. У даній роботі за допомогою апроксимації типу Моро – Іосіди багатозначного неліпшицевого збурення доведено існування невід'ємного розв'язку, а також за додаткової умови дисипативності доведено існування глобального атрактора [8] для багатозначного напівпотоку, породженого цими розв'язками.

Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ — обмежена область, $H = L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ — норма і скалярний добуток в H, $H^+ = \{u \in H \mid u(x) \geq 0$ майже скрізь$\}$, $P(H)$ — сукупність усіх непорожніх підмножин H, $C_v(H)$ — сукупність усіх непорожніх замкнених обмежених опуклих підмножин H.

Розглядаємо задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + G(y), \quad t \in (0,T), \\ &y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\varphi\colon H \mapsto (-\infty, +\infty]$ — власна опукла напівнеперервна знизу (н.н. зн.) функція, $D(\varphi) = \{u \in H \mid \varphi(u) < +\infty\}$, $\partial\varphi\colon D(\partial\varphi) \mapsto P(H)$ — її субдиференціал, $G\colon H \mapsto C_v(H)$ — напівнеперервне зверху (н. н. зв.) багатозначне відображення [9].

Тут і далі напівнеперервність знизу і зверху скалярнозначних функцій будемо розуміти у класичному сенсі, натомість для багатозначного відображення $F\colon H \mapsto P(H)$ будемо казати, що F є н. н. зв. у точці x_0, якщо

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in O_\delta(x_0)\colon\ F(x) \subset O_\epsilon(F(x_0)),$$

де $O_\epsilon(A) = \left\{ x \in H \,\middle|\, \inf\limits_{y \in A} \|x - y\| < \epsilon \right\}$. Для однозначного відображення ця властивість збігається зі звичайною неперервністю.

© О. В. КАПУСТЯН, Т. Б. ШКЛЯР, 2011

За умов

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in H\colon \ \|G(u)\|_{+} := \sup_{v \in G(u)} \|v\| \le C(1 + \|u\|), \tag{2}$$

$$\forall R > 0\colon \ \big\{u \in H \mid \|u\| \le R, \ \varphi(u) \le R\big\} - \text{компакт в } H \tag{3}$$

відомо [2, с. 188, 189], [4] (теорема 2.1), що для будь-якого $y_0 \in \overline{D(\varphi)}$ задача (1) має (сильний) розв'язок, тобто існують $y(\cdot) \in \mathbb{C}([0,T];H)$ і $f(\cdot) \in L^1(0,T;H)$ такі, що $y(\cdot)$ є абсолютно неперервною на $[a,b] \subset (0,T)$, $y(t) \in D(\partial\varphi)$ для майже всіх (м. в.) $t \in (0,T)$, $f(t) \in G(y(t))$ для м. в. $t \in (0,T)$ і майже скрізь (м. с.) на $(0,T)$

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) + f(t), \\ &y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Розв'язок (4) з фіксованою $f(\cdot) \in L^1(0,T;H)$ будемо позначати $y(\cdot) = I(y_0)f(\cdot) \in \mathbb{C}([0,T];H)$. Оскільки згідно з умовами (3) $-\partial\varphi$ породжує компактну напівгрупу, то відображення $I(y_0)\colon L^1(0,T;H) \mapsto \mathbb{C}([0,T];H)$ переводить будь-яку рівномірно інтегровну множину в передкомпактну [3, с. 162]. Отже, справедливим є наступне твердження, що випливає з [3] (твердження 1.2, лема 1.1).

Лема 1. *Якщо для послідовності $\{f_n\} \subset L^1(0,T;H)$ існує $\gamma(\cdot) \in L^1(0,T)$ таке, що $\|f_n(t)\| \le \gamma(t)$ м. с., то по підпослідовності $f_n \overset{w}{\to} f$ в $L^1(0,T;H)$ $y_n(\cdot) = I(y_0)f_n(\cdot) \to y(\cdot) = I(y_0)f(\cdot)$ в $\mathbb{C}([0,T];H)$.*

Нехай G — багатозначне відображення типу Немицького, тобто

$$\exists g\colon \ \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R}) \text{ н. н. зв.}, \quad |g(y)|_{+} \le C(1 + |y|) \tag{5}$$

таке, що

$$\forall y \in H\colon G(y) = \big\{u \in H | u(x) \in g(y(x)) \text{ м. с.}\big\}. \tag{6}$$

Тоді [8] для будь-якого $y \in H$ $G(y) \ne \oslash$ і $G\colon H \mapsto C_v(H)$ задовольняє умову (2) з константою $C(1 + (\operatorname{meas}\Omega)^{1/2})$.

Основна мета роботи — з'ясувати умови на функції φ і g, за яких для будь-якого $y_0 \in H^+$ задача (1) мала б розв'язок $y(\cdot)$ такий, що $y(t) \in H^+$ $\forall t \in [0,T]$.

Основний результат. У подальшому викладі будемо використовувати наступні результати [3, 8]. Для $y(\cdot) = I(y_0)\alpha(\cdot)$, $z(\cdot) = I(z_0)\beta(\cdot)$ при всіх $0 \le s \le t \le T$ справджується оцінка

$$\|y(t) - z(t)\| \le \|y(s) - z(s)\| + \int_s^t \|\alpha(p) - \beta(p)\|\, dp. \tag{7}$$

З (5) випливає, що для будь-якого $y \in \mathbb{R}$ $g(y) = [\kappa(y), f(y)]$, де $\kappa\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ н. н. зн., $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ н. н. зв.,

$$|\kappa(y)| \le C(1 + |y|), \qquad |f(y)| \le C(1 + |y|). \tag{8}$$

Додаткова умова на $g(\cdot)$ має вигляд

$$f(0) \geq 0. \tag{9}$$

Для $y \in H$ означимо функцію $y^+ \in H^+$ таким чином:

$$y^+(x) = \max\{0, y(x)\}.$$

Додаткові умови на φ:

$$\overline{D(\varphi)} = H, \qquad \varphi(y) - \varphi(y^+) \geq -D \left\|y - y^+\right\|^2 \quad \forall y \in H. \tag{10}$$

Умови (10) задовольняє наступний клас функцій φ [2]:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx + \displaystyle\int\limits_\Omega j(u(x))dx, \ u \in {H_0}^1(\Omega), & j(u) \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \tag{11}$$

де $j\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ опукла н. н. зн., $j(u) \geq -Du^2\ \forall u \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що якщо $g(\cdot)$ є однозначною, а φ має вигляд (11) з $j \equiv 0$, то (1) — нелінійне параболічне рівняння, для якого за умови (9) в роботі [7] доведено глобальну розв'язність у класі H^+.

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай функція φ задовольняє умови* (3), (10), *для відображення $G(y) = \big\{u \in H | u(x) \in [\kappa(y(x)), f(y(x))]$ м. с.$\big\}$ виконуються умови* (8), (9). *Тоді для будь-якого $y_0 \in H^+$ задача* (1) *має принаймні один розв'язок $y(\cdot)$, для якого $y(t) \in H^+\ \forall t \in [0, T]$.*

Доведення. Для $n \geq 1$ розглянемо апроксимації типу Моро – Іосіди [2]

$$f_n(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \Big(f(y) - \frac{n}{2}|y - x|^2\Big), \tag{12}$$

де згідно з (8), (9) $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ н. н. зв., $|f(y)| \leq C(1 + |y|)$, $f(0) \geq 0$. Хоча f не обов'язково угнута, умова не більш як лінійного зростання дозволяє легко отримати наступні властивості $f_n(\cdot)$:

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\colon\ f_n(x) < +\infty, \quad f_n(x) \geq f(x), \quad f_n(0) \geq f(0) \geq 0,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists x_n\colon\ f_n(x) = f(x_n) - \frac{n}{2}|x_n - x|^2, \quad \text{до того ж} \quad x_n \to x, \quad n \to \infty,$$

$$f(x) \leq f_n(x) \leq f(x_n),$$

$$f(x_n) \to f(x), \qquad f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty,$$

$$|f_n(x)| \leq C_1(1 + |x|), \qquad |f_n(x) - f_n(y)| \leq C_1 n(1 + |x| + |y|)|x - y|,$$

де константа $C_1 > 0$ не залежить від n, x, y.

Тоді для відображень

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f_n(x), & |x| < n, \\ f_n(n), & x \geq n, \\ f_n(-n), & x \leq -n, \end{cases} \tag{13}$$

одержуємо наступні властивості:

1) $f^{(n)}(0) \geq f(0) \geq 0 \; \forall n \geq 1$;
2) для $|x| < n \; f(x) \leq f^{(n+1)}(x) = f_{n+1}(x) \leq f_n(x) = f^{(n)}(x) \; \forall n \geq 1$;
3) $\forall n \geq 1 \; \forall x \in \mathbb{R} \colon |f^{(n)}(x)| \leq C_1(1 + |x|)$;
4) $f^{(n)}(x) \to f(x), \; n \to \infty \; \forall x \in \mathbb{R}$;
5) $\forall n \geq 1 \; \exists C(n) > 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R} \colon \left| f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y) \right| \leq C(n) \, |x - y|$.

Розглянемо відображення F_n, $n \geq 1$, що діє за правилом

$$F_n(y)(x) = f^{(n)}(y(x)) \quad \forall y \in H.$$

З властивості 5 маємо, що для будь-якого $n \geq 1$ відображення $F_n \colon H \mapsto H$ є неперервним. З властивості 3 отримуємо

$$\|F_n(y)\| \leq \widetilde{C}(1 + \|y\|),$$

де $\widetilde{C} = C_1(1 + (\operatorname{meas} \Omega)^{1/2})$. З властивості 5 випливає нерівність

$$\|F_n(y) - F_n(z)\| \leq C(n)\|y - z\|. \tag{14}$$

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + F_n(y), \quad t \in (0, T), \\ &y(0) = y_0 \in H^+, \end{aligned} \tag{15}$$

яка внаслідок ліпшицевості F_n має єдиний розв'язок $y_n(\cdot) \in \mathbb{C}([0, T]; H)$ [1, 2].

Покладемо $l_n(t) = f^{(n)}(y_n(t))$. Тоді $y_n(\cdot) = I(y_0)l_n(\cdot)$ і з властивості 3 для будь-якого $t \in [0, T]$ одержуємо $\|l_n(t)\| \leq \widetilde{C}(1 + \|y_n(t)\|)$. Крім того, використовуючи функцію $z(\cdot) = I(y_0)0$ і оцінку (7), для всіх $t \in [0, T]$ маємо оцінку

$$\|y_n(t)\| \leq C_2 + \int_0^t \|l_n(s)\| ds,$$

де $C_2 = \max_{t \in [0,T]} \|z(t)\|$. Тоді, враховуючи наведену вище оцінку для $\|l_n(t)\|$, $t \in [0, T]$, з леми Гронуолла виводимо

$$\max_{t \in [0,T]} \|y_n(t)\| \leq (C_2 + \widetilde{C}T)e^{\widetilde{C}T}.$$

Отже, $\|l_n(t)\| \leq \widetilde{C}(1 + (C_2 + \widetilde{C}T)e^{\widetilde{C}T}) \; \forall t \in [0, T]$. З леми 1 випливає, що існують $y(\cdot) \in \mathbb{C}([0, T]; H)$ і $l(\cdot) \in L^1(0, T; H)$ такі, що по підпослідовності

$$y_n(\cdot) = I(y_0)l_n(\cdot) \to y(\cdot) = I(y_0)l(\cdot) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}([0, T]; H),$$

$$l_n(\cdot) \xrightarrow{w} l(\cdot) \quad \text{в} \quad L^1(0, T; H).$$

Покажемо, що $l(t) \in G(y(t))$ м. с., тобто $y(\cdot)$ — розв'язок задачі (1).

Оскільки $y_n \to y$ в $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, то існує підпослідовність $\{y_{n_k}\}$ така, що для всіх (t, x) із множини повної міри $Q_1 \subset (0, T) \times \Omega$ маємо $y_{n_k}(t, x) \to y(t, x)$, $n_k \to \infty$.

Позаяк $l_n(\cdot) \xrightarrow{w} l(\cdot)$ в $L^1(0,T;H)$, то за теоремою Мазура існують числа $\lambda_k^m \geq 0$, $\sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k^m = 1$, $\lambda_k^m = 0$, крім скінченної кількості, такі, що $S_m = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k^m l_k \to \to l$ в $L^1(0,T;H)$. Тоді існує підпослідовність (для якої залишимо позначення $\{S_m\}$) така, що для всіх (t,x) із множини повної міри $Q_2 \subset (0,T) \times \Omega$ маємо $S_m(t,x) \to l(t,x)$, $m \to \infty$.

Виберемо довільне $(t,x) \in Q_1 \cap Q_2$ і зафіксуємо довільне $n > 1 + |y(t,x)|$. Оскільки функція κ напівнеперервна знизу, правильною є властивість 5 і $y_{n_k}(t,x) \to \to y(t,x)$, то існує $n_{k_0} > n$ таке, що для довільного $n_k \geq n_{k_0}$ маємо

$$|y_{n_k}(t,x)| < n, \tag{16}$$

$$\kappa(y_{n_k}(t,x)) \geq \kappa(y(t,x)) - \frac{1}{n}, \qquad f^{(n)}(y_{n_k}(t,x)) \leq f^{(n)}(y(t,x)) + \frac{1}{n}. \tag{17}$$

Враховуючи (16) і властивість 2, переконуємося, що для довільного $n_k \geq n_{k_0}$ і $k \geq k_0$

$$f(y_{n_k}(t,x)) \leq f^{(k)}(y_{n_k}(t,x)) \leq f^{(n)}(y_{n_k}(t,x)).$$

Звідси і з (17) з урахуванням нерівності $\kappa \leq f$ на $\mathbb{R}$ випливає, що для довільного $k \geq k_0$

$$\kappa(y(t,x)) - \frac{1}{n} \leq l_k(t,x) \leq f^{(n)}(y(t,x)) + \frac{1}{n}.$$

Тоді при всіх $m > k_0$ для опуклих комбінацій $S_m(t,x)$ виконується нерівність

$$\kappa(y(t,x)) - \frac{1}{n} \leq S_m(t,x) \leq f^{(n)}(y(t,x)) + \frac{1}{n}.$$

З останньої нерівності маємо

$$\kappa(y(t,x)) - \frac{1}{n} \leq l(t,x) \leq f^{(n)}(y(t,x)) + \frac{1}{n}.$$

Звідси, враховуючи властивість 4, отримуємо $l(t,x) \in \big[\kappa(y(t,x)), f(y(t,x))\big]$, і шукану властивість доведено.

Залишилось показати, що для будь-яких $n \geq 1$ і $t \in [0,T]$ $y_n(t) \in H^+$. Далі будемо відкидати індекс n, вважаючи, що $F_n \equiv F$ задовольняє (14) з константою Ліпшиця $C > 0$, $(Fy)(x) = \widehat{f}(y(x))$, $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — глобально ліпшицева функція, що має не більш як лінійне зростання і задовольняє умову $\widehat{f}(0) \geq 0$. Розглянемо включення (15) на (δ,T), $\delta > 0$, і домножимо його скалярно в H на $(-y)^+$. Одержимо рівність

$$\left(\frac{dy}{dt}, (-y)^+\right) = -(\xi, (-y)^+) + (F(y), (-y)^+), \quad \text{де} \quad \xi \in \partial\varphi(y(t)).$$

Згідно з результатами [2] $\dfrac{dy}{dt} \in L^2(\delta,T;H)$, отже, з [10] маємо, що м. с. на (δ,T)

$$\left(\frac{dy}{dt}, (-y)^+\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(-y)^+\|^2.$$

Далі, згідно з умовою (10) для будь-якого $\xi \in \partial\varphi(y(t))$ $-(\xi,(-y)^+) = (\xi, y - y^+) \geq \geq \varphi(y) - \varphi(y^+) \geq -D\|(-y)^+\|^2$. На підставі властивостей 1 і 5 $(F(y),(-y)^+) =$

$$= -(F(y), y - y^+) = -(F(y) - F(y^+), y - y^+) - (F(y^+), y - y^+) \geq -C\|(-y)^+\|^2 +$$
$$+ \int_\Omega \widehat{f}(y^+(x))(-y)^+(x)dx = -C\|(-y)^+\|^2 + \int_\Omega \widehat{f}(0)(-y)^+(x)dx \geq -C\|(-y)^+\|^2.$$

Таким чином, на (δ, T) маємо

$$\frac{d}{dt}\left\|(-y)^+\right\|^2 \leq K\|(-y)^+\|^2,$$

де $K = 2(C + D)$. Тоді для будь-якого $t \in [\delta, T]$

$$\|(-y(t))^+\|^2 \leq \|(-y(\delta))^+\|^2 e^{K(t-\delta)}.$$

Оскільки $(-y)^+ \in \mathbb{C}([0,T]; H)$, то при $\delta \to 0+$ одержимо

$$\|(-y(t))^+\|^2 \leq \|(-y(0))^+\|^2 e^{Kt} = 0 \quad \forall t \in [0,T],$$

бо $y_0 \in H^+$. Отже, $y(t) \in H^+$ для будь-якого $t \in [0,T]$ і теорему доведено.

Зауваження. Теорема не гарантує, що всі розв'язки задачі (1) з $y_0 \in H^+$ мають властивість $y(t) \in H^+$ для будь-якого $t \in [0,T]$.

Існування глобального атрактора у класі H^+.

Означення 1 [7, 8]. *Нехай (X, ρ) — метричний простір. Відображення $G : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto P(X)$ називається m-напівпотоком, якщо*

$$G(0, x) = x \quad \forall x \in X,$$
$$G(t + s, x) \subseteq G(t, G(s, x)) \quad \forall x \in X \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+,$$

де $G(t, B) = \bigcup_{x \in B} G(t, x)$ для непорожньої множини B в X.

G називається строгим m-напівпотоком, якщо $G(t + s, x) = G(t, G(s, x))$.

Означення 2 [8]. *Компактна множина $A \subset X$ називається глобальним атрактором m-напівпотоку G, якщо:*

1) $A \subseteq G(t, A)$ $\forall t \geq 0$;

2) *для довільної обмеженої множини $B \subset X$ $\operatorname{dist}(G(t, B), A) \to 0$, $t \to +\infty$, де $\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y)$ — напівметрика Хаусдорфа.*

Глобальний атрактор A називається інваріантним, якщо $A = G(t, A)$ $\forall t \geq 0$.

Згідно з теоремою 1 для будь-якого $y_0 \in H^+$ можемо коректно означити множину

$$K^+(y_0) = \big\{y(\cdot) | y(\cdot) - \text{розв'язок задачі (1) на } (0, +\infty),$$
$$y(0) = y_0, \ y(t) \in H^+ \ \forall t \geq 0\big\}.$$

Розглянемо відображення $G\colon \mathbb{R}_+ \times H^+ \mapsto P(H^+)$:

$$G(t, y_0) = \{y(t) \mid y(\cdot) \in K^+(y_0)\}. \tag{18}$$

Згідно з наведеним вище зауваженням для фіксованого $t > 0$ $G(t, y_0) \neq \widetilde{G}(t, y_0) \cap \cap H^+$, де $\widetilde{G}(t, y_0) = \big\{y(t) \mid y(\cdot) - \text{розв'язок задачі (1)}, y(0) = y_0\big\}$. Таким чином, відомі для $\widetilde{G}$ результати [8] не можна автоматично перенести на G.

Розглянемо наступну додаткову умову дисипативності:

$\exists \delta > 0,\ M > 0 \quad \forall u \in D(\partial\varphi) \cap H^+,\ \|u\| > M,\ \forall y \in -\partial\varphi(u) + G(u)$ виконується

$$(y,u) \le -\delta. \tag{19}$$

Зауважимо, що умова (19) для класу функцій $\varphi(\cdot)$ з (11) випливає з умови

$$\lambda_1 > C + D, \tag{20}$$

де константу $C > 0$ взято з умови (2), D — константа з умов на функцію $j(\cdot)$ з прикладу (11) і λ_1 — перше власне число оператора $-\Delta$ в ${H_0}^1(\Omega)$.

Теорема 2. *За умов* (3), (8)–(10), (19) *формула* (18) *визначає строгий m-напівпотік, для якого у фазовому просторі H^+ існує інваріантний стійкий глобальний атрактор $A \subset H^+$, де під стійкістю розуміється властивість*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \ge 0\colon\ G(t, O_\delta(A)) \subset O_\epsilon(A).$$

Доведення. Перевіримо умови означення m-напівпотоку для $X = H^+$. Очевидно, що для будь-якого $y_0 \in H^+$ $G(0,y_0) = y_0$. Нехай $\xi \in G(t+s,y_0)$. Тоді $\xi = y(t+s)$, $y(\cdot) \in K^+(y_0)$. Покладемо $z(b) = y(b+s)$. Тоді $z(0) = y(s) \in G(s,y_0)$, $z(\cdot) \in K^+(z(0))$, отже, $\xi = y(t+s) = z(t) \in G(t,y(s))$. Нехай $\xi \in G(t,G(s,y_0))$. Тоді $\xi = y(t)$, $y(\cdot) \in K^+(y(0))$, $y(0) = z(s) \in G(s,y_0)$, $z(\cdot) \in K^+(y_0)$. Розглянемо функцію

$$\theta(\mu) = \begin{cases} z(\mu), & \mu \in [0,s], \\ y(\mu - s), & \mu \ge s. \end{cases}$$

Тоді $\theta(\cdot) \in K^+(y_0)$ і $\theta(t+s) = \xi \in G(t+s,y_0)$. Отже, G — строгий m-напівпотік.

Внаслідок міркувань, аналогічних викладеним у [8, c. 36] (теорема 2.3), властивість (19) гарантує, що для будь-яких $N > M$ і $t \ge 0$ $G(t,B_N) \subset B_N$, де $B_N = \{u \in H^+ \mid \|u\| \le N\}$, та для будь-якого $y_0 \in H^+$ $\operatorname{dist}(G(t,y_0),B_0) \to 0$, $t \to +\infty$, де $B_0 = \{u \in H^+ \mid \|u\| \le M + \epsilon\}$, ϵ — довільне фіксоване додатне число. Доведемо цей факт. Спочатку покажемо, що $G(t,B_N) \subset B_N$ для довільних $N > M$ і $t \ge 0$. Від супротивного, нехай $N > M$, $y_0 \in B_N$, $y(\cdot) \in K^+(y_0)$ такі, що для деякого $t > 0$ $y(t) \notin B_N$, тобто $\|y(t)\| > N$. Оскільки $y(\cdot)$ неперервна, то існує $t_0 > 0$ таке, що $\|y(t_0)\| = N$, $\|y(\tau)\| > N$ $\forall \tau \in (t_0,t]$. Позаяк $y(\cdot)$ — єдиний сильний розв'язок задачі (4), де $f(\cdot)$ — селектор, що відповідає $y(\cdot)$, то з [2, c. 188, 189] маємо, що $\dfrac{dy}{dt} \in L^2(s,T;H)$ для будь-яких $T > s > 0$. Звідси випливає рівність $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = \left(\dfrac{dy(t)}{dt}, y(t)\right)$ для м. в. $t > 0$. Далі, використовуючи умову дисипативності (19), отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 \le -\delta \quad \text{для м. в.} \quad \tau \in [t_0,t].$$

Тому $\|y(t)\|^2 \le \|y(t_0)\|^2 - 2\delta(t - t_0)$, що суперечить нерівності $\|y(t)\| > N$.

Покажемо, що для будь-якого $y \in H^+$ існує $t_0 = t_0(y)$ таке, що $G(t_0,y) \subset B_0$. Припустимо обернене. В цьому випадку із властивості $G(t,B_0) \subset B_0$ випливає, що існує $y_0 \notin B_0$ таке, що $G(t,y_0) \not\subset B_0$ $\forall t \ge 0$. Тоді, враховуючи умову (19), встановлюємо, що для всіх $t_0 \ge 0$ існує $y(\cdot) \in K^+(y_0)$ таке, що $y(\tau) \notin B_0$ $\forall \tau \in [0,t_0]$. Візьмемо $t_0 > \dfrac{\|y_0\|^2 - (M+\epsilon)^2}{2\delta}$. Використовуючи умову дисипативності (19), отримуємо

$$\|y(t_0)\|^2 \leq \|y_0\|^2 - 2\delta t_0 < (M+\epsilon)^2,$$

що приводить до суперечності. Тоді для будь-якого $t > t_0$ $G(t,y) = G(t - t_0 + t_0, y) = G(t-t_0, G(t_0,y)) \subset G(t-t_0, B_0) \subset B_0$. Тому для всіх $y_0 \in H^+$ маємо

$$\operatorname{dist}(G(t,y_0), B_0) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Теорему буде доведено, якщо показати виконання наступних властивостей [7, 8]:

а) m-напівпотік G асимптотично напівкомпактний зверху, тобто для будь-яких $r > 0$, $t_n \nearrow \infty$ і $\xi_n \in G(t_n, B_r)$ послідовність $\{\xi_n\}$ є передкомпактною;

б) m-напівпотік G має компактний графік, тобто для будь-яких $t_n \to t_0, \eta_n \to \eta_0$ і $\xi_n \in G(t_n, \eta_n)$ принаймні по підпослідовності $\xi_n \to \xi_0 \in G(t_0, \eta_0)$.

Властивість а) випливає з вкладення

$$\xi_n \in G(t_n, B_r) = G(t_n - 1 + 1, B_r) \subset G(1, G(t_n - 1, B_r)) \subset G(1, B_R) \subset \tilde{G}(1, B_R),$$

що справедливе для деякого $R > 0$ і достатньо великих $n \geq 1$, та передкомпактності множини $\tilde{G}(1, B_R)$ [8, с. 36] (теорема 2.3). Доведемо властивість б). Нехай $t_n \to t_0, \eta_n \to \eta_0$ і$\xi_n \in G(t_n, \eta_n)$ для всіх n. Тоді $\xi_n = y_n(t_n)$, $y_n(\cdot) \in K^+(\eta_n)$, $y_n(\cdot) = I(\eta_n) f_n(\cdot)$, де $f_n(\cdot)$ — селектор, що відповідає $y_n(\cdot)$. Розглянемо функцію $z_n(\cdot) = I(\eta_0) f_n(\cdot)$. Використовуючи функцію $z(\cdot) = I(\eta_0)0$, як і в теоремі 1, для $T > t_0$ маємо

$$\max_{t\in[0,T]} \|z_n(t)\| \leq C_3, \ \|f_n(t)\| \leq C_4 \text{ м. с.}$$

Тоді за лемою 1 по підпослідовності $z_n(\cdot) \to y(\cdot)$ в $\mathbb{C}([0,T]; H)$, $f_n \xrightarrow{w} f$ в $L^1(0,T;H)$, де $y(\cdot) = I(\eta_0) f(\cdot)$. З нерівності (7) маємо

$$\max_{[0,T]} \|y_n(t) - z_n(t)\| \leq \|y_n(0) - z_n(0)\| = \|\eta_n - \eta_0\|.$$

Звідси $y_n(\cdot) - z_n(\cdot) \to 0$ в $\mathbb{C}([0,T]; H)$. Таким чином, принаймні по підпослідовності $y_n(\cdot) \to y(\cdot)$ в $\mathbb{C}([0,T]; H)$, зокрема $\xi_n = y_n(t_n) \to y(t_0)$ в H і $y(t) \in H^+$ $\forall t \in [0,T]$. Для доведення теореми залишилось показати, що $f(t) \in G(y(t))$ м. с. на $[0,T]$. З [3] (твердження 1.1) маємо, що для м. в. $t \in [0,T]$

$$f(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t). \tag{21}$$

Зафіксуємо $t \in [0,T]$. Тоді з напівнеперервності зверху відображення G у точці $y(t)$ маємо

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N\colon \ f_n(t) \in G(y_n(t)) \subset O_\epsilon(G(y(t))). \tag{22}$$

Враховуючи, що множина $G(y(t))$ є опуклою і замкненою, з (21) і (22) отримуємо, що $f(t)$ належить $G(y(t))$.

Теорему доведено.

1. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et contractions dans les espaces de Hilbert. – Amsterdam: North Holland, 1973. – 183 p.
2. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. – Leyden: Noordhoff, 1974. – 351 p.

3. *Толстоногов А. А.* О решениях эволюционных включений. I // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 3. – С. 161 – 174.
4. *Толстоногов А. А., Уманский Я. И.* О решениях эволюционных включений. II // Там же. – № 4. – С. 163 – 174.
5. *Згуровський М. З., Касьянов П. О., Мельник В. С.* Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. – Киев: Наук. думка, 2008. – 459 с.
6. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2002. – **49**. – 324 p.
7. *Kapustyan A. V., Valero J.* On the connectedness and asymptotic behaviour of solutions of reaction-diffusion systems // J. Math. Anal. and Appl. – 2006. – **323**. – P. 614 – 633.
8. *Valero J., Kapustyan A. V.* Attractors of multivalued semiflows generated by differential inclusions and their approximations // Abstract and Appl. Anal. – 2000. – № 5. – P. 33 – 46.
9. *Aubin J. P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Boston: Birkhäuser, 1990. – 410 p.
10. *Chipot M.* Elements of nonlinear analysis // Birkhäuser Adv. Texts: Basel Textbooks. – Basel: Birkhäuser Verlag, 2000. – 272 p.

Одержано 02.02.10,
після доопрацювання — 01.03.11