УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. нац. ун-т; Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
В. А. Зонтов (Днепропетр. нац. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СПЛАЙНОВ, ЗАДАННЫХ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

We obtain the exact inequalities of the Bernstein type for splines $s \in S_{m,h} \bigcap L_2(\mathbb{R})$ as well as the exact inequalities that, for splines $s \in S_{m,h}$, $h > 0$, estimate L_p-norms of the Fourier transforms of their k th derivative by L_p-norms of the Fourier transforms of splines themselves.

Отримано точні нерівності типу Бернштейна для сплайнів $s \in S_{m,h} \bigcap L_2(\mathbb{R})$, а також точні нерівності, які для сплайнів $s \in S_{m,h}$, $h > 0$, оцінюють L_p-норми перетворень Фур'є k-ї похідної через L_p-норми перетворень Фур'є самих сплайнів.

1. Введение. Основные результаты. Пусть G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность, реализованная, как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Через $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, будем обозначать пространства функций $f\colon G \to \mathbb{R}$, интегрируемых в p-й степени (существенно ограниченных при $p = \infty$) с соответствующими нормами

$$\|f\|_{L_p(G)} = \begin{cases} \left(\int\limits_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{x \in G} |f(x)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Через $S_{m,h}$, $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, обозначим пространство заданных на $\mathbb{R}$ полиномиальных сплайнов порядка m, минимального дефекта, с узлами lh, $l \in \mathbb{Z}$. Пространство 2π-периодических сплайнов из $S_{m,\pi/n}$ будем обозначать через $\tilde{S}_{m,n}$.

Через $\varphi_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим m-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0 = \operatorname{sgn} \sin t$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,m}(t) = \lambda^{-m} \varphi_m(\lambda t)$. Отметим, что $\|\varphi_m\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = K_m$, где K_m — константы Фавара (см., например, [1, с. 105]),

$$K_m = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(m+1)}}{(1+2l)^{m+1}}, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Во многих вопросах теории аппроксимации важную роль играют неравенства типа Бернштейна для периодических и непериодических сплайнов. Следующие точные неравенства типа Бернштейна для сплайнов из $\tilde{S}_{m,n}$

$$\|s^{(k)}\|_{L_p(\mathbb{T})} \le n^k \frac{\|\varphi_{m-k}\|_{L_p(\mathbb{T})}}{\|\varphi_m\|_{L_p(\mathbb{T})}} \|s\|_{L_p(\mathbb{T})} \tag{1}$$

установлены В. М. Тихомировым [2] в случае $p = \infty$, Ю. Н. Субботиным [3] в случае $p = 1$, В. Ф. Бабенко и С. А. Пичуговым [4] в случае $p = 2$. Изложение этих, а также других неравенств типа Бернштейна для периодических сплайнов можно найти в [5] (гл. 6).

Для сплайнов из $S_{m,h} \bigcap L_\infty(\mathbb{R})$ известно следующее точное неравенство типа Бернштейна, полученное Г. Г. Магарил-Ильяевым [6]:

$$\|s^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\pi^m}{K_m h^m} \|s\|_{L_\infty(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

Аналог (2) для $S_{m,h} \bigcap L_2(\mathbb{R})$ установлен В. Ф. Бабенко и С. А. Спектор [7]:

$$\|s^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \left(\frac{\pi}{h}\right)^m \sqrt{\frac{K_1}{K_{2m+1}}} \|s\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

В данной работе доказано следующее обобщение неравенства (3).

Теорема 1. *Для любого сплайна* $s \in S_{m,h} \bigcap L_2(\mathbb{R})$ *и любого* $h > 0$ *при всех* $k = 1, \ldots, m-1$ *выполняется неравенство*

$$\|s^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \left(\frac{\pi}{h}\right)^k \sqrt{\frac{K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}} \|s\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{4}$$

Константа в правой части неравенства (4) *неулучшаема.*

Отметим, что обобщение неравенства (2) на случай производных любого порядка $k \leq m$ можно легко получить с помощью неравенства (2) и неравенства Колмогорова: для $s \in S_{m,h} \cap L_\infty(\mathbb{R})$

$$\|s^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{K_{m-k}}{K_m^{1-k/m}} \|s\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/m} \|s^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/m} \leqslant \left(\frac{\pi}{h}\right)^k \frac{K_{m-k}}{K_m} \|s\|_{L_\infty(\mathbb{R})}. \tag{5}$$

Для доказательства теоремы 1 мы используем два подхода. Первый из них аналогичен подходу, использованному в работе [4], и позволит получить неравенство (4) с явным значением константы. При втором подходе, основанном на использовании анализа Фурье, получим неравенство типа (4) с точной константой, записанной в менее явной форме, однако в сочетании с полученной первым методом оценкой константы это позволит показать, что константа в неравенстве (4) является точной.

Использовав анализ Фурье, мы (см. ниже теорему 2), наряду с неравенствами типа (4), для сплайнов $s \in S_{m,h}$ таких, что $\widehat{s} \in L_p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < \infty$, получим точные неравенства, оценивающие $\|\widehat{s^{(k)}}\|_{L_p(\mathbb{R})}$ через $\|\widehat{s}\|_{L_p(\mathbb{R})}$ (здесь и везде ниже

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

— преобразование Фурье функции f). Такие неравенства представляют интерес для изучения экстремальных задач теории аппроксимации в пространствах обобщенных функций умеренного роста, преобразования Фурье которых принадлежат заданному пространству $L_p(\mathbb{R})$. Пространства обобщенных функций умеренного роста, преобразования Фурье которых принадлежат заданному весовому пространству $L_p(\mathbb{R})$, называются пространствами Хермандера (см. [8] – [10] по поводу теории и приложений таких пространств). Интересные результаты по исследованию экстремальных задач теории аппроксимации в пространствах Хермандера получены в [11, 12].

Теорема 2. *Пусть* $p \in [1, \infty), m, k \in \mathbb{N}, \ k \le m$. *Для любого сплайна* $s \in S_{m,h}$ *такого, что* $\widehat{s} \in L_p(\mathbb{R})$, *при всех* $p \in [1, \infty)$, *если* $k < m$, *и при* $p \in (1, \infty)$, *если* $k = m$, *выполняется неулучшаемое неравенство*

$$\|\widehat{s^{(k)}}\|_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant \left\{ \frac{1}{h^{kp}} \max_{\omega} A_{p;m,k}(\omega) \right\}^{1/p} \|\widehat{s}\|_{L_p(\mathbb{R})}, \tag{6}$$

где

$$A_{p;m,k}(\omega) = \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \dfrac{1}{|\omega + 2\pi l|^{p(m-k+1)}}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \dfrac{1}{|\omega + 2\pi l|^{p(m+1)}}}. \tag{7}$$

2. Доказательства. ***Доказательство теоремы* 1.** Учитывая, что $s(x) \in S_{m,h}$ тогда и только тогда, когда $s_h(x) = s(hx) \in S_{m,1}$, а также тот факт, что

$$\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = h\|s_h\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \qquad \|s^{(k)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = h^{-2k+1}\|s_h^{(k)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

нетрудно убедиться в том, что неравенство (4) и его точность достаточно доказать для $h = 1$, что мы и будем предполагать в ходе данного доказательства.

Любой сплайн из $S_{m,1}$ однозначно представим (см., например, [13] (гл. 4), [14] (гл. 7)) в виде

$$s(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu N_{m+1}(x - \nu), \tag{8}$$

где $N_m(x)$ — B-сплайн порядка m, заданный равенством

$$N_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (x-k)_+^{m-1},$$

или, что эквивалентно, равенством

$$N_m(x) := (N_{m-1} * N_1)(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt, \quad m \ge 2,$$

N_1 — характеристическая функция интервала $[0, 1)$.

Пусть $s \in S_{m,1} \bigcap L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим свертку

$$(s * s)(x) = \int_{\mathbb{R}} s(t-x)s(t)dt =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_k c_j \int_{\mathbb{R}} N_{m+1}(t-x-k)N_{m+1}(t-j)dt =: \tilde{s}(x).$$

Ясно, что $\tilde{s}(x) = (s*s)(x) \in S_{2m+1,1} \cap L_\infty(\mathbb{R})$. При этом

1) $\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = (s*s)(0) = \|s*s\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|\tilde{s}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$,

2) $\|\tilde{s}'\|_{L_2(\mathbb{R})} = (s'*s')(0) = (s*s)''(0) = \|\tilde{s}''\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$.

Учитывая, что $\tilde{s}(x) \in S_{2m+1,1} \cap L_\infty(\mathbb{R})$, и используя неравенство (5), получаем

$$\|s'\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \|\tilde{s}''\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\pi^2 K_{2m-1}}{K_{2m+1}}\|\tilde{s}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \frac{\pi^2 K_{2m-1}}{K_{2m+1}}\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Таким образом, для $h=1$ и $k=1$ установлено неравенство

$$\|s'\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\pi^2 K_{2m-1}}{K_{2m+1}}\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

По индукции для любого $k<m$ получим

$$\|s^{(k)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\pi^{2k} K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{9}$$

Таким образом, неравенство (4) при $h=1$ доказано.

Другой подход к доказательству неравенства (4) состоит в следующем. Используя стандартные свойства преобразования Фурье, для сплайна s вида (8) получаем

$$\widehat{s}(\omega) = m_s(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega)$$

и

$$\widehat{s^{(k)}}(\omega) = (-i\omega)^k m_s(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega),$$

где

$$m_s(\omega) \colon = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu\omega}.$$

Используя равенство Планшереля, имеем

$$\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|m_s(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|m_s(\omega)\right|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^2 d\omega \tag{10}$$

и аналогично

$$\|s^{(k)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|m_s(\omega)\right|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\omega+2\pi l)^{2k}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^2 d\omega. \tag{11}$$

Положим

$$A_{m,k}(\omega) \colon = \frac{\sum_{l\in\mathbb{Z}} (\omega+2\pi l)^{2k}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^2}{\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^2}. \tag{12}$$

Функция, стоящая в знаменателе правой части (12), непрерывна и не обращается в нуль ни в одной точке (см. [13, с. 150 – 152]). Учитывая (см. [13, с. 153]), что

$$\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega)\right|^2 = \left|\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\right|^{2m+2}, \tag{13}$$

получаем

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}(\omega+2\pi l)^{2k}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^2=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{|1-e^{-i\omega}|^{2m+2}}{(\omega+2\pi l)^{2m-2k+2}}=$$

$$=|1-e^{-i\omega}|^{2k}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m-k+1}}(\omega+2\pi l)\right|^2.$$

Таким образом, числитель правой части (12) также является непрерывной 2π-периодической функцией. Следовательно, $A(\omega)$ — непрерывная на всей числовой оси 2π-периодическая функция, которую можно представить в виде

$$A_{m,k}(\omega)=\frac{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{(\omega+2\pi l)^{2m-2k+2}}}{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{(\omega+2\pi l)^{2m+2}}}. \tag{14}$$

Используя (10)–(12), получаем

$$\|s^{(k)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}A_{m,k}(\omega)\left|m_s(\omega)\right|^2\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^2d\omega\le\max_\omega A(\omega)\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\|s^{(k)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\le\max_\omega A_{m,k}(\omega)\|s\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{15}$$

Покажем, что константа $\max\limits_\omega A_{m,k}(\omega)$ в этом неравенстве неулучшаема.

Пусть $\Phi_n(\omega)$ — ядро Фейера,

$$\Phi_n(\omega)=\frac{\sin^2\dfrac{(n+1)\omega}{2}}{(n+1)\sin^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Для любой непрерывной 2π-периодической функции f последовательность

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\omega)\Phi_n(\omega-\xi)d\omega\right\}_{n=1}^\infty$$

равномерно на всей числовой оси сходится к $f(\xi)$ при $n\to\infty$.

Пусть $\max\limits_\omega A_{m,k}(\omega)=A_{m,k}(\omega_0)$. Положим

$$m_n(\omega)=\sqrt{\Phi_n(\omega-\omega_0).} \tag{16}$$

Разложим $m_n(\omega)$ в ряд Фурье

$$m_n(\omega)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}c_{\nu,n}e^{i\nu\omega}$$

и определим последовательность сплайнов $s_n(x)$, положив

$$s_n(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_{\nu,n} N_{m+1}(x-\nu),$$

или, в образах Фурье,

$$\widehat{s_n}(\omega) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_{\nu,n} e^{i\nu\omega} \widehat{N_{m+1}}(\omega) = m_n(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega).$$

Учитывая (10), (11) и определение (16) функции $m_n(\omega)$, имеем

$$\|s_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |m_n(\omega)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\omega_0) \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)|^2 d\omega,$$

$$\left\|s_n^{(k)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |m_n(\omega)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\omega+2\pi l)^{2k} |\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\omega_0) \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\omega+2\pi l)^{2k} |\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)|^2 d\omega.$$

При $n \to \infty$ получаем

$$\frac{\left\|s_n^{(k)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}{\|s_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} =$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\omega_0) \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\omega+2\pi l)^{2k} |\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)|^2 d\omega}{\int_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\omega_0) \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)|^2 d\omega} \to$$

$$\to \frac{\sum_{l\in\mathbb{Z}} (\omega_0+2\pi l)^{2k} |\widehat{N_{m+1}}(\omega_0+2\pi l)|^2}{\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega_0+2\pi l)|^2} = A_{m,k}(\omega_0) = \max_\omega A_{m,k}(\omega).$$

Таким образом, мы показали неулучшаемость константы в (15).

Вследствие (14)

$$\max_\omega A_{m,k}(\omega) \geq A_{m,k}(\pi) = \frac{\pi^{2k} K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}.$$

С другой стороны, в силу (9) и доказанной неулучшаемости константы $\max\limits_\omega A_{m,k}(\omega)$ в (15)

$$\max_\omega A_{m,k}(\omega) \leq \frac{\pi^{2k} K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}.$$

Таким образом,

$$\max_{\omega} A_{m,k}(\omega) = A_{m,k}(\pi) = \frac{\pi^{2k} K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}. \tag{17}$$

Неулучшаемость константы в неравенстве (9), а значит и в (4), доказана.

Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Доказывая теорему 2, мы так же, не уменьшая общности, можем считать, что $h = 1$. Это следует из того факта, что $s(x) \in S_{m,h}$ тогда и только тогда, когда $s_h(x) = s(hx) \in S_{m,1}$, и соотношений

$$\|\widehat{s}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = h^{p-1}\|\widehat{s_h}\|^p_{L_p(\mathbb{R})}, \qquad \|\widehat{s^{(k)}}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = h^{-p(k+1)-1}\|\widehat{s_h^{(k)}}\|^p_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Как и при установлении соотношений (10) и (11), будем иметь

$$\|\widehat{s}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{s}(\omega)|^p d\omega = \int\limits_0^{2\pi} \big|m_s(\omega)\big|^p \sum_{l\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\big|^p d\omega \tag{18}$$

и

$$\|\widehat{s^{(k)}}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = \int\limits_0^{2\pi} \big|m_s(\omega)\big|^p \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{pk} \big|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\big|^p d\omega. \tag{19}$$

Положим

$$A_{p;m,k}(\omega) := \frac{\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{pk} \big|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\big|^p}{\sum_{l\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\big|^p}. \tag{20}$$

Учитывая (13), нетрудно убедиться в том, что в условиях теоремы 2 ряды, стоящие в числителе и знаменателе (20), равномерно на всей оси сходятся и, следовательно, их суммы непрерывны, причем знаменатель ни в одной точке не равен нулю. Таким образом, $A_{p;m,k}(\omega)$ — непрерывная на всей числовой оси 2π-периодическая функция.

Используя (18) – (20), получаем

$$\|\widehat{s^{(k)}}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = \int\limits_0^{2\pi} A_{p;m,k}(\omega) \big|m_s(\omega)\big|^p \sum_{l\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\big|^p d\omega \le$$
$$\le \max_{\omega} A_{p;m,k}(\omega) \|\widehat{s}\|^p_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\|\widehat{s^{(k)}}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} \le \max_{\omega} A_{p;m,k}(\omega) \|\widehat{s}\|^p_{L_p(\mathbb{R})}. \tag{21}$$

Докажем точность константы $\max\limits_{\omega} A_{p;m,k}(\omega)$ в (21). Положим для $p < \infty$

$$m_{n,p}(\omega) = \big\{\Phi_n(\omega - \omega_0)\big\}^{1/p},$$

где ω_0 таково, что $\max\limits_{\omega} A_{p;m,k}(\omega) = A_{p;m,k}(\omega_0)$. Разложим функцию $m_{n,p}$ в ряд Фурье

$$m_{n,p}(\omega) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{\nu,n,p} e^{i\nu\omega}$$

и определим последовательность сплайнов $s_n(x)$, положив

$$s_n(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{\nu,n,p} N_{m+1}(x-\nu),$$

или, в образах Фурье,

$$\widehat{s_n}(\omega) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{\nu,n,p} e^{i\nu\omega} \widehat{N_{m+1}}(\omega) = m_{n,p}(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega).$$

Тогда

$$\|\widehat{s_n}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = \int\limits_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\omega_0) \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p d\omega$$

и

$$\left\|\widehat{s_n^{(k)}}\right\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = \int\limits_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\omega_0) \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\omega+2\pi l\,\right|^{kp} \left|\,\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p d\omega.$$

При $n\to\infty$ имеем

$$\|\widehat{s_n}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} \to \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega_0+2\pi l)\right|^p$$

и

$$\left\|\widehat{s_n^{(k)}}\right\|^p_{L_p(\mathbb{R})} \to \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\omega_0+2\pi l\,\right|^{kp} \left|\,\widehat{N_{m+1}}(\omega_0+2\pi l)\right|^p.$$

Отсюда следует точность константы в (21).

Теорема 2 доказана.

3. Замечания. Учитывая (13), функцию $A_{p;m,k}(\omega)$ для $\omega\neq 2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, можно представить в виде

$$A_{p;m,k}(\omega) = \frac{\sum_{l\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{|\omega+2\pi l|^{pm-pk+p}}}{\sum_{l\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{|\omega+2\pi l|^{pm+p}}}. \tag{22}$$

Отметим, что $A_{2;m,k}(\omega) = A_{m,k}(\omega)$. Из (17) и (22) следует, что если числа p, m, k таковы, что показатели степени в числителе и знаменателе (22) можно представить соответственно в виде

$$p(m-k+1) = 2(n-r+1),$$

$$p(m+1) = 2(n+1),$$

где n, $r\in\mathbb{N}$, $r\leqslant n$, то

$$\max_{\omega} A_{p;m,k}(\omega) = A_{p;m,k}(\pi) = \frac{\pi^{2r} K_{2(n-r)+1}}{K_{2n+1}}.$$

В частности, если $p = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, то при любых m, k, $k \leq m$

$$n = \nu m + \nu - 1, \quad r = \nu k$$

и

$$\max_{\omega} A_{p;m,k}(\omega) = A_{p;m,k}(\pi) = \frac{\pi^{pk} K_{p(m-k+1)-1}}{K_{p(m+1)-1}}. \tag{23}$$

Если $p = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, то соотношение (23) имеет место, если m нечетное, а k четное.

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
2. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
3. *Субботин Ю. Н.* О кусочно-полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 1. – С. 24 – 29.
4. *Бабенко В. Ф., Пичугов А. С.* Неравенства типа Бернштейна для полиномиальных сплайнов в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 420 – 422.
5. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г.* О наилучшем приближении сплайнами классов функций на прямой // Труды Мат. ин-та РАН. – 1992. – **194**. – С. 48 – 159.
7. *Бабенко В. Ф., Спектор С. А.* Неравенства типа Бернштейна для сплайнов в пространстве $L_2(R)$ // Вiсн. Днiпропетр. ун-ту. – 2008. – **16**, № 6/1. – С. 21 – 27.
8. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
9. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев, 2010. – 372 с.
11. *Стрелков Н. А.* Проекционно-сеточные поперечники и решетчатые укладки // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 10. – С. 1513 – 1533.
12. *Стрелков Н. А.* Универсально оптимальные всплески // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 1. – С. 147 – 160.
13. *Чуи К.* Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
14. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: АФЦ, 1999. – 550 с.

Получено 04.02.11