УДК 517.5

Д. С. Скороходов (Днепропетр. нац. ун-т)

ЗАДАЧА ЛАНДАУ – КОЛМОГОРОВА ДЛЯ КЛАССА АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫХ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЙ

We solve the Landau – Kolmogorov problem for the class of functions absolutely monotone on a finite interval. For this class of functions, a new exact additive inequalities of the Kolmogorov type are obtained.

Розв'язано задачу Ландау – Колмогорова для класу абсолютно монотонних на скінченному відрізку функцій. Для такого класу функцій також отримано нові точні адитивні нерівності типу Колмогорова.

1. Постановка задачи. Через $L_p,\ 0 < p \le \infty$, обозначим пространство измеримых функций $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\{|f(t)|\colon t \in [0,1]\}, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Отметим, что в случае $1 \le p \le \infty$ величина $\|\cdot\|_p$ является нормой в соответствующем пространстве L_p. Если $r \in \mathbf{N}$, то через L_p^r обозначим пространство функций $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, для которых существует и локально абсолютно непрерывна на $(0,1)$ производная $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} := f$), а $f^{(r)} \in L_p$.

Известную задачу Ландау – Колмогорова можно сформулировать в одной из следующих двух постановок. Пусть $0 < p, q, s \le \infty$ и $k, r \in \mathbf{N},\ 1 \le k \le r-1$.

Задача 1. *Для всех $\delta > 0$ найти*

$$\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta) := \sup\left\{\left\|f^{(k)}\right\|_q : f \in L_s^r,\ \|f\|_p \le \delta,\ \left\|f^{(r)}\right\|_s \le 1\right\}.$$

Величина $\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta)$ называется модулем непрерывности оператора дифференцирования k-го порядка на классе $W_s^r := \left\{f \in L_s^r\colon \left\|f^{(r)}\right\|_s \le 1\right\}$.

Задача 1 изучалась в работах многих математиков [1 – 8]. Однако к настоящему времени известны лишь частные случаи ее решения:

1) $p = q = s = \infty,\ r = 2$ — Ч. Чуи, П. Смит [2];

2) $p = q = s = \infty,\ r = 3$ — А. И. Звягинцев, А. Я. Лепин [3] и М. Сато [4].

Отметим также, что Б. Боянов и Н. Найденов [8] нашли величину $\omega_{\infty,q,\infty}^{k,r}(\delta)$, $r \le 3$, для счетного множества значений δ.

Другая постановка задачи Ландау – Колмогорова такова. Пусть $0 < p, q, s \le \infty$ и $k, r \in \mathbf{N},\ 1 \le k \le r-1$.

Задача 2. *Найти множество $\Gamma_{p,q,s}^{k,r}$ всех пар положительных чисел (A, B) таких, что*:

1) *для любой функции $f \in L_s^r$ выполняется неравенство*

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le A\,\|f\|_p + B\left\|f^{(r)}\right\|_s;$$

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in L_s^r$ такая, что*

$$\left\|f_\varepsilon^{(k)}\right\|_q > A\left\|f_\varepsilon\right\|_p + (B-\varepsilon)\left\|f_\varepsilon^{(r)}\right\|_s.$$

Частные решения задачи 2 известны в следующих случаях:

1) $p = q = s = \infty,\ r = 2$ — Э. Ландау [1];

2) $p = q = \infty,\ 1 \le s \le \infty,\ r = 2$ — Ю. В. Бабенко [9, 10].

Поясним, как соотносятся между собой две постановки задачи Ландау – Колмогорова. Если известна величина $\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta)$, то решение задачи 2 можно представить в виде

$$\Gamma_{p,q,s}^{k,r} = \left\{(A,B)\colon B = \sup_{\delta>0}\left[\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta) - A\delta\right] < \infty\right\}.$$

С другой стороны, если известно множество $\Gamma_{p,q,s}^{k,r}$, то можно найти множество прямых $\mathcal{O} = \left\{y = Ax + B\colon (A,B)\in\Gamma_{p,q,s}^{k,r}\right\}$. Очевидно, что $\mathcal{O}$ — совокупность всех опорных прямых к графику функции $y = \omega_{p,q,s}^{k,r}(x)$. Поэтому для любого $\delta > 0$

$$\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta) \le \inf_{(A,B)\in\Gamma_{p,q,s}^{k,r}}\Big(A\delta + B\Big).$$

Отметим также, что задача 2 взаимосвязана с неравенствами для многочленов типа Маркова – Бернштейна – Никольского (см. [11], гл. 4). Для $n \in \mathbf{N}$ через $\mathcal{P}^n$ обозначим множество алгебраических многочленов степени не выше n. Пусть $k \in \mathbf{N},\ k \le n$, и $0 < p, q \le \infty$. Неравенством типа Маркова – Бернштейна – Никольского называется неравенство вида

$$\left\|Q^{(k)}\right\|_q \le M_{p,q}^{k,n}\left\|Q\right\|_p$$

с наименьшей возможной постоянной $M_{p,q}^{k,n}$, которое выполняется для всех многочленов $Q \in \mathcal{P}^n$. Очевидно, что для любой пары $(A,B) \in \Gamma_{p,q,s}^{k,r}$ и любого многочлена $Q \in \mathcal{P}^{r-1}$

$$\left\|Q^{(k)}\right\|_q \le A\|Q\|_p.$$

Следовательно, $A \ge M_{p,q}^{k,r-1}$. Более того, согласно теореме 4.6.1 из [12], для любого $A \ge M_{p,q}^{k,r-1}$ существует $B > 0$ такое, что $(A,B) \in \Gamma_{p,q,s}^{k,r}$.

Вместе с изучением задач 1 и 2 представляет также интерес рассмотрение следующих их аналогов.

Задача 3. *Пусть $X \subset L_s^r$. Для всех $\delta > 0$ найти*

$$\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta; X) := \sup\left\{\left\|f^{(k)}\right\|_q : f\in X,\ \|f\|_p \le \delta,\ \left\|f^{(r)}\right\|_s \le 1\right\}.$$

Задача 4. *Пусть $X \subset L_s^r$. Найти множество $\Gamma_{p,q,s}^{k,r}(X)$ всех пар положительных чисел (A,B) таких, что*:

1) *для любой функции $f \in X$ выполняется неравенство*

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le A\left\|f\right\|_p + B\left\|f^{(r)}\right\|_s;$$

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in X$ такая, что*

$$\left\|f_\varepsilon^{(k)}\right\|_q > A\left\|f_\varepsilon\right\|_p + (B-\varepsilon)\left\|f_\varepsilon^{(r)}\right\|_s.$$

В работах [7, 13, 14] было показано, что в некоторых случаях для задач 3 и 4 удается найти полные решения. Так, А. М. Финк [14] решил задачу 4 для показателей $p = q = s = \infty$ на классе функций $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, представимых в виде интеграла Стилтьеса

$$f(t) = \int\limits_0^\infty e^{tu}\, d\sigma(u), \tag{1}$$

где $\sigma\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ — некоторая неубывающая функция ограниченной вариации. Очевидно, что любая такая функция f является абсолютно монотонной на отрезке $[0,1]$ согласно следующему определению.

Определение 1 [15, с. 144]. *Функция* $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ *называется абсолютно монотонной на отрезке* $[0,1]$, *если она непрерывна на нем, бесконечно дифференцируема внутри интервала* $(0,1)$ *и* $f^{(k)}(x) \geq 0$ *для всех* $x \in (0,1)$ *и* $k \in \mathbf{Z}_+$.

Обозначим через AM множество всех абсолютно монотонных на отрезке $[0,1]$ функций. Автором [16] найдено решение задач 3 и 4 на классе AM для показателей $p, q, s \in \{1, \infty\}$. В данной работе задача 3 на классе AM решена для показателей $0 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $s = \infty$, а задача 4 – для показателей $p \in (0,1] \cup \{\infty\}$, $1 \leq q \leq \infty$ и $s \in \{1, \infty\}$.

2. Основные результаты. Для $n \in \mathbf{Z}_+$ положим

$$e_n(x) := x^n, \quad x \in [0,1].$$

Пусть $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$, и $n \geq r$. Введем в рассмотрение множества функций

$$\mathfrak{M}_r^n := \left\{ g_{\lambda,n} = \lambda \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1} + (1-\lambda) \frac{(n-r)!}{n!} e_n \;\middle|\; \lambda \in [0,1) \right\}$$

и интервалы

$$\Delta_{n;p} := \left(\frac{(n-r+1)!}{(n+1)!} \left\| e_{n+1} \right\|_p, \frac{(n-r)!}{n!} \left\| e_n \right\|_p \right].$$

Пусть также

$$\mathfrak{M}_r^{r-1} := \left\{ g_{\rho,r-1} = \frac{1}{r!} e_r + \rho e_{r-1} \;\middle|\; \rho > 0 \right\} \quad \text{и} \quad \Delta_{r-1;p} := \left(\frac{1}{r!} \left\| e_r \right\|_p, \infty \right).$$

Заметим, что множества $\mathfrak{M}_r^n$, $n \geq r-1$, а также интервалы $\Delta_{n;p}$, $n \geq r-1$, попарно не пересекаются. Кроме того, $\bigcup_{n \geq r-1} \Delta_{n;p} = (0,\infty)$. Положим $\mathfrak{M}_r := \bigcup_{n \geq r-1} \mathfrak{M}_r^n$. Тогда для любой функции $y \in \mathfrak{M}_r$ с учетом определения множеств $\mathfrak{M}_r^n$ будем иметь $\left\| y^{(r)} \right\|_\infty = 1$.

Пусть число p, $0 < p \leq \infty$, фиксировано. Покажем, что для любого $\delta > 0$ существует единственная функция $y_\delta \in \mathfrak{M}_r$ такая, что $\left\| y_\delta \right\|_p = \delta$. Для этого изучим действие функционала $\left\| \cdot \right\|_p$ на элементы множеств $\mathfrak{M}_r^n$, $n \geq r-1$, и $\mathfrak{M}_r$. Рассмотрим сначала случай, когда $n \geq r$. Согласно определению, множество $\mathfrak{M}_r^n$ — выпуклая оболочка функций $g_{0,n+1}$ и $g_{0,n}$ без самой функции $g_{0,n+1}$. Кроме того, для любого $\lambda \in [0,1)$

$$\left\| g_{\lambda,n} \right\|_p = \left\| \frac{(n-r)!}{n!} e_n + \lambda \frac{(n-r)!}{n!} e_n \left(\frac{n+1-r}{n+1} e_1 - 1 \right) \right\|_p.$$

Из последнего соотношения несложно заметить, что если $0 \le \mu < \lambda < 1$, то $\|g_{\mu,n}\|_p > \|g_{\lambda,n}\|_p$. Поэтому функционал $\|\cdot\|_p$ является строго убывающим на множестве $\mathfrak{M}_r^n$ и осуществляет инъективное отображение множества $\mathfrak{M}_r^n$ в интервал $\Delta_{n;p}$. Сюръективность отображения $\|\cdot\|_p$ следует из его непрерывности. Подобные рассуждения в случае $n = r-1$ показывают, что функционал $\|\cdot\|_p$ также осуществляет взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{M}_r^{r-1}$ на интервал $\Delta_{r-1;p}$.

Таким образом, функционал $\|\cdot\|_p$, $0 < p \le \infty$, — биекция множества $\mathfrak{M}_r$ на числовую полуось $(0, +\infty)$. Поэтому для любого $\delta > 0$ существует и единственна функция $y_\delta \in \mathfrak{M}_r$ такая, что

$$\|y_\delta\|_p = \delta. \tag{2}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le r-1$, $0 < p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$. Тогда для любого $\delta > 0$*

$$\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta; AM) = \left\|y_\delta^{(k)}\right\|_q,$$

где $y_\delta \in \mathfrak{M}_r$ определена в (2).

В некоторых случаях, когда $p \in \{1, \infty\}$, функционал $\|\cdot\|_p$ линеен на классе AM. Поэтому в этом случае для $\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta; AM)$ можно предъявить более явное выражение.

***Следствие* 1.** *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le r-1$, $1 \le q \le \infty$, $p \in \{1, \infty\}$. Тогда если $\delta \in \Delta_{n;p}$, $n \ge r$, то*

$$\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta; AM) = \left\|\lambda_\delta \frac{(n+1-r)!}{(n+1-k)!} e_{n+1-k} + (1-\lambda_\delta)\frac{(n-r)!}{(n-k)!} e_{n-k}\right\|_q,$$

где

$$\lambda_\delta = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}\delta - \|e_n\|_p}{\frac{n+1-r}{n+1}\|e_{n+1}\|_p - \|e_n\|_p}.$$

Если $\delta \in \Delta_{r-1;p}$, то

$$\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta; AM) = \left\|\frac{(r-1)!\left(\delta - \frac{1}{r!}\right) e_{r-1-k}}{(r-1-k)!\,\|e_{r-1}\|_p} + \frac{e_{r-k}}{(r-k)!}\right\|_q.$$

Отметим следующее геометрическое свойство функции $\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta; AM)$.

***Следствие* 2.** *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le r-1$, $1 \le q \le \infty$, $p \in (0,1] \cup \{\infty\}$. Тогда на каждом из интервалов $\Delta_{n;p}$, $n \ge r-1$, функция $\omega_{p,q,s}^{k,r}(\delta; AM)$ выпукла вниз. Строгая выпуклость вниз имеет место, если $1 < q < \infty$ или $0 < p < 1$.*

Теперь перейдем к результатам, которые дают решение задачи 2 на классе AM. Пусть $\mathcal{P}_+^n := \mathcal{P}^n \cap AM$, $n \in \mathbf{N}$. Следующее утверждение представляет собой неравенство типа Маркова – Бернштейна – Никольского для многочленов из $\mathcal{P}_+^n$.

Лемма 1. *Пусть $k, n \in \mathbf{N}$, $k \le n$, $0 < p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$. Тогда для любого многочлена $Q \in \mathcal{P}_+^n$ выполняется неравенство*

$$\left\|Q^{(k)}\right\|_q \le \left\|e_n^{(k)}\right\|_q \|e_n\|_p^{-1} \|Q\|_p.$$

Это утверждение вместе с теоремой 1 позволяет получить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N},\ 1 \le k \le r-1,\ 0 < p \le \infty,\ 1 \le q \le \infty$ (*за исключением случая* $k = q = 1$ *и* $p = \infty$). *Тогда для любого* $A \ge \left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ *и любой функции* $f \in AM$ *выполняется точное неравенство*

$$\left\| f^{(k)} \right\|_q \le A\|f\|_p + C_{p,q}^{k,r}(A) \left\| f^{(r)} \right\|_\infty , \tag{3}$$

где

$$C_{p,q}^{k,r}(A) = \sup_{y \in \mathfrak{M}_r} \Big(\left\| y^{(k)} \right\|_q - A\|y\|_p \Big). \tag{4}$$

Ясно, что, как и в случае первоначальной постановки задачи 2, если пара положительных чисел (A, B) содержится в $\Gamma_{p,q,s}^{k,r}(AM)$, то $A \ge \left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$. Поэтому утверждение теоремы 2 можно записать в виде

$$\Gamma_{p,q,\infty}^{k,r}(AM) = \left\{ \left(A, C_{p,q}^{k,r}(A)\right) : A \ge \left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1} \right\}.$$

Следующее утверждение дает решение задачи 2 на классе AM при $p, s \in \in (0,1] \cup \{\infty\}$ и $1 \le q \le \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $p, s \in (0,1] \cup \{\infty\},\ 1 \le q \le \infty$ *и* $k, r \in \mathbf{N},\ 1 \le k \le r-1$. *Множество* $\Gamma_{p,q,s}^{k,r}(AM)$ *непусто тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{p} < k - 1/q \le r - \frac{1}{s}. \tag{5}$$

При выполнении условий (5) *для любого* $A \ge \left\| e_{r-1}^{(k)} \right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ *и любой функции* $f \in AM$ *выполняется точное неравенство*

$$\left\| f^{(k)} \right\|_q \le A\|f\|_p + D_{p,q,s}^{k,r}(A) \left\| f^{(r)} \right\|_s , \tag{6}$$

где

$$D_{p,q,s}^{k,r}(A) := \sup_{n \ge r} \frac{\left\| e_n^{(k)} \right\|_q - A\|e_n\|_p}{\left\| e_n^{(r)} \right\|_s}. \tag{7}$$

Отметим, что если $p \in (0,1] \cup \{\infty\}$ и $s = \infty$, то неравенства (3) и (6) совпадают. Поэтому $D_{p,q,\infty}^{k,r}(A) = C_{p,q}^{k,r}(A)$. Однако в (4) точная верхняя грань берется по множеству функций $\mathfrak{M}_r$, мощность которого равна континууму, а в (7) постоянная $D_{p,q,\infty}^{k,r}(A)$ — точная верхняя грань счетного множества величин. С этой точки зрения теорему 3 можно считать улучшением теоремы 2.

Приведем явное выражение для $D_{\infty,q,\infty}^{k,r}(A)$. Для $n \ge r-1$ положим

$$\tau_q^{k,r}(n) := \frac{1}{r} \left((n+1) \left\| e_n^{(k)} \right\|_q - (n+1-r) \left\| e_{n+1}^{(k)} \right\|_q \right).$$

Теорема 4. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N},\ 1 \le k \le r-1$, *и* $1 \le q \le \infty$ (*кроме случая* $k = q = 1$). *Тогда если* $\tau_q^{k,r}(n) \le A \le \tau_q^{k,r}(n+1),\ n \ge r-1$, *то*

$$D_{\infty,q,\infty}^{k,r}(A) = \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} \left(\left\| e_{n+1}^{(k)} \right\|_q - A \right).$$

В качестве приложения полученных результатов решим задачу Колмогорова (см. [18, 19]) для трех чисел на классе AM. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$. Задача Колмогорова для n чисел состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия для заданных положительных чисел M_{ν_i,p_i}, $1 \leq p_i \leq \infty$, $1 \leq \nu_i \leq r$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и заданного класса X гладких функций, чтобы существовала функция $f \in X$, для которой $\|f^{(\nu_i)}\|_{p_i} = M_{\nu_i,p_i}$. Известные случаи решения этой задачи и дальнейшие ссылки можно найти, например, в книге [12].

Теорема 5. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq r-1$, и $0 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда для заданных трех положительных чисел $M_{0,p}$, $M_{k,q}$ и $M_{r,s}$ существует функция $f \in AM$ такая, что*

$$\|f\|_p = M_{0,p}, \quad \left\|f^{(k)}\right\|_q = M_{k,q}, \quad \left\|f^{(r)}\right\|_\infty = M_{r,\infty}$$

в том и только в том случае, когда

$$\frac{M_{k,q}}{M_{r,\infty}} \leq \omega^{k,r}_{p,q,\infty}\left(\frac{M_{0,p}}{M_{r,\infty}}; AM\right). \tag{8}$$

При доказательстве теоремы 1 существенную роль играет следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $0 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\delta > 0$. Тогда для любой функции $f \in AM$ такой, что $\|f\|_p \leq \delta$ и $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty \leq 1$, при каждом $l = 0, \ldots, r-1$ число перемен знака функции $y_\delta^{(l)} - f^{(l)}$ не превышает 1.*

В следующем пункте мы приведем доказательства теорем 1 и 6, а также следствий 1 и 2. Доказательства остальных результатов будут даны в п. 4.

3. Доказательства теорем 1 и 6. Зафиксируем число p, $0 < p \leq \infty$. Напомним, что в п. 2 для любого $\delta > 0$ через y_δ мы обозначили функцию из множества $\mathfrak{M}_r$, удовлетворяющую соотношению (2). Отметим также, что в силу определения множеств $\mathfrak{M}_r^n$, если $y_\delta \in \mathfrak{M}_r^n$, $n \geq r-1$, то $y_\delta^{(j)}(0) = 0$ для всех $j = \overline{0, n-1}$, $y_\delta^{(n+2)}(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$ и $\left\|y_\delta^{(r)}\right\|_\infty = 1$.

***Доказательство теоремы* 6** проведем от противного. Предположим, что нашлись функция $f \in AM$, удовлетворяющая условиям $\|f\|_p \leq \delta$ и $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty \leq 1$, и число l, $0 \leq l \leq r-1$, такие, что

$$\nu\left(y_\delta^{(l)} - f^{(l)}\right) \geq 2, \tag{9}$$

где $\nu(w)$ — количество перемен знака непрерывной на $[0,1]$ функции w. Введем в рассмотрение функцию $g(x) := y_\delta(x) - f(x)$, $x \in [0,1]$, и выберем $n \in \mathbf{N}$, $n \geq r-1$, таким образом, чтобы $y_\delta \in \mathfrak{M}_r^n$ (очевидно, что такое n единственно).

Отметим некоторые свойства функции g:

1) $g^{(s)}(0) \leq 0$ для всех $s = 0, 1, \ldots, n-1$,

2) $\nu\left(g^{(l)}\right) \geq 2$,

3) $g^{(r)}(1) \geq 0$,

4) $g^{(n+1)}$ не возрастает.

Действительно, свойства 1 и 4 являются следствием абсолютной монотонности функции $f^{(l)}$ и комментария, приведенного в начале этого пункта. Свойство 2 — это неравенство (9), переписанное в терминах функции g. Справедливость свойства 3 следует из неравенства

$$g^{(r)}(1) = y_\delta^{(r)}(1) - f^{(r)}(1) = \left\| y_\delta^{(r)} \right\|_\infty - \left\| f^{(r)} \right\|_\infty \geq 0.$$

Докажем следующие вспомогательные факты.

Лемма 2. *Пусть* $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $s \leq n-1$, *и* $\nu\left(g^{(s)}\right) \geq 2$. *Тогда существуют точки* ξ_{s+1} *и* η_{s+1}, $0 < \xi_{s+1} < \eta_{s+1} < 1$, *для которых*

$$g^{(s+1)}\left(\xi_{s+1}\right) > 0 \quad \text{и} \quad g^{(s+1)}\left(\eta_{s+1}\right) < 0.$$

Лемма 3. *Пусть* $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $s \leq n-1$, *и существуют точки* ξ_s, η_s *и* ω_s, $0 < \xi_s < \eta_s < \omega_s \leq 1$, *для которых*

$$g^{(s)}\left(\xi_s\right) > 0, \quad g^{(s)}\left(\eta_s\right) < 0 \quad \text{и} \quad g^{(s)}\left(\omega_s\right) \geq 0.$$

Тогда найдутся точки ξ_{s+1}, η_{s+1} *и* ω_{s+1}, $0 < \xi_{s+1} < \eta_{s+1} < \omega_{s+1} \leq 1$, *такие, что*

$$g^{(s+1)}\left(\xi_{s+1}\right) > 0, \quad g^{(s+1)}\left(\eta_{s+1}\right) < 0 \quad \text{и} \quad g^{(s+1)}\left(\omega_{s+1}\right) \geq 0.$$

***Доказательство леммы* 2.** Действительно, в силу свойства 1 функции g и выбора числа s, $g^{(s)}(0) \leq 0$. Кроме того, согласно условию леммы $\nu\left(g^{(s)}\right) \geq 2$. Поэтому несложно заметить, что существуют точки ξ_s и η_s, $0 < \xi_s < \eta_s \leq 1$, для которых

$$g^{(s)}\left(\xi_s\right) > 0 \quad \text{и} \quad g^{(s)}\left(\eta_s\right) < 0. \tag{10}$$

Но тогда по теореме Лагранжа существуют точки ξ_{s+1} и η_{s+1}, $0 < \xi_{s+1} < \eta_{s+1} < 1$, для которых

$$g^{(s+1)}\left(\xi_{s+1}\right) = \frac{g^{(s)}\left(\xi_s\right) - g^{(s)}(0)}{\xi_s} > 0 \;\text{ и }\; g^{(s+1)}\left(\eta_{s+1}\right) = \frac{g^{(s)}\left(\eta_s\right) - g^{(s)}\left(\xi_s\right)}{\eta_s - \xi_s} < 0.$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

Доказательство леммы **3** полностью аналогично доказательству леммы 2.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 6.

Рассмотрим сначала случай, когда $n \neq r-1$. Покажем, что существуют точки ξ_r и η_r, $0 < \xi_r < \eta_r \leq 1$, для которых $g^{(r)}\left(\xi_r\right) > 0$ и $g^{(r)}\left(\eta_r\right) < 0$.

Для этого используем лемму 2 при $s = l$. В результате получим, что существуют точки ξ_{l+1} и η_{l+1}, $0 < \xi_{l+1} < \eta_{l+1} < 1$, для которых $g^{(l+1)}\left(\xi_{l+1}\right) > 0$ и $g^{(l+1)}\left(\eta_{l+1}\right) < 0$. Если теперь $l+1 < r$, то в силу свойства 1 $g^{(l+1)}(0) \leq 0$ и, следовательно, $\nu\left(g^{(l+1)}\right) \geq 2$. Таким образом, вновь можно применить лемму 2 при $s = l+1$. Повторяя эту цепочку рассуждений, убеждаемся в существовании необходимых точек ξ_r и η_r.

Покажем теперь, что существуют точки ξ_n, η_n и ω_n, $0 < \xi_n < \eta_n < \omega_n \leq 1$, для которых

$$g^{(n)}\left(\xi_n\right) > 0, \quad g^{(n)}\left(\eta_n\right) < 0 \quad \text{и} \quad g^{(n)}\left(\omega_n\right) \geq 0.$$

Ясно, что в случае $n = r$, согласно свойству 3 функции g, можно положить $\omega_r = 1$. В случае $r < n$ последовательно применим лемму 3 при $s = r$, $s = r+1, \ldots, s = n-1$. В результате мы убедимся в существовании искомых точек ξ_n, η_n и ω_n. Но тогда, в силу теоремы Лагранжа, существуют точки η_{n+1} и ω_{n+1}, $0 < \eta_{n+1} < \omega_{n+1} \leq 1$, для которых

$$g^{(n+1)}\left(\eta_{n+1}\right)=\frac{g^{(n+1)}\left(\eta_n\right)-g^{(n+1)}\left(\xi_n\right)}{\eta_n-\xi_n}<0,$$

$$g^{(n+1)}\left(\omega_{n+1}\right)=\frac{g^{(n+1)}\left(\omega_n\right)-g^{(n+1)}\left(\eta_n\right)}{\omega_n-\eta_n}\geq 0.$$

Однако последнее противоречит свойству 4 функции g.

Перейдем к рассмотрению случая $n=r-1$. Если $l<r-1$, то последовательно применяя лемму 2 (как и при рассмотрении предыдущего случая), можно убедиться в существовании точек ξ_r и η_r, $0<\xi_r<\eta_r<1$, для которых

$$g^{(r)}\left(\xi_r\right)>0 \quad \text{и} \quad g^{(r)}\left(\eta_r\right)<0.$$

В то же время, согласно свойству 3 функции g, $g^{(r)}(1)\geq 0$. Следовательно, $g^{(r)}\left(\eta_r\right)<0$ и $g^{(r)}(1)\geq 0$, что противоречит свойству 4.

Осталось рассмотреть случай, когда $l=r-1$. В силу свойства 4 функция $g^{(r-1)}$ является выпуклой вверх и, следовательно, имеет не более двух перемен знака на отрезке $[0,1]$. При этом неравенство (9) возможно лишь в случае, когда

$$g^{(r-1)}(0)<0 \quad \text{и} \quad g^{(r-1)}(1)<0,$$

а также существует точка $\xi\in(0,1)$, в которой $g^{(r-1)}(\xi)>0$. Поэтому, в силу теоремы Лагранжа, существует точка $\eta\in(\xi,1)$ такая, что $g^{(r)}(\eta)<0$. Последнее противоречит свойству 3 функции g.

Таким образом, теорема 6 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $\delta>0$ и функция $f\in AM$ такова, что $\|f\|_p\leq\delta$ и $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty\leq 1$. Согласно теореме 6, для любого $l=0,1,\ldots,r-1$ число перемен знака разности $y_\delta^{(l)}-f^{(l)}$ на отрезке $[0,1,]$ не превышает 1. Покажем, что для всех $l=\overline{0,r-1}$ выполняется неравенство

$$\left\|f^{(l)}\right\|_\infty\leq\left\|y_\delta^{(l)}\right\|_\infty. \tag{11}$$

Для этого предположим, что существует $l\in\{0,\ldots,r-1\}$ такое, что

$$\left\|y_\delta^{(l)}\right\|_\infty<\left\|f^{(l)}\right\|_\infty. \tag{12}$$

Если $l\leq r-2$ или $y_\delta\notin\mathfrak{M}_r^{r-1}$, то $y_\delta^{(l)}(0)=0$. В силу предположения (12)

$$y_\delta^{(l)}(1)=\left\|y_\delta^{(l)}\right\|_\infty<\left\|f^{(l)}\right\|_\infty=f^{(l)}(1)$$

и для любого $x\in[0,1]$ имеем $y_\delta^{(l)}(x)\leq f^{(l)}(x)$, ведь в обратном случае разность $y_\delta^{(l)}-f^{(l)}$ имела бы не менее двух перемен знака на отрезке $[0,1]$. Следовательно, для любого $x\in[0,1]$ получим

$$y_\delta^{(l-1)}(x)=\int\limits_0^x y_\delta^{(l)}(t)\,dt\leq\int\limits_0^x f^{(l)}(t)\,dt\leq f^{(l-1)}(x),$$

причем знак строгого неравенства имеет место, если $x=1$. Аналогично $y_\delta^{l-2}(x)\leq$ $\leq f^{(l-2)}(x)$ для любого $x\in[0,1)$ и $y_\delta^{(l-2)}(1)<f^{(l-2)}(1)$. Продолжая эти рассуж-

дения, убеждаемся в том, что $y_\delta(1) < f(1)$ и $y_\delta(x) \leq f(x)$ для любого $x \in [0,1)$. Поэтому $\delta = \|y_\delta\|_p < \|f\|_p$, что противоречит выбору функции f.

Пусть теперь $l = r-1$ и $y_\delta \in \mathfrak{M}_r^{r-1}$. По аналогии с предыдущим случаем можно убедиться в том, что $y_\delta^{(r-1)}(0) > f^{(r-1)}(0)$. Кроме того, в силу (12) $y_\delta^{(r-1)}(1) < f^{(r-1)}(1)$. Применяя теорему Лагранжа, получаем, что существует точка $\eta \in (0,1)$, для которой $y_\delta^{(r)}(\eta) < f^{(r)}(\eta)$. Однако тогда

$$y_\delta^{(r)}(\eta) < f^{(r)}(\eta) \leq f^{(r)}(1) \leq 1 = y_\delta^{(r)}(1) = y_\delta^{(r)}(\eta),$$

что невозможно. Таким образом, неравенство (11) всегда имеет место.

Теперь покажем, что для всех $l \in \{1,\ldots,r-1\}$,

$$\left\|f^{(l)}\right\|_1 \leq \left\|y_\delta^{(l)}\right\|_1. \tag{13}$$

Действительно, из неравенства (11) и свойств функции y_δ, приведенных в начале п. 3, имеем

$$\left\|f^{(l)}\right\|_1 = \int\limits_0^1 f^{(l)}(t)\,dt = f^{(l-1)}(1) - f^{(l-1)}(0) \leq f^{(l-1)}(1) = \left\|f^{(l-1)}\right\|_\infty \leq$$

$$\leq \left\|y_\delta^{(l-1)}\right\|_\infty = y_\delta^{(l-1)}(1) = \int\limits_0^1 y_\delta^{(l)}(t)\,dt = \left\|y_\delta^{(l)}\right\|_1.$$

Отметим, что для любой функции $g \in AM$ функция $g(1-\cdot)$ является ее неубывающей перестановкой (определение перестановок можно найти, например, в [11], гл. 1). А тогда, в силу неравенств (11), (13) и теоремы 6, для любых $1 \leq q \leq$ $\leq \infty$ и $l \in \{1,\ldots,r-1\}$ применима теорема 1.3.10 из [11]. Поэтому имеет место неравенство

$$\left\|f^{(l)}\right\|_q \leq \left\|y_\delta^{(l)}\right\|_q. \tag{14}$$

В частности, при $l = k$ будем иметь $\|f^{(k)}\|_q \leq \left\|y_\delta^{(k)}\right\|_q$, что и требовалось показать.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Вместо нормы $\|\cdot\|_q$, $1 \leq q \leq \infty$, в (14) можно рассмотреть более общую конструкцию – функционал $\int_0^1 \Phi(|f(t)|)\,dt$, где $\Phi(t)$ – произвольная N-функция (см. [11], гл. 1). Тогда имеет место следующее утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq r-1$, $0 < p \leq \infty$ и $\Phi(t)$ – произвольная N-функция. Тогда для любой функции $f \in AM$, для которой $\|f\|_p \leq$ $\leq \delta$ и $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty \leq 1$, выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^1 \Phi\left(\left|f^{(k)}(t)\right|\right)\,dt \leq \int\limits_0^1 \Phi\left(\left|y_\delta^{(k)}(t)\right|\right)\,dt.$$

***Доказательство следствия* 2.** Пусть $n \in \mathbf{N}$, $n \geq r$, и $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_{n;p}$, $\delta_1 <$ $< \delta_2$. Положим $\delta := \dfrac{\delta_1 + \delta_2}{2}$. Ранее (см. п. 2) нами было отмечено, что функция

$h(t) := \|g_{t,n}\|_p\,,\ t \in [0,1),$ является строго убывающей биекцией интервала $[0,1)$ на интервал $\Delta_{n;p}$. Следовательно, существуют числа $\lambda_1,\ \lambda$ и $\lambda_2,\ 0 \le \lambda_2 < \lambda < \lambda_1 < 1,$ для которых $h(\lambda_1) = \delta_1,\ h(\lambda) = \delta$ и $h(\lambda_2) = \delta_2$.

Покажем, что $\lambda \ge \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$. Действительно, при $p \in \{1, \infty\}$ функция $h(t)$ линейна, а при $p \in (0,1),\ h(t)$ строго выпукла вверх. Поэтому

$$h(\lambda) = \delta = \frac{h(\lambda_1) + h(\lambda_2)}{2} \le h\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right), \tag{15}$$

а из мононности $h(t)$ следует, что $\lambda \ge \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

Заметим теперь, что для любого $x \in [0,1]$

$$\frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)}(x) - \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1}^{(k)}(x) = \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)}(x) \left(1 - \frac{(n+1-r)x}{n+1-k}\right) > 0.$$

Следовательно,

$$\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta; AM) = \left\| \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)} + \lambda \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)}(x) \left(1 - \frac{(n+1-r)x}{n+1-k}\right) \right\|_q \le$$

$$\le \frac{1}{2} \left[\left\| \lambda_1 \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)} + (1-\lambda_1) \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1}^{(k)} \right\|_q + \right.$$

$$\left. + \left\| \lambda_2 \frac{(n-r)!}{n!} e_n^{(k)} + (1-\lambda_2) \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!} e_{n+1}^{(k)} \right\|_q \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \Big(\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta_1; AM) + \omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta_2; AM) \Big). \tag{16}$$

Очевидно, что неравенства (15) и (16) одновременно обращаются в равенство тогда и только тогда, когда $p \in \{1, \infty\}$ и $q \in \{1, \infty\}$. В остальных случаях функция $\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta; AM)$ строго выпукла вниз на интервале $\Delta_{n;p},\ n \ge r$.

Отметим, что приведенные рассуждения с очевидными изменениями могут быть перенесены и на случай $n = r - 1$.

Следствие 2 доказано.

4. Доказательства остальных результатов. ***Доказательство леммы* 1.** Очевидно, что любой многочлен $Q \in \mathcal{P}_+^n$ имеет вид

$$Q(x) = \sum_{m=0}^{n} Q_m e_m(x), \qquad x \in [0,1], \tag{17}$$

где $Q_m \ge 0$ для всех $m = 0, \ldots, n$.

С учетом представления (17) для любого $q,\ 1 \le q \le \infty,$ имеем

$$\left\| Q^{(k)} \right\|_q = \left\| \sum_{m=k}^{n} Q_m e_m^{(k)} \right\|_q \le \sum_{m=k}^{n} Q_m \left\| e_m^{(k)} \right\|_q \le \max_{m=\overline{k,n}} \left\| e_m^{(k)} \right\|_q \sum_{m=k}^{n} Q_m \le$$

$$\le \max_{m=\overline{k,n}} \left\| e_m^{(k)} \right\|_q \|Q\|_\infty. \tag{18}$$

В то же время для произвольного $x \in [0,1]$

$$Q(x) = \sum_{m=0}^{n} Q_m x^m \geq \sum_{m=0}^{n} Q_m x^n = \|Q\|_\infty x^n = \|Q\|_\infty e_n(x).$$

Поэтому для любого $0 < p \leq \infty$

$$\|Q\|_p \geq \Big\| \|Q\|_\infty e_n \Big\|_p = \|Q\|_\infty \|e_n\|_p .$$

Объединяя последнее неравенство с неравенством (18), получаем

$$\left\|Q^{(k)}\right\|_q \leq \frac{\max\limits_{k\leq m\leq n} \left\|e_m^{(k)}\right\|_q}{\|e_n\|_p} \|Q\|_p.$$

Для доказательства утверждения леммы остается лишь проверить, что $\max\limits_{k\leq m\leq n} \left\|e_m^{(k)}\right\|_q = \left\|e_n^{(k)}\right\|_q$. Действительно, для любого $m \in \mathbf{N},\ m \geq k,$

$$\left\|e_m^{(k)}\right\|_q = \frac{m!}{(m-k)![(m-k)q+1]^{1/q}}.$$

Нетрудно проверить, что последовательность чисел $\left\{\left\|e_{m;b}^{(k)}\right\|_q\right\}_{m=k}^{\infty}$ является монотонно возрастающей тогда и только тогда, когда для любого $m \geq k$

$$1 + \frac{k}{m-k+1} \geq \left(1 + \frac{1}{m-k+1/q}\right)^{1/q}.$$

При этом последнее неравенство следует из неравенства Бернулли для показателя $1 \leq q \leq \infty$:

$$\left(1 + \frac{k}{m-k+1}\right)^q \geq 1 + \frac{kq}{m-k+1} \geq 1 + \frac{1}{(m-k)/q+1/q} \geq 1 + \frac{1}{m-k+1/q}.$$

Лемма 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Согласно теореме 1, для любой функции $f \in AM$ такой, что $f \notin \mathcal{P}_+^{r-1}$, выполняется неравенство

$$\left\| \frac{f^{(k)}}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty} \right\|_q \leq \left\|y_\delta^{(k)}\right\|_q,$$

где $\delta := \dfrac{\|f\|_p}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty}$ и функция y_δ определена в (2). Тогда для любого $A \geq \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \times$ $\times \|e_{r-1}\|_p^{-1}$

$$\left\| \frac{f^{(k)}}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty} \right\|_q \leq A \|y_\delta\|_p + \left(\left\|y_\delta^{(k)}\right\|_q - A \|y_\delta\|_p \right) \leq$$

$$\leq A \frac{\|f\|_p}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty} + \sup_{y \in \mathfrak{M}_r} \left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p \right) \frac{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty}.$$

Из последнего неравенства следует неравенство (3).

В случае, когда $f \in \mathcal{P}_+^{r-1}$, из леммы 1 и того факта, что $f^{(r)} \equiv 0$, получаем

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le \frac{\left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q}{\|e_{r-1}\|_p}\,\|f\|_p \le A\|f\|_p + C_{p,q}^{k,r}(A)\left\|f^{(r)}\right\|_\infty .$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы 2 и убедиться в точности неравенства (3), покажем, что $0 < C_{p,q}^{k,r}(A) < \infty$ для любого $A \ge \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$.

Заметим, что

$$C_{p,q}^{k,r}(A) := \sup_{y\in\mathfrak{M}_r}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) = \sup_{n\ge r-1}\sup_{y\in\mathfrak{M}_r^n}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right).$$

При $n = r-1$ введем в рассмотрение функцию

$$G(\rho) = \left\|\rho e_{r-1}^{(k)} + \frac{e_r^{(k)}}{r!}\right\|_q - A\left\|\rho e_{r-1} + \frac{e_r}{r!}\right\|_p, \qquad \rho > 0.$$

С учетом непрерывности функции G на $(0,\infty)$ и условия $A \ge \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ имеем

$$\lim_{\rho\to\infty} G(\rho) = \lim_{\rho\to\infty}\rho\left(\left\|e_{r-1}^{(k)} + \frac{e_r^{(k)}}{\rho r!}\right\|_q - A\left\|e_{r-1} + \frac{e_r}{\rho r!}\right\|_p\right) =$$

$$= \lim_{\rho\to\infty}\rho\Big(\left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q - A\,\|e_{r-1}\|_p\Big) \le 0.$$

Следовательно,

$$\sup_{y\in\mathfrak{M}_r^{r-1}}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) < \infty. \tag{19}$$

Покажем теперь, что $\sup_{n\ge r}\sup_{y\in\mathfrak{M}_r^n}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) < \infty$. Очевидно, что для любого $n > r-1$ величина

$$\sup_{y\in\mathfrak{M}_r^n}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) = \sup_{0\le\lambda<1}\left(\left\|g_{\lambda,n}^{(k)}\right\|_q - A\|g_{\lambda,n}\|_p\right) \tag{20}$$

конечна. Поэтому нам достаточно проверить, что

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathfrak{M}_r^n}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) < \infty. \tag{21}$$

Действительно, при всех достаточно больших n для любой функции $y \in \mathfrak{M}_r^n$ имеют место неравенства

$$\left(\frac{(n+1-r)!}{(n+1)!}\left\|e_{n+1}^{(k)}\right\|_q - A\frac{(n-r)!}{n!}\|e_n\|_p\right) \le \left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) \le$$

$$\le \left(\frac{(n-r)!}{n!}\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\frac{(n+1-r)!}{(n+1)!}\|e_{n+1}\|_p\right).$$

В силу условий теоремы $1 \le r-k+\dfrac{1}{q} < r+\dfrac{1}{p}$, ведь $r-k+\dfrac{1}{q} \le r-1+1 \le r+\dfrac{1}{p}$ и знак равенства в последнем неравенстве возможен тогда и только тогда, когда $k=q=1$ и $p=\infty$. Поэтому

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathfrak{M}_r^n}\left(\left\|y^{(k)}\right\|_q - A\|y\|_p\right) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n^{-r+k-1/q}}{q^{1/q}} - \frac{n^{-r-1/p}}{p^{1/p}}\right) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty}\frac{n^{-r+k-1/q}}{q^{1/q}} = 0.$$

Сопоставляя (19) – (21), заключаем, что $C_{p,q}^{k,r}(A)$ – конечная положительная постоянная, что и завершает доказательство теоремы 2.

***Доказательство теоремы* 3.** Очевидно, что для любых двух функций $f, g \in \in AM$ $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Кроме того, для любого $p \in (0,1]$ в силу интегрального неравенства Минковского и неотрицательности функций f и g

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

В силу теоремы 8.2 [17] (гл. 8), любую функцию $f \in AM$ можно представить в виде суммы ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e_n(x), \qquad x \in [0,1],$$

где коэффициенты f_n, $n \in \mathbf{Z}_+$, неотрицательны. Более того, функция f может быть равномерно приближена последовательностью многочленов $\left\{\sum_{n=0}^{N} f_n e_n\right\}_{N=0}^{\infty}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbf{N}$, $N \ge r$, такое, что $\left\|f^{(k)} - \sum_{n=k}^{N} f_n e_n^{(k)}\right\|_q < \varepsilon$. Тогда с учетом леммы 1 для любого $A \ge \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q \|e_{r-1}\|_p^{-1}$ имеем

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le \varepsilon + \left\|\sum_{n=k}^{N} f_n e_n^{(k)}\right\|_q \le \varepsilon + \sum_{n=k}^{N} f_n \left\|e_n^{(k)}\right\|_q \le$$

$$\le \varepsilon + \frac{\left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q}{\|e_{r-1}\|_p}\sum_{n=k}^{r-1} f_n \|e_n\|_p + \sum_{n=r}^{N} f_n\left(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\|e_n\|_p\right) + A\sum_{n=r}^{N} f_n \|e_n\|_p \le$$

$$\le \varepsilon + A\sum_{n=k}^{N} f_n \|e_n\|_p + D_{p,q,s}^{k,r}(A)\sum_{n=r}^{N} f_n \left\|e_n^{(r)}\right\|_s \le$$

$$\le \varepsilon + A\|f\|_p + D_{p,q,s}^{k,r}(A)\left\|f^{(r)}\right\|_s.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ для доказательства неравенства (6) остается убедиться в конечности и положительности величины $D_{p,q,s}^{k,r}(A)$. Очевидно, что

$$\left\|e_n^{(k)}\right\|_q \sim q^{-1/q} n^{k-1/q}, \quad \|e_n\|_p \sim p^{-1/p} n^{-1/p}, \quad \text{и} \quad \left\|e_n^{(r)}\right\|_s \sim s^{-1/s} n^{r-1/s}$$

при $n \to \infty$. Из условий (5), связывающих показатели p, q, s и порядки k, r производных, получаем

$$k - \frac{1}{q} \geq 1 - \frac{1}{q} \geq 0 \geq -\frac{1}{p}.$$

При этом $k - \dfrac{1}{q} = -\dfrac{1}{p}$ в том и только в том случае, когда $k = 1$, $p = \infty$ и $q = 1$. Однако тогда $\|e_n'\|_1 \leq \|e_n\|_\infty$. Поэтому для любого $A \geq 1$ $D_{p,q,s}^{k,r} \leq 0$ при всех $n \geq 2$, и $\Gamma_{\infty,1,s}^{1,r}(AM) = \varnothing$.

Пусть далее $k - \dfrac{1}{q} > -\dfrac{1}{p}$. Тогда

$$\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\left\|e_n\right\|_p \sim q^{-1/q} n^{k-1/q} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В случае, когда $k - \dfrac{1}{q} > r - \dfrac{1}{s}$, $D_{p,q,s}^{k,r}(A) = \infty$ и, следовательно, $\Gamma_{p,q,s}^{k,r}(AM) = \varnothing$.

Если $k - \dfrac{1}{q} < r - \dfrac{1}{s}$, то супремум в определении величины $D_{p,q,s}^{k,r}(A)$ достигается, так как $\lim_{n\to\infty}\left(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\left\|e_n\right\|_p\right)\left\|e_n^{(r)}\right\|_s^{-1} = 0$.

В случае $k - \dfrac{1}{q} = r - \dfrac{1}{s}$ несложно видеть, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\left\|e_n\right\|_p\right)\left\|e_n^{(r)}\right\|_s^{-1} = s^{1/s} q^{-1/q}.$$

Следовательно, $D_{p,q,s}^{k,r}(A)$ конечна и положительна.

Теорема 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 4.** Докажем, что последовательность чисел $\left\{\tau_q^{k,r}(n)\right\}_{n=r-1}^{\infty}$ не убывает. Для этого сначала покажем, что

$$\tau_q^{k,r}(r-1) \leq \tau_q^{k,r}(r). \tag{22}$$

Неравенство (22) можно представить в виде

$$\frac{r-k}{r+1}\left(1 + \frac{1}{r-1-k+1/q}\right)^{1/q} \leq 1 - \frac{1}{r+1-k}\left(1 - \frac{1}{r+1-k+1/q}\right)^{1/q}. \tag{23}$$

В силу неравенства Бернулли для показателя $\dfrac{1}{q}$

$$\left(1 + \frac{1}{r-1-k+1/q}\right)^{1/q} \leq \frac{r-1-k+2/q}{r-1-k+1/q},$$

$$\left(1 - \frac{1}{r+1-k+1/q}\right)^{1/q} \leq \frac{r+1-k}{r+1-k+1/q}.$$

Поэтому мы докажем (23), как только убедимся в выполнении неравенства

$$\frac{(r-k)(r-1-k+2/q)}{(r+1)(r-1-k+1/q)} \leq \frac{r-k+1/q}{r+1-k+1/q}. \tag{24}$$

Очевидно, что неравенство (24) равносильно неравенству

$$\frac{1}{q} + rk - k^2 + \frac{k}{q} - r^2k + \frac{r^2}{q} + 2rk^2 + \frac{r}{q^2} + \frac{3k^2}{q} - k^3 - \frac{4rk}{q} - \frac{2k}{q^2} - \frac{1}{q^2} \le 0, \quad (25)$$

которое достаточно доказать при $r = k + 1$. В этом случае оно принимает вид

$$\frac{2}{q} \le \frac{k}{q} + \frac{k}{q^2}.$$

Поэтому неравенство (25) всегда выполняется, как только $k \ge 2$.

Рассмотрим теперь случай $k = 1$ и $r = 2$. В этом случае неравенство (23) принимает вид

$$\frac{2}{3} \le \frac{2}{(1+q)^{1/q}} - \frac{1}{(1+2q)^{1/q}}. \quad (26)$$

Покажем, что неравенство (26) выполняется для всех $q \in [1, \infty]$. Для этого введем в рассмотрение функцию $f(q) = \dfrac{2}{(1+q)^{1/q}} - \dfrac{1}{(1+2q)^{1/q}}$. Найдем ее производную

$$f'(q) = \frac{2}{(1+q)^{1/q}} \left(\frac{\ln(1+q)}{q^2} - \frac{1}{q(1+q)} \right) -$$

$$- \frac{1}{(1+2q)^{1/q}} \left(\frac{\ln(1+2q)}{q^2} - \frac{2}{q(1+2q)} \right) =$$

$$= \frac{2}{q} \left[\frac{1}{(1+q)^{1/q}} \left(\frac{\ln(1+q)}{q} - \frac{1}{1+q} \right) - \frac{1}{(1+2q)^{1/q}} \left(\frac{\ln(1+2q)}{2q} - \frac{1}{1+2q} \right) \right].$$

Теперь зафиксируем q и положим

$$\rho(x) := \frac{\frac{\ln(1+qx)}{qx} - \frac{1}{1+qx}}{(1+qx)^{1/q}}, \quad x \in [1, 2].$$

Справедливо соотношение $f'(q) = \dfrac{2\rho(1) - 2\rho(2)}{q}$. Докажем, что функция $\rho(x)$ убывает на отрезке $[1, 2]$. Для этого найдем производную функции $\rho(x)$:

$$\rho'(x) =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x(1+qx)} + \frac{q}{(1+qx)^2} - \frac{\ln(1+qx)}{qx^2} \right)(1+qx) - \left(\frac{\ln(1+qx)}{qx} - \frac{1}{1+qx} \right)}{(1+qx)^{1+1/q}}.$$

Для того чтобы показать, что $\rho'(x) \le 0$ для $x \in [1, 2]$, убедимся в выполнении неравенства

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1+q}{1+qx}}{\frac{1}{qx} + \frac{1+qx}{qx^2}} - \ln(1+qx) \le 0.$$

Обозначим левую часть последнего неравенства через $w(x)$ и продифференцируем ее:

$$w'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{(1+q)q}{(1+qx)^2}}{\frac{1}{qx} + \frac{1+qx}{qx^2}} + \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1+q}{1+qx} \right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{qx^2} + \frac{2}{qx^3} \right)}{\left(\frac{1}{qx} + \frac{1+qx}{qx^2} \right)^2} - \frac{q}{1+qx}.$$

Покажем, что $w'(x) \le 0$. Для этого необходимо и достаточно убедиться в том, что

$$\frac{1}{qx^3} \le \frac{(1+q)((1+q)x+1)}{(1+qx)^2 x} + \frac{1}{q(1+qx)x^3}.$$

Но поскольку $x \in [1,2]$, последнее неравенство всегда выполняется. Следовательно, функция $w(x)$ убывает. Докажем теперь, что $w(1) \le 0$. Несложно проверить, что

$$w(1) = \frac{2q}{2+q} - \ln(1+q)$$

убывает по q, и, более того, $w(1) = \dfrac{2}{3} - \ln 2 \le 0$. Поэтому $\rho(x)$ убывает по x и $f(q)$ возрастает по q. Таким образом, неравенство (26) доказано.

Для доказательства неравенства $\tau_q^{k,r}(n) \le \tau_q^{k,r}(n+1)$ для всех $n \ge r$ необходимо и достаточно показать, что выполняется неравенство

$$(n+1-k)\left(1 + \frac{1}{n-k+1/q}\right)^{1/q} +$$

$$+(n+2-r)\frac{n+2}{n+2-k}\left(1 - \frac{1}{n-k+2+1/q}\right)^{1/q} \le 2n+3-r. \qquad (27)$$

В силу неравенства Бернулли для показателя $\dfrac{1}{q}$

$$\left(1 + \frac{1}{n-k+1/q}\right)^{1/q} \le \frac{n-k+2/q}{n-k+1/q}$$

и

$$\left(1 - \frac{1}{n+2-k+1/q}\right)^{1/q} \le \frac{n+2-k}{n+2-k+1/q}.$$

Поэтому неравенство (27) следует из неравенства

$$(n+1-k)\frac{n-k+2/q}{n-k+1/q} + (n+2-r)\frac{n+2}{n-k+2+1/q} \le 2n+3-r. \qquad (28)$$

В свою очередь, неравенство (28) достаточно доказать лишь для $r = k+1$, т. е.

$$(n+1-k)\frac{n-k+2/q}{n-k+1/q} + (n+1-k)\frac{n+2}{n-k+2+1/q} \le 2n+2-k. \qquad (29)$$

Можно проверить, что неравенство (29) следует из того, что $1 \le k$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4. Согласно теореме 3, для любого $A \ge \left\|e_{r-1}^{(k)}\right\|_q$ неравенство (6) при $p = s = \infty$ обращает в равенство одна из функций $\{e_n(x)\}_{n=r}^{\infty}$. Для $n \ge r$ введем в рассмотрение величины

$$d(n) := d_q^{k,r}(n) := \frac{(n-r)!}{n!}\left(\left\|e_n^{(k)}\right\|_q - A\right).$$

Несложно видеть, что если при некотором $n \ge r$ $A \le \tau_q^{k,r}(n)$, то $d(n+1) \le \le d(n)$. Следовательно, $d(m) \le d(n)$ для всех $m \ge n$. Если же $A \ge \tau_q^{k,r}(n)$,

$n \geq r$, то $d(n) \leq d(n+1)$ и $d(n) \leq d(m)$ для всех $m \geq n$. Таким образом, если

$$A \in [\tau_q^{k,r}(n), \tau_q^{k,r}(n+1)], \qquad n \geq r-1,$$

то

$$D_{\infty,q,\infty}^{k,r}(A) = d(n+1),$$

что и завершает доказательство теоремы 3.

***Доказательство теоремы* 5.** Докажем необходимость условия (8). Действительно, если для заданных положительных чисел $M_{0,p}$, $M_{k,q}$ и $M_{r,\infty}$ существует функция $f \in AM$, для которой

$$\|f\|_p = M_{0,p}, \quad \left\|f^{(k)}\right\|_q = M_{k,q}, \quad \left\|f^{(r)}\right\|_\infty = M_{r,\infty},$$

то, очевидно, имеет место неравенство (8).

Докажем теперь достаточность условия (8). Пусть положительные числа $M_{0,p}$, $M_{k,q}$ и $M_{r,\infty}$ удовлетворяют (8), т. е.

$$\frac{M_{k,q}}{M_{r,\infty}} \leq \omega_{p,q,\infty}^{k,r}\left(\frac{M_{0,p}}{M_{r,\infty}}; AM\right).$$

Поскольку функция $\omega_{p,q,\infty}^{k,r}(\delta; AM)$ непрерывна, строго возрастает и принимает все положительные значения, то существует $\xi \in \left(0, \dfrac{M_{0,p}}{M_{r,\infty}}\right)$ такое, что

$$\left\|y_\xi^{(k)}\right\|_q = \frac{M_{k,q}}{M_{r,\infty}}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = M_{r,\infty} y_\xi(x) + M_{0,p} - M_{r,\infty}\xi, \qquad x \in [0,1].$$

Очевидно, что $f \in AM$, $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty = M_{r,\infty}$, $\left\|f^{(k)}\right\|_q = M_{k,q}$ и $\|f\|_p = M_{0,p}$.

Теорема 5 доказана.

Автор выражает благодарность профессору В. Ф. Бабенко за постановку задачи и полезные обсуждения при написании этой работы.

1. *Landau E.* Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43 – 49.
2. *Chui C. K., Smith P. W.* A note on Landau's problem for bounded intervals // Amer. Math. Mon. – 1975. – **82**. – P. 927 – 929.
3. *Звягинцев А. И., Лепин А. Я.* О неравенствах Колмогорова между верхними гранями функциональных производных для $n = 3$ // Латв. мат. ежегодник. – 1982. – **26**. – С. 176 – 181.
4. *Sato M.* The Landau inequality for bounded intervals with $\left\|f^{(3)}\right\|$ finite // J. Approxim. Theory. – 1982. – **34**. – P. 159 – 166.
5. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives and differences. – Berlin; Heidelberg.: Springer, 1992.
6. *Shadrin A. Yu.* To the Landau – Kolmogorov problem on a finite interval // Open Problems in Approxim. Theory. – 1994. – P. 192 – 204.
7. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdös // J. D'Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
8. *Bojanov B., Naidenov N.* Examples of Landau – Kolmogorov inequality in integral norms on a finite interval // J. Approxim. Theory. – 2002. – **117**. – P. 55 – 73.

9. *Бабенко Ю. В.* Точные неравенства типа Ландау для функций со вторыми производными из пространств Орлича // Вестн. Днепропетр. ун-та. Математика. – 2000. – **2**. – С. 18 – 22.
10. *Бабенко Ю. В.* Поточечные неравенства типа Ландау – Колмогорова для функций, определенных на конечном отрезке // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 238 – 243.
11. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные задачи для полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992.
12. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003.
13. *Babenko V. F., Rassias T. M.* On exact inequalities of Hardy – Littlewood – Polya type // J. Math. Anal. and Appl. – 2000. – **245**. – P. 570 – 593.
14. *Fink A. M.* Kolmogorov – Landau inequalities for monotone functions // J. Math. Appl. – 1992. – **90**. – P. 251 – 258.
15. *Widder D. V.* The Laplace transform // Princeton Math. Ser. – 1946.
16. *Скороходов Д. С.* О задаче Ландау – Колмогорова для классов абсолютно монотонных на отрезке функций // Мат. конгр.: тези доп. конф. (Київ, 27 – 29 серпня 2009 р.). – Київ, 2009.
17. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973.
18. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Науч. зап. Моск. ун-та. – 1939. – **30**. – С. 3 – 16.
19. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – 1985. – С. 252 – 263.

Получено 16.10.09,
после доработки — 09.02.11