УДК 517.956.2

В. Н. Павленко (Челябин. гос. ун-т, Россия)

РЕЗОНАНСНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ЛИНЕЙНОГО РОСТА*

We consider resonance elliptic variational inequalities with second-order differential operators and discontinuous nonlinearity of linear grows. The theorem on the existence of a strong solution is obtained. The initial problem is reduced to the problem of the existence of a fixed point in a compact multivalued mapping and then, with the use of the Leray – Schauder method, the existence of the fixed point is established.

Розглядаються резонансні еліптичні варіаційні нерівності з диференціальними операторами другого порядку і розривною нелійністю лінійного зростання. Доведено теорему існування сильного розв'язку. Початкову задачу зведено до проблеми існування нерухомої точки у багатозначного компактного відображення, а потім методом Лере – Шаудера встановлено наявність нерухомої точки.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^m,\ m \ge 2,$ с границей Γ класса $C_{2,\alpha},\ 0<\alpha\le 1$ [1], $K=\left\{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \,|\, v(x)\ge\psi(x) \text{ почти всюду на } \Omega\right\}$, где $\psi\in C_2(\overline{\Omega}),\ \psi|_\Gamma \le 0.$

Рассматривается резонансная задача с препятствием нахождения функции $u\in \in K,$ удовлетворяющей неравенству

$$\sum_{i,j=1}^m \int\limits_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}(v-u)_{x_j}dx + \int\limits_\Omega \big(c(x)-\lambda_0\big)u(x)(v-u)(x)dx +$$

$$+\int\limits_\Omega g\big(x,u(x)\big)(v-u)(x)dx \ge \int\limits_\Omega f(x)(v-u)(x)dx \quad \forall v\in K, \tag{1}$$

где $Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^m \big(a_{ij}(x)u_{x_i}\big)_{x_j} + c(x)u(x)$ — равномерно эллиптический дифференциальный оператор, $a_{ij}\in C_{1,\alpha}(\overline{\Omega}),\ a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ на $\overline{\Omega},\ 1\le i,j\le m,$ $c\in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $c(x)\ge 0$ на $\Omega,\ \lambda_0$ — минимальное собственное значение оператора L с граничным условием $u|_\Gamma=0,\ f\in L_q(\Omega),\ q>m.$ Функция $g\colon D\to\mathbb{R}$ $\big(D=\{(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\,|\,x\in\Omega, \xi\ge\psi(x)\}\big)$ суперпозиционно измерима, т. е. для любой измеримой по Лебегу функции $u(x)$ на Ω со значениями $u(x)\ge\psi(x)$ почти всюду на Ω функция $g(x,u(x))$ измерима по Лебегу на Ω. Кроме того, предполагается, что для почти всех $x\in\Omega$ функция $g(x,\cdot)$ может иметь разрывы только первого рода, непрерывна при $\xi=\psi(x)$ и $g(x,\xi)\in\big[g_-(x,\xi),g_+(x,\xi)\big]$ для любого $\xi\in\big(\psi(x),+\infty\big),\ g_-(x,\xi)=\liminf\limits_{s\to\xi} g(x,s),\ g_+(x,\xi)=\limsup\limits_{s\to\xi} g(x,s).$

Если функция $g\colon D\to\mathbb{R}$ имеет перечисленные выше свойства, то будем говорить, что она удовлетворяет (i)-условию.

В случае, когда $g(x,u)\equiv 0,$ разрешимость задачи (1) установлена в [2] при условии, что

*Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 07-01-96000_р_урал_а).

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx < 0, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — положительная собственная функция дифференциального оператора L с однородным граничным условием Дирихле, соответствующая собственному значению λ_0. Известно [1], что собственное значение λ_0 простое, и базисная функция его собственного подпространства либо отрицательная, либо положительная на Ω.

В [3] предлагается метод исследования некоэрцитивных вариационных неравенств, в котором используются операторы спада. Одно из приложений общих теорем ([3], пример 4.4) относится к резонансной задаче с препятствием с p-лапласианом и каратеодориевой нелинейностью. При $p = 2$ получается задача (1) с $L = \Delta$. Для этого случая при условии, что $g(x, u)$ имеет подлинейный рост*, доказывается существование решения для функции f, удовлетворяющей неравенству

$$\int_{\Omega} g_+(x)\varphi(x)dx > \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \tag{3}$$

где $g_+(x) = \liminf\limits_{\xi\to+\infty} g(x,\xi)$, а $\varphi(x)$ та же, что и в (2).

В монографии [4, с. 485 – 495] изучается резонансная задача с препятствием с p-лапласианом и многозначной нелинейностью, совпадающей с субдифференциалом Кларка от локально липшицевой функции $J(x,\xi)$. Вариационным методом получена теорема существования ненулевого решения. Задаче (1) с $L = \Delta$ и $f = 0$ соответствует случай $p = 2$. В этой ситуации одно из ограничений на нелинейность таково: для почти всех $x \in \Omega$

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{u}{\xi} = 0 \quad \forall u \in \partial J(x,\xi).$$

Задача (1) изучалась в работах [5, 6] при дополнительном предположении о наличии функции $b \in L_q(\Omega)$ такой, что для почти всех $x \in \Omega$

$$|g(x,\xi)| \le b(x) \quad \forall \xi \ge \psi(x) \tag{4}$$

(случай ограниченной нелинейности), и равной нулю функции $f(x)$. В них, следуя [7], вариационному неравенству (1) ставится в соответствие эллиптическая краевая задача

$$Lu(x) + G(x, u(x)) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{6}$$

где $G(x,\xi) = \min\{-L\psi(x) + f(x), g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\}$ при $\xi \le \psi(x)$ и $G(x,\xi) = = g(x,\xi) - \lambda_0\xi$ при $\xi > \psi(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

С помощью обобщенного принципа максимума [8] в [5] показано, что любое сильное решение $u \in W_q^2(\Omega)$ задачи (5), (6) принадлежит K и выполняется нера-

*Подлинейный рост $g(x,u)$ означает существование констант $a > 0$, $0 \le \alpha < 1$ и функции $b \in L_q(\Omega)$ таких, что для почти всех $x \in \Omega$

$$|g(x,u)| \le a|u|^{\alpha} + b(x) \quad \forall u \ge \psi(x).$$

венство (1) с $f = 0$ (функция $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ называется сильным решением задачи (5), (6), если $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (5)). Существование сильного решения задачи (5), (6) в [5, 6] устанавливается в случае, когда ограниченная нелинейность $g\colon D \to \mathbb{R}$ по отношению к дифференциальному оператору $Bu = Lu - \lambda_0 u$ удовлетворяет A1-условию, а для функции $g(x,u)$ выполнено некоторое интегральное неравенство. В [6] оно совпадает с (3) при $f = 0$.

В данной статье $f(x)$ в неравенстве (1) может быть ненулевой.

Определение 1. *Говорят, что для функции $g(x,u) - f(x)$ по отношению к дифференциальному оператору $B = Lu - \lambda_0 u$ выполнено $A1$-условие, если существует не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i, i \in I\}$, $S_i = \{(x,\xi) \in D \,|\, \xi = \psi_i(x)\}$, $\psi_i \in W_{1,\mathrm{loc}}^2(\Omega)$, таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_+(x,\xi) \neq g_-(x,\xi)$ влечет существование $i \in I$, для которого $(x,\xi) \in S_i$ и либо $\big(B\psi_i + g_-(x,\psi_i(x)) - f(x)\big)\big(B\psi_i(x) + g_+(x,\psi_i(x)) - f(x)\big) > 0$, либо $B\psi_i(x) + g\big(x,\psi_i(x)\big) = f(x)$.*

Основное отличие данного исследования от [5, 6] — допущение линейного роста нелинейности $g(x,\xi)$: найдутся постоянная $a > 0$ и функция $b \in L_q(\Omega)$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$

$$|g(x,\xi)| \le a|\xi| + b(x) \quad \forall \xi \ge \psi(x). \tag{7}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что*:

1) *функция $g\colon D \to \mathbb{R}$ удовлетворяет (i)-условию и найдутся постоянная $a > 0$ и функция $b \in L_q(\Omega)$, $q > m$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ верна оценка* (7);

2) *найдется $r \in L_1(\Omega)$ такая, что для почти всех $x \in \Omega$*

$$g(x,\xi) \ge r(x) \quad \forall \xi \ge \psi(x);$$

3) *функция $f \in L_q(\Omega)$ удовлетворяет неравенству* (3);

4) *для функции $g(x,u) - f(x)$ по отношению к дифференциальному оператору $Bu = Lu - \lambda_0 u$ выполнено* A1-*условие.*

Тогда существует $u \in W_q^2(\Omega) \cap K$, удовлетворяющая неравенству (1).

Для доказательства теоремы достаточно установить существование сильного решения из $W_q^2(\Omega)$ задачи (5), (6). Действительно, если $u \in W_q^2(\Omega)$ — сильное решение задачи (5), (6), то

$$(Lu(x) - L\psi(x))(\psi - u)^+(x) = (-G(x,u(x)) + f(x) - L\psi(x))(\psi - u)^+(x) \ge$$

$$\ge (L\psi(x) - f(x) + f(x) - L\psi(x))(\psi - u)^+(x) = 0$$

для почти всех $x \in \Omega$, для которых $u(x) \le \psi(x)$. Если $u(x) > \psi(x)$, то $(\psi - u)^+(x) = 0$, и, значит, $(Lu(x) - L\psi(x))(\psi - u)^+(x) = 0$. Тогда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_L}(x) - \frac{\partial \psi}{\partial n_L}(x)\right)(\psi - u)^+(x)\Big|_\Gamma = 0,$$

так как $u|_\Gamma = 0$, $\psi|_\Gamma \le 0$. Здесь $(v-u)^+(x) = \max\{v(x)-u(x),0\}$, $\dfrac{\partial}{\partial n_L} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\cos(n,x_j)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ — конормальная производная к Γ (n — внешняя нормаль к Γ, $\cos(n,x_j)$ — направляющие косинусы нормали n).

Отсюда в силу обобщенного принципа максимума [8] получим, что $u(x) \ge \psi(x)$ почти всюду на Ω. Осталось проверить, что $u(x)$ удовлетворяет неравенству (1). Для произвольного $v \in K$ с учетом неравенства $G\big(x,\psi(x)\big) \le g\big(x,\psi(x)\big) - \lambda_0\psi(x)$ имеем

$$\int_\Omega f(x)(v-u)(x)dx = \int_\Omega Lu(x)(v-u)(x)dx + \int_\Omega G(x,u(x))(v-u)(x)dx =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}(v-u)_{x_j}(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)(v-u)(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{\{x\in\Omega | u(x)=\psi(x)\}} G(x,u(x))(v-u)(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{\{x\in\Omega | u(x)>\psi(x)\}} G(x,u(x))(v-u)(x)dx \le \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}(v-u)_{x_j}(x)dx +$$

$$+ \int_\Omega (c(x)-\lambda_0)u(x)(v-u)(x)dx + \int_\Omega g(x,u)(v-u)(x)dx.$$

Таким образом, показано, что $u(x)$ удовлетворяет неравенству (1). Доказательство существования сильного решения задачи (5), (6) будет проводиться по следующей схеме. Уравнение (5) заменим включением

$$f(x) - Lu(x) \in \big[G_-(x,u(x)), G_+(x,u(x))\big], \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

где $G_-(x,u) = \liminf\limits_{\eta\to u} G(x,\eta)$, $G_+(x,u) = \limsup\limits_{\eta\to u} G(x,\eta)$. Функция $u \in W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющая (8) для почти всех $x \in \Omega$ и граничному условию (6), называется обобщенным решением задачи (5), (6). Из условия 4 теоремы следует, что любое обобщенное решение задачи является ее сильным решением. Проблема существования обобщенного решения задачи (5), (6) сводится к наличию неподвижной точки у компактного многозначного отображения. Доказательство существования последней проводится методом Лере – Шаудера. При этом ключевыми оказываются условия 2 и 3 теоремы. Заметим, что в [5, 6] существование обобщенного решения задачи (5), (6) с функцией $f(x)$, равной нулю, устанавливалось с помощью регуляризации с использованием вариационного метода и доказательства по существу опирались на ограниченность нелинейности $g(x,\xi)$ (см. оценку (4)).

2. Операторная постановка включения (8) с граничным условием (6). Заметим, что функция $G\colon \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ суперпозиционно измерима, поскольку для почти всех $x \in \Omega$ функция $G(x,\xi) = g(x,\xi) - \lambda_0\xi$ при $\xi > \psi(x)$, $G(x,\xi) = \min\{-L\psi(x) + f(x), g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\}$ при $\xi \le \psi(x)$ и функция $g\colon D \to \mathbb{R}$

удовлетворяет (i)-условию. Множество точек разрыва $U = \{(x,\xi) \mid x \in \Omega$ и $G_-(x,\xi) \neq G_+(x,\xi)\}$ функции G совпадает с объединением множества U_1 точек разрыва функции g и множества $U_2 = \big\{(x,\xi) \mid x \in \Omega, \xi = \psi(x)$ и $-L\psi(x)+f(x) < < g(x,\psi(x)) - \lambda_0\psi(x)\big\}$.

Поскольку принадлежность $\big(x,\psi(x)\big)$ множеству U_2 влечет равенство $L\psi(x)+ +G(x,\psi(x)) = L\psi(x)-L\psi(x)+f(x) = f(x)$, то в силу условия 4 теоремы заключаем, что для функции $G(x,\xi)$ выполнено A1-условие по отношению к дифференциальному оператору L. Отсюда следует, что функция $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая включению (8), является сильным решением задачи (5), (6). Действительно, если $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет (8) для почти всех $x \in \Omega$, то для $x \in \Omega$, для которых $G_+(x,u(x)) = G_-(x,u(x))$, верно (5), так как в этом случае $\big[G_-(x,u(x)), G_+(x,u(x))\big] = \{G(x,u(x))\}$; если же $G_-(x,u(x)) \neq G_+(x,u(x))$, то в силу A1-условия либо

$$f(x) - Lu(x) \notin \big[G_-(x,u(x)), G_+(x,u(x))\big], \tag{9}$$

либо выполняется (5). Поскольку $u(x)$ удовлетворяет (8) почти всюду на Ω, (9) возможно лишь на множестве меры нуль. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить существование обобщенного решения задачи (5), (6).

Рассмотрим в $L_q(\Omega)$ определенный на $D(A) = W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ линейный оператор $Au = Lu \ \forall u \in D(A)$. Известно, что A — замкнутый плотно определенный в $L_q(\Omega)$ оператор с дискретным спектром $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, причем $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Если $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, то резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$ компактна в $L_q(\Omega)$ (I — тождественный в $L_q(\Omega)$ оператор). По определению G из оценки (7) для g получим

$$|G(x,\xi)| \leq a_1|\xi| + b_1(x) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $a_1 = a+\lambda_0$, $b_1(x) = b(x)+|L\psi(x)|+|f(x)|$. Отсюда с учетом суперпозиционной измеримости G следует, что оператор Немыцкого $Hu = G(x,u(x)) \ \forall u \in L_q(\Omega)$ действует в $L_q(\Omega)$, причем

$$\|Hu\|_q \leq a_1\|u\|_q + \|b_1\|_q \quad \forall u \in L_q(\Omega), \tag{11}$$

где $\| \, \|_q$ — норма в $L_q(\Omega)$. Пусть $H^\square(u)$ — овыпукление оператора Немыцкого:

$$H^\square(u) = \bigcap_{\delta>0} \operatorname{clco}\big\{z \mid z = H(v), \|v-u\|_q < \delta\big\},$$

где $\operatorname{clco} V$ — замкнутая выпуклая оболочка множества V в $L_q(\Omega)$. В [9] показано, что $H^\square(u) = \{z\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid z(x)$ измерима по Лебегу на Ω и $z(x) \in \in \big[G_-(x,u(x)), G_+(x,u(x))\big]$ почти всюду на $\Omega\}$. Отсюда с учетом (11) для произвольных $u \in L_q(\Omega)$ и $z \in H^\square(u)$ получим

$$\|z\|_q \leq a_1\|u\|_q + \|b_1\|_q. \tag{12}$$

Включение (8) равносильно операторному включению

$$Au \in f - H^\square(u). \tag{13}$$

Поскольку нуль принадлежит резольвентному множеству оператора A, оператор A^{-1} компактный. Поэтому включение (13) эквивалентно наличию неподвижной точки у многозначного компактного отображения $Tu = A^{-1}(f - H^{\Box}(u))$ в $L_q(\Omega)$.

Компактность многозначного отображения T означает, что:

a) для любого $u \in L_q(\Omega)$ множество Tu является выпуклым компактом;

b) отображение T полунепрерывно сверху на $L_q(\Omega)$;

c) образ любого шара в $L_q(\Omega)$ при отображении T предкомпактен $\Big($если $U \subset \subset L_q(\Omega)$, то по определению $TU = \bigcup_{x \in U} Tx\Big)$.

Проверка свойств a), b) и c) отображения T проводится, как в [10]. Итак, требуется установить существование $u \in L_q(\Omega)$, удовлетворяющего включению $u \in Tu$.

3. Доказательство теоремы. Для доказательства существования неподвижной точки у отображения T методом Лере – Шаудера достаточно показать ограниченность в $L_q(\Omega)$ множества решений семейства включений [11]

$$u \in t \cdot Tu, \quad t \in [0, 1). \tag{14}$$

Если применить к обеим частям (14) оператор A, то включение приводится к виду $Au \in t \cdot f - tH^{\Box}(u)$.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что множество решений семейства включений (14) неограничено. Тогда найдутся последовательности $(t_n) \subset [0, 1)$, $(u_n) \subset D(A)$ и (z_n) в $L_q(\Omega)$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$Au_n + t_n z_n = t_n f, \tag{15}$$

$\|u_n\|_q > n$, $z_n \in H^{\Box}(u_n)$. Последнее означает, что для почти всех $x \in \Omega$ $z_n(x) \in \in \big[G_-(x, u_n(x)), G_+(x, u_n(x))\big]$.

Разделив обе части равенства (15) на $\|u_n\|_q$, для любого $n \in \mathbb{N}$ получим

$$Av_n + t_n \frac{z_n}{\|u_n\|_q} = t_n \frac{f}{\|u_n\|_q}, \tag{16}$$

где $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_q}$. Поскольку $t_n \in [0, 1)$, $\|v_n\|_q = 1$, $\dfrac{\|z_n\|_q}{\|u_n\|_q} \le a_1 + \dfrac{\|b_1\|_q}{\|u_n\|_q}$ (в силу оценки (10)), $t_n \dfrac{\|f\|_q}{\|u_n\|_q} \to 0$ при $n \to \infty$ и $L_q(\Omega)$ — рефлексивное пространство, можно считать, что $t_n \to t \in [0, 1]$, $v_n \rightharpoonup v$, $\dfrac{z_n}{\|u_n\|_q} \rightharpoonup k(x)$ в $L_q(\Omega)$, переходя при необходимости к подпоследовательности. Переходя в (16) к пределу при $n \to \infty$, с учетом замкнутости оператора A получаем

$$v \in D(A) \quad \text{и} \quad Av + tk(x) = 0. \tag{17}$$

Умножим обе части последнего равенства на $v(x)$ и проинтегрируем по Ω :

$$\int\limits_{\Omega} Av(x) \cdot v(x) dx + t \int\limits_{\Omega} k_v(x) \cdot v^2(x) dx = 0, \tag{18}$$

где $k_v(x) = \dfrac{k(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$, и $k_v(x) = 0$, если $v(x) = 0$. Заметим, что первое слагаемое в (18) не меньше $\lambda_0 \|v\|_2^2$, так как λ_0 — минимальное собственное значение оператора A. Докажем, что функция $k_v(x) \geq -\lambda_0$ почти всюду на множестве $\{x \in \Omega | v(x) > 0\}$. Из условия 2 теоремы и определения функции $G(x,\xi)$ следует, что для почти всех $x \in \Omega$

$$\liminf_{\xi \to +\infty} \frac{G(x,\xi)}{\xi} \geq -\lambda_0, \tag{19}$$

$$\lim_{\xi \to -\infty} \frac{G(x,\xi)}{\xi} = 0. \tag{20}$$

Поскольку последовательность (Av_n) ограничена в $L_q(\Omega)$, (v_n) ограничена в $W_q^2(\Omega)$ [1]. По условию $q > m$, поэтому $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $C^1(\overline{\Omega})$ и, значит, можно считать, что $v_n \to v$ в $C^1(\overline{\Omega})$, переходя при необходимости к подпоследовательности. Отсюда следует сильная сходимость (v_n) к v и в $L_q(\Omega)$, из чего заключаем, что $\|v\|_q = 1$.

Пусть $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \,|\, |v(x)| > \varepsilon\}$ $0 < \varepsilon < \|v\|_{C(\overline{\Omega})}$ и $\| \, \|_q^{(\varepsilon)}$ — норма в $L_q(\Omega_\varepsilon)$. Тогда если $0 < \varepsilon < \|v\|_{C(\overline{\Omega})}$, то найдется $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $|v_n(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in \Omega_\varepsilon$ и $n > n_0(\varepsilon)$, так как $v_n \to v$ в $C(\overline{\Omega})$. Для любого $n > n_0(\varepsilon)$ имеем

$$\left\| \frac{z_n}{u_n} - \frac{z_n}{v\|u_n\|_q} \right\|_q^{(\varepsilon)} \leq \frac{\|z_n(x)\|_q}{\|u_n(x)\|_q} \|v_n - v\|_q.$$

Из этого заключаем о сильной сходимости $\dfrac{z_n}{u_n} - \dfrac{z_n}{v\|u_n\|_q}$ к нулю в $L_q(\Omega_\varepsilon)$, что влечет слабую сходимость $\dfrac{z_n}{u_n}$ к k_v в $L_q(\Omega_\varepsilon)$. Далее, для любой неотрицательной функции $\varphi \in L_p(\Omega_\varepsilon)$ $\left(0 < \varepsilon < \|v\|_{C(\overline{\Omega})}\right)$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} k_v(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{z_n(x)}{u_n(x)}\varphi(x)dx \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \liminf_{n\to\infty} \frac{z_n(x)}{u_n(x)}\varphi(x)dx$$

(здесь мы воспользовались леммой Лебега – Фату [12]). Разобьем Ω_ε на $\Omega_\varepsilon^+ = \{x \in \in \Omega \,|\, v(x) > \varepsilon\}$ и $\Omega_\varepsilon^- = \{x \in \Omega \,|\, v(x) < -\varepsilon\}$. Тогда с учетом (19), (20) получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \liminf_{n\to\infty} \frac{z_n(x)}{u_n(x)}\varphi(x)dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \liminf_{n\to\infty} \frac{z_n(x)}{u_n(x)}\varphi(x)dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \liminf_{n\to\infty} \left(\liminf_{\eta \to u_n(x)} \frac{G(x,\eta)}{\eta} \right) \varphi(x)dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \liminf_{\eta\to+\infty} \frac{G(x,\eta)}{\eta}\varphi(x)dx \geq -\lambda_0 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \varphi(x)dx.$$

Таким образом, $k_v(x) = 0$ на Ω_ε^- и для любой неотрицательной $\varphi \in L_p(\Omega_\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} k_v(x)\varphi(x)dx \geq -\lambda_0 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \varphi(x)dx.$$

Последнее влечет неотрицательность $k_v(x)+\lambda_0$ почти всюду на Ω_ε^+. Заметим, что $\Omega^+ = \bigcup_{\varepsilon>0}\Omega_\varepsilon^+ = \{x\in\Omega\,|\,v(x)>0\}$, $\Omega^- = \bigcup_{\varepsilon>0}\Omega_\varepsilon^- = \{x\in\Omega\,|\,v(x)<0\}$. В силу произвольности выбора $\varepsilon\in(0,\|v\|_{C(\overline{\Omega})})$ доказано, что $k_v(x)=0$ на Ω^- и $k_v(x)\geq-\lambda_0$ почти всюду на Ω^+. Отсюда из (18) следует

$$0=\int\limits_\Omega Av(x)\cdot v(x)dx+t\int\limits_\Omega k_v(x)\cdot v^2(x)dx\geq\lambda_0\int\limits_\Omega v^2(x)dx-t\lambda_0\int\limits_{\Omega^+}v^2(x)dx.$$

Учитывая, что $t\in[0,1]$, $\lambda_0>0$ и v — ненулевая функция из $C^1(\overline{\Omega})$, из последнего неравенства заключаем, что $t=1$, Ω^- — множество меры нуль и $k_v(x)=-\lambda_0$ почти всюду на Ω^+. Функция $k(x)$ в (17) равна $-\lambda_0 v(x)$ почти всюду на Ω^+. Поэтому (17) с учетом того, что $t=1$ и Ω^- — множество меры нуль, примет вид

$$Av(x)-\lambda_0 v(x)=0\quad\text{почти всюду на }\Omega.$$

Следовательно, $v(x)$ — положительная собственная функция оператора A, соответствующая собственному значению λ_0. Умножив равенство (15) на $v(x)$ и проинтегрировав по Ω, получим

$$\int\limits_\Omega Au_n(x)\cdot v(x)dx+t_n\int\limits_\Omega z_n(x)v(x)dx=t_n\int\limits_\Omega f(x)v(x)dx. \tag{21}$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega Au_n(x)\cdot v(x)dx=\int\limits_\Omega u_n(x)\cdot Av(x)dx=\lambda_0\int\limits_\Omega u_n(x)\cdot v(x)dx.$$

С учетом этого замечания перепишем (21) в следующем виде:

$$\frac{\lambda_0}{t_n}\int\limits_\Omega u_n(x)v(x)dx+\int\limits_\Omega z_n(x)v(x)dx=\int\limits_\Omega f(x)v(x)dx. \tag{22}$$

Для почти всех $x\in\Omega$ функция $G(x,\bullet)$ непрерывна при $\xi<\psi(x)$ и, значит, если $u_n(x)<\psi(x)$, то $z_n(x)=G(x,u_n(x))$. Для почти всех $x\in\Omega$, для которых $u_n(x)=\psi(x)$, $z_n(x)=g(x,\psi(x))-\lambda_0\psi(x)$, если $g(x,\psi(x))-\lambda_0\psi(x)\leq-L\psi(x)+f(x)$, и $g(x,\psi(x))-\lambda_0\psi(x)\geq z_n(x)\geq-L\psi(x)+f(x)$, если $g(x,\psi(x))-\lambda_0\psi(x)>-L\psi(x)+f(x)$. Наконец, если $u_n(x)>\psi(x)$, то $z_n(x)\geq g_-(x,u_n(x))-\lambda_0 u_n(x)$. Отсюда с учетом (22) для любого натурального n получим

$$\int\limits_\Omega f(x)v(x)dx\geq\lambda_0\left(\frac{1}{t_n}-1\right)\int\limits_{\Omega_n}u_n(x)v(x)dx+\frac{\lambda_0}{t_n}\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_n}u_n(x)v(x)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_n}z_n(x)v(x)dx+\int\limits_{\Omega_n}g_-(x,u_n(x))v(x)dx, \tag{23}$$

где $\Omega_n=\{x\in\Omega\,|\,u_n(x)>\psi(x)\}$, $\Omega\backslash\Omega_n=\{x\in\Omega\,|\,u_n(x)\leq\psi(x)\}$. Как было показано $v_n\to v$ в $C^1(\overline{\Omega})$ и v — положительная собственная функция оператора A, соответствующая минимальному собственному значению λ_0, а значит, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma<0$,

n — внешняя нормаль к Γ [13]. Из этого следует существование $n_0 \in \mathbb{N}$ такого, что $v_n(x) > 0$ в Ω для любого $n > n_0$. Следовательно, $u_n(x) = \|u_n(x)\|_q v_n(x) > 0$ в Ω для любого $n > n_0$ и из (23) получим

$$\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)dx \geq \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_n} z_n(x)v(x)dx + \int\limits_{\Omega_n} g_-(x, u_n(x))v(x)dx. \tag{24}$$

Докажем существование возрастающей последовательности натуральных чисел $(n(k))$ такой, что $\operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega_{n(k)}) \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $\Omega_{1/k} = \left\{x \in \Omega \,|\, v(x) > \dfrac{1}{k}\right\}$. Так как $v(x) > 0$ на Ω, то $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{1/k}$.

Поскольку последовательность $(v_n(x))$ сходится равномерно к $v(x)$ на $\overline{\Omega}$, найдется возрастающая последовательность $(n(k)) \subset \mathbb{N}$ такая, что $v_{n(k)}(x) > \dfrac{1}{2k}$ на $\Omega_{1/k}$ и $\dfrac{n(k)}{2k} > \max\limits_{\overline{\Omega}} \psi(x)$. Тогда для любого натурального k

$$u_{n(k)}(x) = \|u_{n(k)}\|_q \cdot v_{n(k)}(x) > \frac{n(k)}{2k} > \psi(x) \quad \forall x \in \Omega_{1/k}.$$

Из этого заключаем о справедливости включений

$$\Omega \supset \Omega_{n(k)} \supset \Omega_{1/k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Так как $\Omega_{1/k} \subset \Omega_{1/(k+1)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{1/k}$, то $\operatorname{mes}\Omega = \lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes}\Omega_{1/k}$. Отсюда с учетом (25) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes}\Omega_{n(k)} = \operatorname{mes}\Omega$ и, значит, $\operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega_{n(k)}) \to 0$ при $k \to \infty$.

В силу (23) для любого $n(k) > n_0$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} f(x)v(x)dx \geq \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{n(k)}} z_{n(k)}(x)v(x)dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{n(k)}} g_-(x, u_{n(k)}(x))v(x)dx + \int\limits_{\Omega} g_-(x, u_{n(k)}(x))v(x)dx. \tag{26}$$

Поскольку при $n > n_0$ на $\Omega\setminus\Omega_n$ $0 \leq u_n(x) \leq \psi(x)$, из оценок (7) и (10) следует существование суммируемых на $\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty}(\Omega\setminus\Omega_n)$ функций $d_1(x)$ и $d_2(x)$ таких, что почти всюду на $\Omega\setminus\Omega_n$ $|z_n(x)| \leq d_1(x)$, $|g_-(x, u_n(x))| \leq d_2(x)$ для любого $n > n_0$. Отсюда и из равенства $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega_{n(k)}) = 0$ получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{n(k)}} z_{n(k)}(x) \cdot v(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{n(k)}} g_-(x, u_{n(k)}(x)) \cdot v(x)dx = 0.$$

С учетом этого и условия 2 теоремы перейдем в неравенстве (26) к нижнему пределу при $k \to \infty$, а затем воспользуемся леммой Лебега – Фату. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega} f(x) \cdot v(x)dx \geq \int\limits_{\Omega} \liminf_{k\to\infty} g_-(x, u_{n(k)}(x)) \cdot v(x)dx = \int\limits_{\Omega} g_+(x) \cdot v(x)dx.$$

Полученное неравенство противоречит условию 3 теоремы.

Теорема доказана.

1. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. *Lions J. L., Stampacchia G.* Variational inequalities // Communs Pure and Appl. Math. – 1967. – **20**. – P. 493 – 519.
3. *Adly S., Goeleven D., Thera M.* Recession mapping and noncoercive variational inequalities // Nonlinear Anal. – 1996. – **26**, № 9. – P. 1573 – 1603.
4. *Gasinski L., Papageorgion N. S.* Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems // Ser. Math. Anal. and Appl. – 2005. – **8**. – 775 p.
5. *Павленко В. Н., Чиж Е. А.* Сильно резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 7. – С. 51 – 58.
6. *Павленко В. Н., Прибыль М. А.* Резонансные вариационные неравенства эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, № 1. – С. 120 – 125.
7. *Chang K.-C.* Free boundary problems and the set-valued mappings // J. Different. Equat. – 1983. – **49**, № 1. – P. 1 – 28.
8. *Chang K.-C.* The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities // Communs Pure and Appl. Math. – 1980. – **33**, № 2. – P. 117 – 146.
9. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
10. *Павленко В. Н.* Управление распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 729 – 736.
11. *Борисович Ю. Г. и др.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. – М.: КомКнига, 2005. – 216 с.
12. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
13. *Iannacci R., Nkashama M. N., Ward J. R.* Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **311**, № 2. – P. 711 – 726.

Получено 20.05.10,
после доработки — 05.03.11