УДК 517.9

Т. М. Бокало, О. М. Бугрій (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ПОДВІЙНО НЕЛІНІЙНІ ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

We investigate a mixed problem for a class of parabolic-type equations with double nonlinearity and minor terms that do not degenerate and whose indexes of nonlinearity are functions of spatial variables. These problems are considered in the generalized Lebesgue and Sobolev spaces. We obtain conditions for the existence of the generalized solution of this problem by using the Galerkin method.

Рассмотрена смешанная задача для одного класса параболических уравнений с двойной нелинейностью и младшими членами, которые не вырождаются и показатели нелинейности которых являются функциями пространственных переменных, в обобщенных пространствах Лебега и Соболева. С помощью метода Галеркина получены условия существования слабого решения.

Вступ. У цій статті досліджено мішану задачу для одного класу так званих подвійно нелінійних параболічних рівнянь, які мають вигляд

$$(\mathcal{P}u)_t + Au = f,$$

де $\mathcal{P}$ — нелінійна функція, A — нелінійний диференціальний оператор, f — деяка функція. При певних обмеженнях на коефіцієнти, вільний член рівняння та показники нелінійності операторів $\mathcal{P}$ та A за допомогою методу Фаедо – Гальоркіна доведено існування розв'язку цієї задачі.

Стаття складається зі вступу, трьох пунктів та висновків. У першому пункті наведено основні позначення, поняття, сформульовано досліджувану задачу і основний результат. Другий пункт містить потрібні далі твердження з функціонального аналізу. Третій пункт присвячено доведенню основного результату.

1. Формулювання задачі та основного результату. Нехай $T > 0$ — деяке число, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times \times (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t)\colon x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$,

$$L^\infty_+(\Omega) = \Big\{ v \in L^\infty(\Omega)\colon \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} v(x) > 1 \Big\}.$$

Для кожної функції $s \in L^\infty_+(\Omega)$ через s_0 та s^0 позначатимемо числа $s_0 \equiv \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} s(x)$ та $s^0 \equiv \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega} s(x)$, а через s' — таку функцію, що $\dfrac{1}{s(x)} + \dfrac{1}{s'(x)} = 1$ для $x \in \Omega$.

Нехай $p > 1$ — деяке число, $r, q \in L^\infty_+(\Omega)$, $L^{q(x)}(\Omega)$ — узагальнений простір Лебега (див. п. 2), $V \overset{\text{df}}{=} W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$,

$$U(Q_{0,T}) \overset{\text{df}}{=} \left\{ u : (0,T) \to V \;\middle|\; \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p + |u|^p + |u|^2 + |u|^{q(x)} \Big] dxdt < +\infty \right\},$$

$$\mathcal{U} \overset{\text{df}}{=} U(Q_{0,T}) \cap L^{r(x)}(Q_{0,T}).$$

Для спрощення позначатимемо

$$(z,v)_\Omega = \int\limits_\Omega z(x)v(x)\,dx, \qquad [u,w]_Q = \int\limits_{Q_{0,T}} u(x,t)w(x,t)\,dxdt.$$

Вивчатимемо мішану задачу

$$(\mathcal{P}u)_t - \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} + g(x)|u|^{q(x)-2}u = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

де

$$\mathcal{P}u = \mathcal{R}u + u, \qquad \mathcal{R}u = \frac{1}{r(x)-1}|u|^{r(x)-2}u,$$

а функції $a_1,\ldots,a_n,g,f$ задовольняють умови:

A) $a_i \in L^\infty(\Omega)$, $i=\overline{1,n}$, $a_i(x) \geq a_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$;

G) $g \in L^\infty(\Omega)$, $g(x) \geq g_0 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$;

F) $f,\ f_t \in L^{p'}(Q_{0,T})$.

Визначимо оператор $A : V \to V^*$ так:

$$\langle Au, v\rangle_V = \sum_{i=1}^{n}(a_i|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}, v_{x_i})_\Omega + (g|u|^{q(x)-2}u, v)_\Omega, \quad u,v \in V.$$

Можна вважати, що оператор A діє також з $U(Q_{0,T})$ в $[U(Q_{0,T})]^*$ за правилом

$$\langle Az, y\rangle_Q \equiv \langle Az, y\rangle_{U(Q_{0,T})} = \int_0^T \langle Az(t), y(t)\rangle_V dt, \quad z,y \in U(Q_{0,T}).$$

Відомо, що A є обмеженим монотонним семінеперервним оператором.

Означення. *Функція $u \in \mathcal{U} \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ називається узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3), *якщо $(\mathcal{P}u)_t \in L^2(Q_{0,T})$, u задовольняє умову* (3) *і для кожного $\omega \in \mathcal{U}$ виконується інтегральна тотожність*

$$[(\mathcal{P}u)_t, \omega]_Q + \langle Au, \omega\rangle_Q = [f, \omega]_Q. \tag{4}$$

Теорема. *Якщо виконуються умови* **A**, **G**, **F**, $r, q \in L^\infty_+(\Omega)$, $p > n$ *та* $r_0 \geq 2$, *то існує узагальнений розв'язок u задачі* (1)–(3). *Крім того,* $u \in L^\infty(0,T; L^{r(x)}(\Omega) \cap \cap V)$, $u \in L^\infty(Q_{0,T})$, $\mathcal{R}u \in L^\infty(Q_{0,T})$, $u_t, (\mathcal{R}u)_t \in L^2(Q_{0,T})$.

Питання про єдиність узагальненого розв'язку досліджуваної задачі тут не вивчається.

Мішані задачі для подвійно нелінійних параболічних рівнянь, модельним прикладом яких є рівняння

$$(|u|^{r-2}u)_t - a(|u_x|^{p-2}u_x)_x + g|u|^{q-2}u = f \tag{5}$$

зі сталими r, p, q, вивчались у статтях [1–5] (див. також бібліографію в них). У цих працях доведено існування, єдиність та розглянуто деякі якісні властивості розв'язків вказаних задач. З розвитком теорії узагальнених просторів Лебега і Соболєва (див. [6–9]) нелінійні диференціальні рівняння та варіаційні нерівності почали вивчати в таких просторах. Так, мішані задачі для параболічних рівнянь та варіаційних нерівностей типу (5) з $r=2$, $p=p(x)>1$, $q=q(x)$ розглянуто у роботах [8, 10 – 12], а для $r=2$, $p=p(x,t)>1$, $g=0$ — у [13].

Подвійно нелінійним параболічним рівнянням з виродженням, які у модельному випадку мають вигляд

$$\big(|u|^{r-2}u\big)_t - a\big(|u|^{\gamma-2}u\big)_{xx} + g|u|^{q(x)-2}u = f, \qquad (6)$$

де $r,\gamma \geq 2$ — сталі, $q=q(x)>1$ — функція, присвячено статтю [14]. При додаткових умовах у [14], зокрема, показано існування розв'язку задачі типу (2), (3), (6).

2. Допоміжні твердження. Введемо деякі допоміжні позначення та нагадаємо необхідні у подальшому твердження. Норму банахового простору B позначимо через $\|\cdot;B\|$, а спряжений до B простір — через B^*. Скалярний добуток між B^* та B позначатимемо через $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$. Для спрощення викладок замість, наприклад, $u(\cdot,t)$ писатимемо $u(t)$, а замість $u(x,t)$ — u.

Узагальнені простори Лебега було введено в [6]. Нагадаємо їх означення та деякі властивості. Нехай $q\in L^\infty_+(\Omega)$. Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_q(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)}dx$, де v — деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v:\Omega\to\mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v,\Omega) < +\infty$. Відомо, що функціонал ρ_q є слабко напівнеперервним знизу на $L^{q(x)}(\Omega)$ (див. [6, с. 208]). Крім того, $L^{q(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою

$$\|v;L^{q(x)}(\Omega)\| = \inf\{\lambda>0\colon \rho_q(v/\lambda,\Omega)\leq 1\}.$$

Зазначимо, що якщо $r(x)\geq q(x)$, то $L^{r(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$. Спряженим до $L^{q(x)}(\Omega)$ є простір $L^{q'(x)}(\Omega)$.

***Зауваження* 1.** Нехай $q\in L^\infty_+(\Omega)$,

$$S_q(s) = \begin{cases} s^{q_0}, & s\in[0,1],\\ s^{q^0}, & s>1, \end{cases} \qquad S_{1/q}(s) = \begin{cases} s^{1/q^0}, & s\in[0,1],\\ s^{1/q_0}, & s>1. \end{cases}$$

В лемі 1 [12, с. 168] стверджується, що для довільної функції $v\colon\Omega\to\mathbb{R}$ виконуються нерівності:

1) $\|v;L^{q(x)}(\Omega)\| \leq S_{1/q}(\rho_q(v,\Omega))$ при $\rho_q(v,\Omega)<+\infty$;

2) $\rho_q(v,\Omega)\leq S_q(\|v;L^{q(x)}(\Omega)\|)$ при $\|v;L^{q(x)}(\Omega)\|<+\infty$.

Крім того,

$$S_q(S_{1/q}(s)) = S_{1/q}(S_q(s)) = \begin{cases} s^{q_0/q^0}, & s\in[0,1],\\ s^{q^0/q_0}, & s>1. \end{cases}$$

Аналогічно до $L^{q(x)}(\Omega)$ визначимо простір $L^{q(x)}(Q_{0,T})$, ввівши замість $\rho_q(\cdot,\Omega)$ функціонал $\rho_q(\cdot,Q_{0,T})$.

Далі нам будуть потрібні деякі допоміжні твердження.

Твердження 1 (формула інтегрування частинами, теорема 1 [9, с. 23])**.** *Припустимо, що* $r\in L^\infty_+(\Omega)$, $r_0\geq 2$, $w\in L^{r(x)}(Q_{0,T})$ *та* $\dfrac{\partial}{\partial t}(|w|^{r-2}w)\in L^{r'(x)}(Q_{0,T})$. *Тоді для будь-яких* $s,\tau\in[0,T]$, $s<\tau$, *правильною є формула інтегрування частинами*

$$\int\limits_s^\tau dt \int\limits_\Omega w\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{r(x)-1}|w|^{r(x)-2}w\Big)dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|w(\tau)|^{r(x)}dx - \int\limits_\Omega \frac{1}{r(x)}|w(s)|^{r(x)}dx. \tag{7}$$

Твердження 2 (похідна композиції функцій). *Нехай* $r \in L_+^\infty(\Omega)$.

1 (Лема 4 [9, с. 19]). *Якщо* $r_0 \geq 3$, *то взята в сенсі розподілів на* $Q_{0,T}$ *формула*

$$(\mathcal{R}u)_t = |u|^{r(x)-2}u_t \tag{8}$$

виконується для всіх $u \in \mathcal{V}_1$, *де* $\mathcal{V}_1 = \big\{v \in L^\infty(0,T; L^{2(r(x)-2)}(\Omega)) \colon v_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))\big\}$.

2 ([15, с. 67]). *Якщо* $r(x) \equiv \mathrm{const}$, $2 \leq r \leq 3$, *то формула* (8) *виконується для всіх* $u \in \mathcal{V}_2$, *де* $\mathcal{V}_2 = \big\{v \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \colon v_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))\big\}$.

3. *Якщо* $r_0 \geq 2$, $u \in C^1(Q_{0,T})$, *то майже для всіх* $x \in \Omega$ *та для всіх* $t \in (0,T)$ *формула* (8) *виконується поточково, як формула похідної композиції диференційовних функцій однієї змінної* t.

Твердження 3 (узагальнена нерівність Гельдера [7]). *Нехай* $p \in L_+^\infty(\Omega)$. *Якщо* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, *то* $uv \in L^1(\Omega)$ *і*

$$(u,v)_\Omega \leq K_1\|u; L^{p(x)}(\Omega)\|\|v; L^{p'(x)}(\Omega)\|,$$

де K_1 — *стала, що не залежить від* u *та* v.

Твердження 4 (узагальнена нерівність Гельдера для трьох функцій, лема 1 [9, с. 14]). *Нехай* $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$ — *такі функції, що* $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} \equiv \mathrm{const} < 1$ *для* $x \in \Omega$, *число* $k > 1$ *задано рівністю*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{k} = 1, \quad x \in \Omega.$$

Якщо $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, $w \in L^k(\Omega)$, *то* $uvw \in L^1(\Omega)$ *і*

$$\int\limits_\Omega u(x)v(x)w(x)\,dx \leq$$

$$\leq K_2 S_{1/p}\left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,dx\right) S_{1/q}\left(\int\limits_\Omega |v(x)|^{q(x)}\,dx\right)\left(\int\limits_\Omega |w(x)|^k\,dx\right)^{1/k},$$

де $K_2 > 0$ — *стала, яка не залежить від* u, v, w.

Твердження 5 (узагальнена нерівність Юнга). *Нехай* $p \in L_+^\infty(\Omega)$. *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує таке число* $Y_p(\varepsilon) > 0$, *що для всіх* $a, b > 0$ *та* $x \in \Omega$ *виконується оцінка*

$$ab \leq \varepsilon\, a^{p(x)} + Y_p(\varepsilon)\, b^{p'(x)}. \tag{9}$$

Крім того, $Y_p(\varepsilon)$ *не залежить від* x *та* $Y_p(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, $Y_p(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Твердження 6 (нерівність Фрідріхса). *Нехай Ω — обмежена область, $1 \leq p <$ $< +\infty$. Тоді існує така стала $M_\Omega > 0$ (яка залежить від p та Ω), що виконується нерівність*

$$\int_\Omega |v|^p dx \leq M_\Omega \int_\Omega \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^p dx \tag{10}$$

для всіх $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Твердження 7. *Якщо $f^m \to f$ в $[U(Q_{0,T})]^*$, $\omega^m \to \omega$ слабко в $U(Q_{0,T})$, то $\langle f^m, \omega^m \rangle_{U(Q_{0,T})} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, \omega \rangle_{U(Q_{0,T})}$.*

Для двох нормованих просторів B_1 та B_2 введемо позначення. Запис $B_1 \subset B_2$ традиційно означатиме, що B_1 є підмножиною B_2, а запис $B_1 \circlearrowleft B_2$ означає те, що B_1 неперервно вкладається в B_2, тобто

1) $B_1 \subset B_2$;

2) $\exists \gamma > 0\ \forall f \in B_1\colon \|f\|_{B_2} \leq \gamma \|f\|_{B_1}$.

Запис $B_1 \overset{K}{\subset} B_2$ означає компактне вкладення B_1 в B_2, тобто

1) $B_1 \subset B_2$;

2) кожна обмежена послідовність в B_1 має підпослідовність, сильно збіжну в B_2.

Твердження 8. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, що задовольняє умову конуса, $C_B^k(\Omega)$ — множина $u \in C^k(\Omega)$ таких, що $D^\alpha u$ є обмеженою при $|\alpha| \leq k$. Якщо $(m-k)p > n$, то $W^{m,p}(\Omega) \overset{K}{\subset} C_B^k(\Omega)$.*

Твердження 9 (теорема Обена [16], див. також [2, с. 393; 17, с. 70]). *Якщо $T >$ > 0, $s, h \in (1, +\infty)$ — деякі числа, $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ — банахові простори, $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$, то*

$$\left\{u \in L^s(0,T;\mathcal{W})\colon u_t \in L^h(0,T;\mathcal{B})\right\} \overset{K}{\subset} L^s(0,T;\mathcal{L}) \cap C([0,T];\mathcal{B}),$$

тобто якщо $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — обмежена послідовність в $L^s(0,T;\mathcal{W})$ та $\{u_t^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ є обмеженою в $L^h(0,T;\mathcal{B})$, то існує підпослідовність $\{u^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}$ така, що $u^{m_j} \to u$ сильно в $L^s(0,T;\mathcal{L})$ та в $C([0,T];\mathcal{B})$.

Доведемо кілька важливих допоміжних тверджень.

Лема 1. *Нехай $q \in L_+^\infty(\Omega)$ і послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^{q(x)}(\Omega)$ така, що*

$$u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L^{q(x)}(\Omega)$$

та

$$u^m(x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v(x) \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega.$$

Тоді $u = v$.

Доведення проведемо в два етапи:

1. Оскільки послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ слабко збіжна в $L^{q(x)}(\Omega)$, то за теоремою 1 з [18, с. 194] маємо

$$\exists M > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}\colon \|u^m; L^{q(x)}(\Omega)\| \leq C_1.$$

Тому згідно з зауваженням 1 отримуємо

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}\colon \int\limits_{\Omega} |u^m(x)|^{q(x)} dx \le C_2, \tag{11}$$

де $C_2 = S_{1/p}(C_1)$.

За лемою 1.3 з [19, с. 34] функція v є вимірною. Далі на підставі (11), застосовуючи лему Фату [19, с. 39], одержуємо

$$\int\limits_{\Omega} |v(x)|^{q(x)} dx = \int\limits_{\Omega} \lim_{m\to\infty} |u^m(x)|^{q(x)} dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \varliminf_{m\to\infty} |u^m(x)|^{q(x)} dx \le \varliminf_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega} |u^m(x)|^{q(x)} dx \le C_2,$$

а тому $v \in L^{q(x)}(\Omega)$.

2. Змінюючи, якщо потрібно, на множині міри нуль функції v, u^m, можна вважати, що послідовність $\{u^m(x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ є збіжною для кожної змінної $x \in \Omega$. Нехай

$$E_k = \Big\{x \in \Omega\colon \sup_{m\ge k} |u^m(x)| \ge k\Big\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що послідовності E_k, $k \in \mathbb{N}$, є вимірними. Далі матимемо

$$\bigcap_k E_k = \Big\{x \in \Omega\colon \lim_{m\to\infty} |u^m(x)| = +\infty\Big\} = \varnothing,$$

бо u^m збігається скрізь в Ω. Тому зрозуміло, що $\operatorname{mes}\Big(\bigcap\limits_k E_k\Big) = 0$ і звідси, оскільки $E_{k+1} \subset E_k$, $k \in \mathbb{N}$, випливає

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}(E_k) = 0. \tag{12}$$

Нехай $w \in L^{q'(x)}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega \backslash E_k$

$$|u^m(x) w(x)| \le k |w(x)|, \quad m \ge k. \tag{13}$$

Використовуючи збіжність майже скрізь, нерівності (13) та теорему Лебега, маємо

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega\backslash E_k} u^m(x) w(x) dx = \int\limits_{\Omega\backslash E_k} v(x) w(x) dx. \tag{14}$$

Якщо χ_{E_k} — індикатор множини E_k, то $\chi_{E_k} w \in L^{q'(x)}(\Omega)$. Тому зі слабкої збіжності отримуємо

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega\backslash E_k} u^m(x) w(x) dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega} u^m(x) \chi_{E_k}(x) w(x) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} u(x) \chi_{E_k}(x) w(x) dx = \int\limits_{\Omega\backslash E_k} u(x) w(x) dx. \tag{15}$$

Поєднуючи (14) та (15), згідно з лемою дю Буа – Реймонда одержуємо, що $u(x) = v(x)$ для майже всіх $x \in \Omega \backslash E_k$. Оскільки виконується (12), то остаточно маємо $u(x) = v(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — *деяка функційна послідовність, визначена на* Ω. *Якщо* $z^m(x)=0$ *майже для всіх* $x\in\Omega$ *і для всіх* $m\in\mathbb{N}$ *та* $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\int_\Omega z^m(x)\,dx=0$, *то*:

1) *не обов'язково* $z^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *майже скрізь в* Ω;

2) *існує підпослідовність* $\{z^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *послідовності* $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *така, що* $z^{m_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *майже скрізь в* Ω.

Доведення. Згідно з [20, с. 152] отримаємо п. 1 та те, що z^m збігається до нуля за мірою в Ω. Тому з теореми 4 [20, с. 96] випливає п. 2.

Зрозуміло, що леми 1, 2 виконуються і для функцій, визначених на $Q_{0,T}$.

Лема 3 (див. для порівняння лему 2.4 [5, с. 87])**.** *Якщо* $p\in(1,+\infty)$, *то для будь-якого* $M_1>0$ *існує* $h_0>0$ *таке, що для всіх* η $(|\eta|\le M_1)$ *та для всіх* ξ $(|\xi|\ge 2+M_1)$:

$$(|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta)(\xi-\eta)\ge h_0|\xi-\eta|. \tag{16}$$

Доведення. Нехай $\gamma(s)=|s|^{p-2}s$, $s\in\mathbb{R}$, та $H(\xi,\eta)=\big(|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta\big)(\xi-\eta)$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}$. Розглянемо довільні $\xi,\eta\in\mathbb{R}$ з умов леми. Зрозуміло, що $\xi=\eta+\rho\alpha^0$, де $|\alpha^0|=1$, $\rho=|\xi-\eta|\ge 2$.

Введемо позначення $h(\rho)\overset{\text{df}}{=}H(\xi,\eta)=(\gamma(\eta+\rho\alpha^0)-\gamma(\eta))\rho\alpha^0=\sigma_1+\sigma_2$, де

$$\sigma_1=(\gamma(\eta+\rho\alpha^0)-\gamma(\eta+\alpha^0))\rho\alpha^0,$$
$$\sigma_2=(\gamma(\eta+\alpha^0)-\gamma(\eta))\rho\alpha^0.$$

Нехай $\xi^0=\eta+\alpha^0$. Тоді $\xi-\xi^0=(\rho-1)\alpha^0$ і тому $\rho\alpha^0=\dfrac{\rho}{\rho-1}\Big(\xi-\xi^0\Big)$. Оскільки $\rho\ge 2$, то $\rho>0$, $\rho-1>0$, $\xi\ne\xi^0$ і тому $\sigma_1>0$. Крім того, $\sigma_2=\rho\,h(1)$. Тому $h(\rho)>\rho\,h(1)$ для $\rho\ge 2$. Перепишемо цю нерівність для функції H:

$$H(\xi,\eta)\ge|\xi-\eta|H(\eta+\alpha^0,\eta), \tag{17}$$

де

$$|\alpha^0|=1,\qquad \xi=\eta+\rho\alpha^0,\quad \rho\ge 2.$$

Нехай $K=\{(\eta,\alpha^0)\colon |\eta|\le M_1,\ |\alpha^0|=1\}$. Оскільки H — неперервна функція в $\mathbb{R}^2$, а K — компакт в $\mathbb{R}^2$, то H у правій частині (17) досягає свого мінімуму на K, тобто існують h_0, $(\widetilde{\eta},\widetilde{\alpha^0})\in K$ такі, що

$$h_0=H\Big(\widetilde{\eta}+\widetilde{\alpha^0},\widetilde{\eta}\Big)=\min_K H(\eta+\alpha^0,\eta).$$

Оскільки $\widetilde{\alpha^0}\ne 0$, то $H(\widetilde{\eta}+\widetilde{\alpha^0},\widetilde{\eta})>0$, і тому $h_0>0$. Оцінивши праву частину (17) через $h_0|\xi-\eta|$, отримаємо (16).

Лему 3 доведено.

3. Доведення теореми. Для зручності доведення теореми розіб'ємо на кілька частин.

1. Використаємо метод Фаедо – Гальоркіна. Нехай $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^m, \ldots$ — повна зліченна лінійно незалежна система функцій в $C_0^1(\overline{\Omega})$. Розв'язок задачі (1) – (3) починаємо шукати у вигляді

$$u^m(x,t) = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu^m(t)\omega^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T},$$

де функції c_μ^m, $\mu = \overline{1,m}$, є абсолютно неперервними розв'язками такої задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\big((\mathcal{P}u^m(t))_t, \omega^j\big)_\Omega + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i |u_{x_i}^m(t)|^{p-2} u_{x_i}^m(t), \omega_{x_i}^j\right)_\Omega +$$
$$+ (g|u^m(t)|^{q(x)-2}u^m(t), \omega^j)_\Omega = (f(t), \omega^j)_\Omega, \quad t \in (0,T), \tag{18}$$
$$c_j^m(0) = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Зауважимо, що

$$u^m|_{t=0} = 0. \tag{19}$$

Переконаємося, що система звичайних диференціальних рівнянь (18) розв'язна спочатку локально. Зведемо систему (18) до нормального вигляду. Використовуючи (8), перший член системи (18) записуємо у вигляді

$$\left((|u^m|^{r(x)-2}+1)\sum_{\mu=1}^{m}(c_\mu^m)'\omega^\mu,\, \omega^j\right)_\Omega =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{m}\left(\omega^\mu\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1},\, \omega^j\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1}\right)_\Omega (c_\mu^m)'.$$

Звідси безпосередньо видно, що з коефіцієнтів при $(c_\mu^m)'$ формується матриця Грамма системи функцій

$$\left\{\omega^\mu\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1}\right\}_{\mu=1}^{m}, \tag{20}$$

яка разом з ω^μ, $\mu = \overline{1,m}$, є лінійно незалежною. Дійсно, покажемо лінійну незалежність системи (20). Запишемо лінійну комбінацію цих функцій. Нехай α_i, $i = \overline{1,m}$, — деякі числа такі, що

$$\alpha_1\omega^1\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1} + \alpha_2\omega^2\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_m\omega^m\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1} \equiv 0. \tag{21}$$

Звідси

$$\Big(\alpha_1\omega^1 + \alpha_2\omega^2 + \ldots + \alpha_m\omega^m\Big)\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1} = 0. \tag{22}$$

Оскільки $|u^m|^{r(x)-2}+1 \geq 1 > 0$ (достатньо того, щоб $\neq 0$), то з тотожності (22) отримуємо

$$\alpha_1\omega^1+\alpha_2\omega^2+\ldots+\alpha_m\omega^m \equiv 0. \tag{23}$$

За означенням система функцій $\{\omega^\mu\}_{\mu=1}^m$ лінійно незалежна. Тому тотожність (23) можлива лише при

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0. \tag{24}$$

Отже, тотожність (21) виконується лише при виконанні (24), що й означає лінійну незалежність системи функцій (20).

З наведених міркувань випливає, що систему (18) можна звести до нормального вигляду за допомогою домноження на невироджену матрицю

$$\left[\left(\left(\omega^\mu\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1},\ \omega^j\sqrt{|u^m|^{r(x)-2}+1}\right)_\Omega\right)_{\mu,j=\overline{1,m}}\right]^{-1}.$$

Задача Коші (18) розв'язна для кожного $m=1,2,\ldots$ на деякому відрізку $[0,T_m]$ згідно з теоремою Пеано. З отриманих нижче оцінок випливатиме, що розв'язок системи (18) визначений на всьому $[0,T]$. Крім того, $c_1^m,\ldots,c_m^m \in C^1([0,T])$, а тому

$$u^m \in C^1(\overline{Q}_{0,T}). \tag{25}$$

2. При фіксованому m кожне рівняння системи (18) за номером $j=1,\ldots,m$ домножимо на $c_j^m(t)$ і підсумуємо всі рівняння цієї системи. Результат зінтегруємо по відрізку $[0,\tau]$, $\tau \leq T_m$. Отримаємо тотожність

$$J_1+J_2+J_3=F, \tag{26}$$

де

$$J_1=\int_0^\tau(\mathcal{P}(u^m))_t,u^m)_\Omega dt, \qquad J_2=\sum_{i=1}^n\int_0^\tau(a_i|u^m_{x_i}|^{p-2}u^m_{x_i},u^m_{x_i})_\Omega dt,$$

$$J_3=\int_0^\tau(g|u^m|^{q(x)-2}u^m,u^m)_\Omega dt, \qquad F=\int_0^\tau(f,u^m)_\Omega dt.$$

Оцінимо кожну з функцій (26). З (7) та (25) одержимо

$$J_1=\int_{\Omega_\tau}\frac{1}{r(x)}|u^m|^{r(x)}dx-\int_{\Omega_0}\frac{1}{r(x)}|u^m|^{r(x)}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u^m|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}|u^m|^2dx.$$

Враховуючи (19), отримуємо

$$J_1=\int_{\Omega_\tau}\frac{1}{r(x)}|u^m|^{r(x)}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u^m|^2dx.$$

Для оцінки J_2+J_3 та F використаємо умови **A**, **G**, **F** та нерівності Юнга і Фрідріхса (див. (9) та (10)):

$$J_2 + J_3 = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i |u^m_{x_i}|^p + g|u^m|^{q(x)} \right] dxdt \geq$$

$$\geq a_0 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |u^m_{x_i}|^p dxdt + g_0 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^{q(x)} dxdt,$$

$$F = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f u^m dxdt \leq Y_p(\varepsilon) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^{p'} dxdt + \varepsilon \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^p dxdt \leq$$

$$\leq Y_p(\varepsilon) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^{p'} dxdt + \varepsilon M_\Omega \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |u^m_{x_i}|^p dxdt.$$

Отож, з (26) будемо мати

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \frac{1}{r(x)} |u^m|^{r(x)} dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^2 dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[(a_0 - \varepsilon M_\Omega) \sum_{i=1}^{n} |u^m_{x_i}|^p + g_0 |u^m|^{q(x)} \right] dxdt \leq Y_p(\varepsilon) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^{p'} dxdt.$$

Звідси, вибравши $\varepsilon > 0$ досить малим, можна добитися виконання нерівності

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^{r(x)} dx + \int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u^m_{x_i}|^p + |u^m|^{q(x)} \right] dxdt \leq$$

$$\leq C_3 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^{p'} dxdt, \tag{27}$$

де стала $C_3 > 0$ не залежить від m, τ. Тоді

$$\sup_{0 \leq \tau \leq T} \left\| u^m(\tau); L^2(\Omega) \right\| \leq C_4,$$

де стала $C_4 > 0$ не залежить від m. Тому функції $c^m_1, \ldots, c^m_m$, а отже і u^m, можна продовжити на весь проміжок $[0, T]$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

З (27) випливають оцінки

$$\|u^m; L^\infty(0, T; L^{r(x)}(\Omega))\| \leq C_5, \tag{28}$$

$$\|u^m; L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\| \leq C_5, \tag{29}$$

$$\|u^m; L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega))\| \leq C_5, \tag{30}$$

$$\rho_q(u^m; Q_{0,T}) \leq C_5, \tag{31}$$

де стала $C_5 > 0$ не залежить від m. Використавши зауваження 1, з оцінки (31) матимемо

$$\left\| u^m; L^{q(x)}(Q_{0,T}) \right\| \leq C_4. \tag{32}$$

3. З оцінок (28), (29) та рефлексивності просторів $L^{r(x)}(Q_{0,T})$, $L^2(Q_{0,T})$, $L^{r'(x)}(Q_{0,T})$ випливає існування такої підпослідовності $\{u^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, що

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^{r(x)}(\Omega)),$$

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_1 \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_2 \quad \text{слабко в} \quad L^{r(x)}(Q_{0,T}),$$

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_3 \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{0,T}),$$

$$|u^{m_j}|^{r(x)-2}u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\chi}_0 \quad \text{слабко в} \quad L^{r'(x)}(Q_{0,T}).$$

З рефлексивності просторів $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, $L^{q(x)}(Q_{0,T})$ та оцінок (30), (32) випливає, що

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_4 \quad \text{слабко в} \quad L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_5 \quad \text{слабко в} \quad L^{q(x)}(Q_{0,T}).$$

З оцінок (30), (32) та рефлексивності просторів $L^{p'}(Q_{0,T})$, $L^{q'(x)}(Q_{0,T})$ одержимо

$$|u^{m_j}_{x_i}|^{p-2}u^{m_j}_{x_i} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i, \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{слабко в} \quad L^{p'}(Q_{0,T}),$$

$$|u^{m_j}|^{q(x)-2}u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_0 \quad \text{слабко в } L^{q'(x)}(Q_{0,T}).$$

Отримані збіжності означають збіжність $\{u^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ до u, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 у просторі розподілів $D^*(0,T;V^*+L^{r'(x)}(\Omega))$. З єдиності границі в цьому просторі маємо $z_1=z_2=z_3=z_4=z_5=u$. Отже,

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^{r(x)}(\Omega)) \quad \text{та} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L^{r(x)}(Q_{0,T}),$$

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),\ L^2(Q_{0,T}) \quad \text{та}$$

$$L^{q(x)}(Q_{0,T}) \quad (\text{тобто в } U(Q_{0,T})).$$

4. Домножимо j-те рівняння (18) на $\dfrac{d}{dt}c_j^m(t)$, підсумуємо по j від 1 до m і зінтегруємо по t від 0 до $\tau\in(0,T]$. Отримаємо тотожність

$$\widetilde{J}_1+\widetilde{J}_2+\widetilde{J}_3=\widetilde{F}, \tag{33}$$

де

$$\widetilde{J}_1=\int_0^\tau((\mathcal{P}u^m)_t,u_t^m)_\Omega\,dt, \qquad \widetilde{J}_2=\sum_{i=1}^n\int_0^\tau(a_i|u^m_{x_i}|^{p-2}u^m_{x_i},u^m_{x_it})_\Omega\,dt,$$

$$\widetilde{J}_3 = \int_0^\tau (g|u^m|^{q(x)-2}u^m, u_t^m)_\Omega \, dt, \qquad \widetilde{F} = \int_0^\tau (f, u_t^m)_\Omega \, dt.$$

Оцінимо кожну з функцій (33):

$$\widetilde{J}_1 = \int_{Q_{0,\tau}} \left(\frac{1}{r(x)-1} |u^m|^{r(x)-2} + 1 \right) |u_t^m|^2 dxdt \geq$$

$$\geq \frac{1}{r^0 - 1} \int_{Q_{0,\tau}} |u^m|^{r(x)-2} |u_t^m|^2 dxdt + \int_{Q_{0,\tau}} |u_t^m|^2 dxdt,$$

$$\widetilde{J}_2 = \int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}^m|^{p-2} u_{x_i}^m u_{x_i t}^m dxdt =$$

$$= \frac{1}{p} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}^m|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}^m|^p dx =$$

$$= \frac{1}{p} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}^m|^p dx \geq \frac{a_0}{p} \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^m|^p dx,$$

$$\widetilde{J}_3 = \int_{Q_{0,\tau}} g(x) |u^m|^{q(x)-2} u^m u_t^m dxdt =$$

$$= \int_{\Omega_\tau} \frac{1}{q(x)} g(x) |u^m|^{q(x)} dx - \int_{\Omega_0} \frac{1}{q(x)} g(x) |u^m|^{q(x)} dx =$$

$$= \int_{\Omega_\tau} \frac{1}{q(x)} g(x) |u^m|^{q(x)} dx \geq \frac{g_0}{q^0} \int_{\Omega_\tau} |u^m|^{q(x)} dx,$$

$$\widetilde{F} = \int_{Q_{0,\tau}} f u_t^m dxdt = \int_{\Omega_\tau} f u^m dx - \int_{Q_{0,\tau}} f_t u^m dxdt.$$

З того, що $f, f_t \in L^{p'}(Q_{0,T})$, випливає, що $f \in C([0,T]; L^{p'}(\Omega))$. Тому з нерівностей Юнга, Фрідріхса та оцінки (27) випливає

$$\int_{\Omega_\tau} f u^m dx \leq Y_p(\varepsilon) \int_{\Omega_\tau} |f|^{p'} dx + \varepsilon M_\Omega \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^m|^p dx,$$

$$- \int_{Q_{0,\tau}} f_t u^m dxdt \leq \int_{Q_{0,\tau}} (Y_p(\varepsilon_1) |f_t|^{p'} + \varepsilon_1 |u^m|^p) dxdt \leq$$

$$\leq Y_p(\varepsilon_1) \int_{Q_{0,\tau}} |f_t|^{p'} dxdt + \varepsilon_1 M_\Omega \int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^m|^p dxdt \leq$$

$$\leq C_6 \int\limits_{Q_{0,\tau}} (|f|^{p'} + |f_t|^{p'}) dxdt.$$

З (33) та проведених оцінок одержимо

$$\frac{1}{r^0 - 1} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^{r(x)-2} |u_t^m|^2 dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u_t^m|^2 dxdt +$$

$$+ \left(\frac{a_0}{p} - \varepsilon M_\Omega \right) \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^m|^p dx + \frac{g_0}{q^0} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^{q(x)} dx \leq$$

$$\leq C_7(\varepsilon) \left(\int\limits_{\Omega_\tau} |f|^{p'} dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} (|f|^{p'} + |f_t|^{p'}) dxdt \right).$$

Вибравши $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{a_0}{pM_\Omega}\right)$ та скориставшись (8), отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^{r(x)-2} |u_t^m|^2 dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u_t^m|^2 dxdt + \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^m|^p dx + \int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^{q(x)} dx \leq$$

$$\leq C_8 \left(\int\limits_{\Omega_\tau} |f|^{p'} dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} (|f|^{p'} + |f_t|^{p'}) dxdt \right), \quad \tau \in (0, T]. \tag{34}$$

Використавши нерівність Фрідріхса, будемо мати

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^m|^p dx \leq M_\Omega \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^m|^p dx \leq$$

$$\leq C_9 \left(\int\limits_{\Omega_\tau} |f|^{p'} dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} (|f|^{p'} + |f_t|^{p'}) dxdt \right), \quad \tau \in (0, T]. \tag{35}$$

Аналізуючи (34), (35), можна отримати оцінки

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^m|^{r(x)-2} |u_t^m|^2 dxdt \leq C_{10}, \tag{36}$$

$$\|u_t^m; L^2(Q_{0,T})\| \leq C_{10}, \tag{37}$$

$$\|u^m; L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))\| \leq C_{10}, \tag{38}$$

$$\|u^m; L^\infty(0, T; L^{q(x)}(\Omega))\| \leq C_{10}, \tag{39}$$

де $C_{10} > 0$ не залежить від m. Тому, можливо при переході до нової підпослідовності $\{u^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ (залишимо таке ж позначення), матимемо

$$u_t^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_t \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{0,T}), \tag{40}$$

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{та} \quad L^\infty(0,T;L^{q(x)}(\Omega)). \tag{41}$$

З оцінки (38) та твердження 8 (нагадаємо, що $p > n$) одержимо

$$\|u^m; L^\infty(Q_{0,T})\| \le C_{11}, \tag{42}$$

де стала $C_{11} > 0$ не залежить від m. Візьмемо довільне $s \geq 2$. Тоді $W_0^{1,p}(\Omega) \overset{K}{\subset}$ $\overset{K}{\subset} L^s(\Omega) \circlearrowleft L^2(\Omega)$ і з (37), (38) та теореми Обена отримаємо

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad L^s(Q_{0,T}) \quad \text{та в} \quad C([0,T],L^2(\Omega)), \tag{43}$$

а тому

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{майже скрізь в} \quad Q_{0,T}. \tag{44}$$

Отже, використавши лему 1, одержимо $\chi_0 = |u|^{q(x)-2}u$, $\widetilde{\chi}_0 = |u|^{r(x)-2}u$. Звідси, зокрема, випливає, що

$$\mathcal{R}u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{R}u \quad \text{слабко в} \quad L^{r'(x)}(Q_{0,T}),$$

а з урахуванням (42)

$$\mathcal{R}u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{R}u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(Q_{0,T}).$$

5. Покажемо, що

$$(\mathcal{R}u^{m_j})_t \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (\mathcal{R}u)_t \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{0,T}). \tag{45}$$

Розглянемо множину функцій (див. твердження 2 та (25))

$$(\mathcal{R}u^m)_t = (|u^m|^{r(x)-2})^{1/2}(|u^m|^{r(x)-2})^{1/2}u_t^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Згідно з оцінками (36) і (42) ця множина рівномірно по m обмежена в $L^2(Q_{0,T})$, а тому, можливо при переході до нової підпослідовності, одержимо (45) .

6. Покажемо, що для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$u_{x_i}^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_{x_i} \quad \text{майже скрізь в} \quad Q_{0,T}. \tag{46}$$

Використаємо деяку модифікацію методу, запропонованого в [5]. Нехай маємо простір $\mathcal{L}_m = \Big\{\sum_{k=1}^m d_k(t)\omega^k(x)\colon d_1,\ldots,d_m \in C^1([0,T])\Big\}$. Тоді для кожного $w \in \mathcal{L}_m$ з системи (18) можна отримати рівність

$$\big[(\mathcal{P}u^m)_t, w\big]_Q + \langle Au^m, w\rangle_Q = [f,w]_Q. \tag{47}$$

Оскільки $u \in U(Q_{0,T})$, то існує послідовність елементів $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ таких, що $y^m \in$ $\in \mathcal{L}_m$ для кожного $m \in \mathbb{N}$ і $y^m \to u$ сильно в $U(Q_{0,T})$ при $m \to \infty$. Покладемо в (47) $w = u^m - y^m$ та $m = m_j$ і перепишемо цю рівність у вигляді

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4, \tag{48}$$

де

$$I_1 = [(\mathcal{P}u^{m_j})_t, u^{m_j} - y^{m_j}]_Q, \qquad I_2 = \langle Au^{m_j} - Au, u^{m_j} - y^{m_j}\rangle_Q,$$
$$I_3 = \langle Au, u^{m_j} - y^{m_j}\rangle_Q, \qquad I_4 = [f, u^{m_j} - y^{m_j}]_Q.$$

Зауважимо, що якщо $\alpha_j \to \alpha$ слабко в B^*, $\beta_j \to \beta$ сильно в B, де B — деякий банахів простір, то

$$\lim_{j\to\infty}\langle \alpha_j, \beta_j\rangle_B = \lim_{j\to\infty}(\langle \alpha_j, \beta\rangle_B + \langle \alpha_j, \beta_j - \beta\rangle_B) = \lim_{j\to\infty}\langle \alpha_j, \beta\rangle_B.$$

Використавши цю властивість, твердження 7 та (40), (45), (43), отримаємо

$$\varliminf_{j\to\infty} I_1 = \lim_{j\to\infty} I_1 = \lim_{j\to\infty}\left[(\mathcal{R}u^{m_j})_t + u_t^{m_j}, u^{m_j} - u\right]_Q \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Крім того,

$$\varlimsup_{j\to\infty} I_4 = \lim_{j\to\infty} I_4 = \lim_{j\to\infty}[f, u^{m_j} - u]_Q = 0,$$
$$\lim_{j\to\infty} I_3 = \lim_{j\to\infty}\langle Au, u^{m_j} - u\rangle_Q = 0.$$

Тоді, використавши нерівність з [21, с. 23], з (48) одержимо

$$0 = \varlimsup_{j\to\infty} I_4 = \varlimsup_{j\to\infty}(I_1 + I_2 + I_3) \geq$$
$$\geq \varliminf_{j\to\infty} I_1 + \varlimsup_{j\to\infty} I_2 + \lim_{j\to\infty} I_3 = \varlimsup_{j\to\infty} I_2 = \varlimsup_{j\to\infty}\int\limits_{Q_{0,T}} z_j(x,t)\,dxdt,$$

де

$$z_j = \sum_{i=1}^n a_i\Big(|u_{x_i}^{m_j}|^{p-2}u_{x_i}^{m_j} - |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\Big)(u_{x_i}^{m_j} - u_{x_i}) +$$
$$+ g\Big(|u^{m_j}|^{q(x)-2}u^{m_j} - |u|^{q(x)-2}u\Big)(u^{m_j} - u).$$

Зрозуміло, що $z_j(x,t) \geq 0$ в $Q_{0,T}$. Тому (можливо при переході до підпослідовності) з леми 2 отримаємо

$$\lim_{j\to\infty} z_j(x,t) = 0 \quad \text{майже для всіх} \quad (x,t) \in Q_{0,T}. \tag{49}$$

Далі виберемо точку $(x,t) \in Q_{0,T}$ так, щоб функції $u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$ були визначені та скінченні в цій точці і щоб виконувалась рівність (49). Введемо позначення $\xi_i^{m_j} = u_{x_i}^{m_j}(x,t)$, $\eta_i = u_{x_i}(x,t)$, $i = \overline{1,n}$, для $(x,t) \in Q_{0,T}$. Виберемо також числову послідовність

$$H^{m_j} = \sum_{i=1}^n a_i(|\xi_i^{m_j}|^{p-2}\xi_i^{m_j} - |\eta_i|^{p-2}\eta_i)(\xi_i^{m_j} - \eta_i), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Згідно з цими позначеннями і (49) та (44) матимемо

$$H^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{50}$$

Зауважимо, що $H^{m_j} = \sum_{i=1}^{n} a_i H(\xi_i^{m_j}, \eta_i)$, де H — функція з леми 3.

Припустимо, що для деякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ послідовність $\{\xi_i^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ є необмеженою. Тоді знайдеться така підпослідовність (залишимо старе позначення), що $|\xi_i^{m_j}| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Нехай $M_1 > 0$ — довільне число при $\eta_i = 0$, $M_1 = |\eta_i|$ в іншому випадку. Для вказаної сталої M_1 будуємо $h_0 = h_0(x,t)$ з леми 3. Оскільки для великих $j \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|\xi_i^{m_j}| \geq 2 + M_1$, то з леми 3 отримаємо

$$H^{m_j} \geq a_i H(\xi_i^{m_j}, \eta_i) \geq a_0 h_0(x,t) |\xi_i^{m_j} - \eta_i|,$$

де a_0 — стала з умови **A**. Тоді $H^{m_j} \geq a_0 h_0(x,t)|\xi_i^{m_j} - \eta_i| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, бо $h_0(x,t) > 0$. Це суперечить умові (50).

Отже, для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$ послідовність $\{\xi_i^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ є рівномірно обмеженою. Нехай ξ_i — одна з її часткових границь, тобто $\xi_i^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \xi_i$. Згідно з неперервністю функції H за першою змінною та (50)

$$\lim_{j\to\infty} H^{m_j} = \sum_{i=1}^{n} a_i H(\xi_i^{m_j}, \eta_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (|\xi_i|^{p-2}\xi_i - |\eta_i|^{p-2}\eta_i)(\xi_i - \eta_i) = 0,$$

що можливо лише при $\xi_i = \eta_i$. Отже, (46) доведено. Тому $\chi_i = |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i}$ для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$.

7. Для кожного $\omega \in \mathcal{U}$ візьмемо таку послідовність функцій $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, що $v_k \in \mathcal{L}_k$, $v_k \to \omega$ сильно в $\mathcal{U}$ при $k \to \infty$. Тоді з (47) будемо мати

$$[(\mathcal{P}u^{m_j})_t, v_k]_Q + \langle Au^{m_j}, v_k \rangle_Q = [f, v_k]_Q \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{N}, \quad m_j \geq k.$$

Спрямувавши $m_j \to \infty$, отримаємо

$$[(\mathcal{P}u)_t, v_k]_Q + \langle Au, v_k \rangle_Q = [f, v_k]_Q \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{N}, \quad m_j \geq k.$$

Тому при $k \to \infty$ отримаємо (4).

Теорему доведено.

Висновки. У цій статті досліджено мішану задачу для подвійно нелінійного параболічного рівняння (1) зі змінними показниками нелінійності. За допомогою методу Фаедо – Гальоркіна доведено існування узагальненого розв'язку цієї задачі.

1. *Bernis F.* Qualitative properties for some non-linear higher order degenerate parabolic equations // Houston J. Math. – 1988. – **14**, № 3. – P. 319 – 351.
2. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math Ann. – 1988. – **279**. – P. 373 – 394.
3. *Шишков А. Е.* Распространения возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 9. – С. 139 – 160.
4. *Дегтярев С. П.* $L_1 - L_\infty$ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными // Там же. – 2007. – **198**, № 9. – С. 639 – 660.
5. *Лаптев Г. И.* Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью // Там же. – 1997. – **188**, № 9. – С. 84 – 112.
6. *Orlicz W.* Uber konjugierte Exponentenfolgen // Stud. Math. (Lwow). – 1931. – **3**. – P. 200 – 211.
7. *Kovacik O.* On space $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czech. Math. J. – 2005. – **41 (116)**. – P. 592 – 618.

8. *Buhrii O. M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 2009. – **70**, № 6. – P. 2325 – 2331.
9. *Бокало Т. М.* Деякі формули інтегрування частинами в просторах функцій зі змінним степенем нелінійності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 5 – 18.
10. *Бугрій О. М.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Там же. – 2000. – Вип. 56. – С. 33 – 43.
11. *Бугрій О. М.* Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 867 – 878.
12. *Бугрій О. М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності // Мат. студ. – 2005. – **24**, № 2. – С. 167 – 172.
13. *Алхутов Ю. А.* Параболические уравнения с переменным порядком нелинейности // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 23 – 50.
14. *Бугрій О. М.* Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням // Укр. мат. вісн. – 2008. – **5**, № 4. – С. 435 – 469.
15. *Lions J.-L.* Some non-linear evolution equations // Bull. de la S. M. F. – 1965. – **93**. – P. 43 – 96.
16. *Aubin J.-P.* Un theoreme de compacite // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1963. – **256**, № 24. – P. 5042 – 5044.
17. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
18. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
19. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
20. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
21. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977. – 528 с.

Одержано 25.06.10