УДК 517.5

О. Д. Трофименко (Донец. нац. ун-т)

АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

A mean value theorem for polynomials of a special form is proved. The case of a sum over vertices of a regular polygon is studied and a criterion for the equation of a special form to be satisfied is obtained.

Доказана теорема о среднем для полиномов специального вида. Изучен случай суммы по вершинам правильного многоугольника и, таким образом, получен критерий выполнения уравнения специального вида.

1. Вступ. Класична теорема Гаусса, що характеризує клас гармонічних функцій за допомогою формули середнього значення, отримала подальший розвиток і уточнення у багатьох роботах (див., наприклад, огляди [1, 2] і монографії [3, 4] з великою бібліографією). Одним із основних напрямків у цих дослідженнях є опис класів функцій, які задовольняють задані інтегральні рівняння, що мають певний геометричний сенс. Серед отриманих результатів можна відмітити теореми про середнє, що характеризують гармонічні многочлени [5], біаналітичні функції [6], розв'язки рівнянь згортки з фінітним згортувачем та інші (див. [7]). Окрім самостійного інтересу результати такого типу важливі в інтегральній геометрії та різних додатках (див. [3]).

У даній роботі доведено теорему про середнє для поліаналітичних многочленів спеціального виду. Її особливістю є те, що до формули середнього значення (див. нижче) входить значення функції у вершинах правильного n-кутника, а також значення деякого диференціального оператора від функції в центрі цього n-кутника.

Для точного формулювання результату введемо наступні позначення.

Нехай $s, h \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $0 \leq h < n - s$, $0 \leq s \leq m - 1$, $q = \min\{h + s, m - 1\}$.

Далі $B_{\mathcal{R}}$ — круг в $\mathbb{C}$ із центром у точці 0 і радіусом $\mathcal{R}$. Позначимо через $\zeta_\nu = Re^{i\frac{2\pi\nu}{n}}$, $\nu = 1, \ldots, n$, вершини кожного правильного n-кутника з радіусом описаного кола R та вписаного r.

Нехай $\mathcal{R}_*(n, R, r) = \begin{cases} \sqrt{5R^2 + 4rR}, & n \text{ непарне}, \\ \sqrt{8R^2 + R^4/r^2}, & n \text{ парне}. \end{cases}$

2. Формулювання основного результату.

Теорема 1. *Нехай* $\mathcal{R} > \dfrac{1}{2}\mathcal{R}_*(n, R, r)$, *функція* f *належить* $C^q(B_{\mathcal{R}})$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними*:

1) *при всіх* $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $z + \zeta_\nu e^{i\alpha} \in B_{\mathcal{R}}$, $\nu \in \{1, \ldots, n\}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s f(\zeta_\nu e^{i\alpha} + z) = \sum_{p=s}^{q} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} f(z), \tag{1}$$

2) *функція* f *має вигляд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{h} \sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} z^k \bar{z}^l, \tag{2}$$

де $c_{k,l}$ — *деякі сталі.*

3. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай функція* $f(z)$ *має вигляд* (2). *Тоді виконується рівність*

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\zeta_\nu e^{i\alpha})^s f(\zeta_\nu e^{i(\alpha+\beta)}+ze^{i\beta})=\sum_{p=s}^{q}\frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^{p} f(ze^{i\beta}), \qquad (3)$$

де $0\le\alpha\le 2\pi$, $0\le\beta\le 2\pi$, $ze^{i\beta}+\zeta_\nu e^{i(\alpha+\beta)}\in B_{\mathcal{R}}$.

Доведення. Маємо

$$e^{i\alpha s}\sum_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu^s f(\zeta_\nu e^{i(\alpha+\beta)}+ze^{i\beta})=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{l}c_{k,l}C_k^jC_l^p e^{i\alpha s}\zeta_\nu^{s+j}\bar\zeta_\nu^{\,p}e^{i\alpha(j-p)}e^{i\beta k}e^{-i\beta l}z^{k-j}\bar z^{l-p}.$$

Далі, відокремлюючи міркування щодо z та ζ_ν, отримуємо

$$e^{i\alpha s}\sum_{j=0}^{h}\sum_{p=0}^{m-1}e^{i\alpha(j-p)}\frac{1}{j!p!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{j}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^{p} f(ze^{i\beta})\sum_{\nu=1}^{n}R^{s+j+p}e^{i(s+j-p)\frac{2\pi\nu}{n}}=0,$$

окрім випадку $s+j-p=q_1n$, $q_1\in\mathbb{Z}$.

Оцінимо q_1n:

$$1-m\le q_1n\le m-1+h\le m-1+n-s\le m-1+n.$$

Звідси випливає, що є можливим випадок: $q_1n=0$.

Отже, $s+j-p=0$. Далі

$$e^{i\alpha s}\sum_{j=0}^{h}\sum_{p=0}^{m-1}e^{i\alpha(j-p)}\frac{1}{j!p!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{j}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^{p} f(ze^{i\beta})\sum_{\nu=1}^{n}R^{s+j+p}e^{i(s+j-p)\frac{2\pi\nu}{n}}=$$

$$=\sum_{p=s}^{q}\frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^{p} f(ze^{i\beta}).$$

Тепер очевидно, що рівність (3) виконується.

Лемму 1 доведено.

Далі введемо для функції $f\in C^q(B_{\mathcal{R}})$ відповідний ряд Фур'є

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(\rho)e^{i\varphi k}, \qquad (4)$$

де $f_k(\rho)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\rho e^{i\varphi})e^{-i\varphi k}d\varphi$.

Лема 2. *Нехай* f *належить* $C^q(B_{\mathcal{R}})$ *і для неї виконується рівність* (3). *Тоді ця рівність виконується для кожного доданка ряду Фур'є цієї функції, і навпаки.*

Доведення. *Необхідність.* Помножимо ліву і праву частини рівності (3) на $e^{-i\beta k}$ і зінтегруємо по β від $-\pi$ до π :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\beta k}\sum_{\nu=1}^{n}(\zeta_\nu e^{i\alpha})^s\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_k(\rho')e^{i(\varphi-\frac{2\pi\nu}{n}-\alpha)k}e^{i\beta k}d\beta=$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\beta k} \sum_{p=s}^{q} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\rho) e^{i\varphi k} e^{i\beta k} d\beta,$$

де $\rho' = \sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cos\left(\varphi - \frac{2\pi\nu}{n} - \alpha\right)}$.

Далі

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s f_k(\rho') e^{i(\varphi - \frac{2\pi\nu}{n} - \alpha)k} = \sum_{p=s}^{q} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} f_k(\rho) e^{i\varphi k},$$

що і потрібно було довести.

Достатність. Нехай

$$\lambda(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s f\left(\rho' \cos\left(\varphi - \frac{2\pi\nu}{n} - \alpha + \beta\right), \rho' \sin\left(\varphi - \frac{2\pi\nu}{n} - \alpha + \beta\right)\right) -$$

$$- \sum_{p=s}^{q} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} f(\rho \cos(\varphi + \beta), \rho \sin(\varphi + \beta)).$$

Тоді маємо рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \lambda(\alpha) e^{-i\beta k} d\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s f(\rho' \cos\beta, \rho' \sin\beta) e^{-i\beta k} d\beta\right) e^{i(\varphi - \frac{2\pi\nu}{n} - \alpha)k} -$$

$$- \sum_{p=s}^{q} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho \cos\beta, \rho \sin\beta) e^{-i\beta k} d\beta e^{ik\varphi} = 0.$$

Отже, $\lambda(\alpha) = 0$, що й завершує доведення леми.

Лема 3. *Нехай* $f(z) = cN_0(\lambda|z|)$ $(N_0(\lambda|z|)$ — *функція Неймана,* $\lambda \neq 0$, c — *стала*) *і задовольняє рівність* (1) *в* $B_{\mathcal{R}}$. *Тоді* $c = 0$.

Доведення. Функція $N_0(\lambda|z|)$ дійсно-аналітична і для неї з [3] (ч. 1) виконується

$$N_0(\lambda|z|) = \frac{2}{\pi} J_0(\lambda|z|) \left(\log \frac{\lambda|z|}{2} + \gamma\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\lambda|z|}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k},$$

де $J_0(\lambda|z|)$ — функція Бесселя, $\gamma = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \log N\right)$. Далі, використовуючи вигляд функції Бесселя, отримуємо

$$N_0(\lambda|z|) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{\lambda|z|}{2})^{2m}}{(m!)^2} \left(\log \frac{\lambda|z|}{2} + \gamma - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right).$$

Підставимо в рівність (1) функцію $f(z) = cN_0(\lambda|z|)$. Тоді

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s cN_0(\lambda|\zeta_\nu e^{i\alpha} + z|) = \sum_{p=s}^{q} c \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} N_0(\lambda|z|),$$

де функція $(\zeta_\nu e^{i\alpha})^s N_0(\lambda|\zeta_\nu e^{i\alpha} + z|)$ є дійсно-аналітичною.

В отриманій рівності позначимо диференціювання функції Неймана через $DN_0(\lambda|z|)$ — дійсно-аналітичну функцію. Згідно з [3] (ч. 1, твердження 7.1) маємо $D = (\Delta + \lambda^2)P(\partial)$, де $P(\partial)$ — диференціальний оператор в $\mathbb{R}^2$. Тоді $DN_0(\lambda|z|) = 0$ скрізь, окрім точки $z = 0$.

З іншого боку, враховуючи отриманий вигляд для $N_0(\lambda|z|)$, маємо

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\zeta_\nu e^{i\alpha})^s cN_0(\lambda|\zeta_\nu e^{i\alpha} + z|) \equiv 0$$

в околі точки $z = 0$. Тобто у загальному вигляді функції $f(z)$ стала c дорівнює нулеві.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай* $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $z = x + iy$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $c \in \mathbb{C}$ *і* $f^*(z) = ce^{i(x\cos\gamma + y\sin\gamma)\lambda}$. *Тоді* $f^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k J_k(\lambda\rho)e^{ik\varphi}$, c_k — *стала.*

Доведення. Покажемо спочатку, що вихідна функція задовольняє рівняння

$$\Delta f^*(z) + \lambda^2 f^*(z) = 0. \tag{5}$$

Маємо

$$-c\lambda^2 e^{i(x\cos\gamma + y\sin\gamma)\lambda} + \lambda^2 ce^{i(x\cos\gamma + y\sin\gamma)\lambda} = 0.$$

Тепер перевіримо, що кожен доданок $f_k(\rho)e^{ik\varphi}$ розкладу функції $f^*(z)$ також задовольняє рівняння (5).

Нехай

$$f_k(\rho)e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t)e^{-ikt}dt. \tag{6}$$

Позначимо $h(x,y,t) = f^*(x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t)$. Тоді

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta h(x,y,t)e^{-ikt}dt + \lambda^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x,y,t)e^{-ikt}dt = 0.$$

Тепер зрозуміло, що

$$\Delta(f_k(\rho)e^{ik\varphi}) + \lambda^2 f_k(\rho)e^{ik\varphi} = 0.$$

Як відомо, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f_k' + \dfrac{k}{\rho}\right)e^{i(k-1)\varphi} + \dfrac{1}{2}\left(f_k' - \dfrac{k}{\rho}\right)e^{i(k+1)\varphi}$, а також $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right) = \dfrac{i}{2}\left(f_k' + \dfrac{k}{\rho}\right)e^{i(k-1)\varphi} - \dfrac{i}{2}\left(f_k' - \dfrac{k}{\rho}\right)e^{i(k+1)\varphi}$. Звідси отримуємо

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right) = \frac{1}{4}\left(\left(f_k' + \frac{k}{\rho}\right)' + \frac{k-1}{\rho}\left(f_k' + \frac{k}{\rho}\right)\right)e^{i(k-2)\varphi} +$$

$$+\frac{1}{4}\left(2f_k'' + 2\frac{f_k'}{\rho} - 2\frac{k^2}{\rho^2}f_k\right)e^{ik\varphi} + \frac{1}{4}\left(\left(f_k' - \frac{k}{\rho}\right)' - \frac{k+1}{\rho}\left(f_k' - \frac{k}{\rho}\right)\right)e^{i(k+2)\varphi}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right) = -\frac{1}{4}\left(\left(f_k^{'} + \frac{k}{\rho}\right)^{'} + \frac{k-1}{\rho}\left(f_k^{'} + \frac{k}{\rho}\right)\right)e^{i(k-2)\varphi} +$$

$$+\frac{1}{4}\left(2f_k'' + 2\frac{f_k'}{\rho} - 2\frac{k^2}{\rho^2}f_k\right)e^{ik\varphi} - \frac{1}{4}\left(\left(f_k^{'} - \frac{k}{\rho}\right)^{'} - \frac{k+1}{\rho}\left(f_k^{'} - \frac{k}{\rho}\right)\right)e^{i(k+2)\varphi}.$$

Враховуючи зазначене вище, отримуємо рівняння Бесселя для функції $f_k(\rho)$:

$$\rho^2 f_k'' + \rho f_k' + (\lambda^2\rho^2 - k^2)f_k = 0. \tag{7}$$

Оскільки $f \in C^\infty(\mathbb{C})$, з (6) випливає, що функція $f_k(\rho)$ неперервна на $[0, +\infty]$. Звідси та з рівності (7) маємо $f_k(\rho) = c_k J_k(\lambda\rho)$.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Нехай* $f(z) = cJ_0(\lambda|z|)$ $(\lambda \neq 0,\ c \in \mathbb{C})$ *і задовольняє рівність* (1) *в* $B_{\mathcal{R}}$. *Тоді* $c = 0$.

Доведення. За лемою 4 $f(z) = ce^{i(x\cos\gamma + y\sin\gamma)\lambda}$.

Підставимо $f(z)$ у рівняння (1):

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\zeta_\nu e^{i\alpha})^s ce^{i(x_\nu\cos\gamma + y_\nu\sin\gamma)\lambda}e^{i(x\cos\gamma + y\sin\gamma)\lambda} =$$

$$= \sum_{p=s}^{q}\frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!}c\frac{i^{2p-s}}{2^{2p-s}}\lambda^{2p-s}e^{i\gamma s}e^{i(x\cos\gamma + y\sin\gamma)\lambda}.$$

Очевидно, що $c = 0$.

Лему 5 доведено.

Позначимо через $C_\natural^q$ клас q разів диференційовних радіальних функцій.

Лема 6. *Нехай функція f належить $C_\natural^q(B_{\mathcal{R}})$ і задовольняє рівність* (1) *в* $B_{\mathcal{R}}$. *Тоді* $f(z) = \sum_{k=0}^{q} c_k|z|^{2k}$, *де* c_k — *деякі сталі.*

Доведення. В [3] (ч. 4, теорема 3.2) доведено наступне твердження.

Нехай $f \in C^q(B_{\mathcal{R}})$ та існує поліном $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, що задовольняє рівність

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\zeta_\nu e^{i\alpha})^s f(\zeta_\nu e^{i\alpha} + z) = \sum_{p=s}^{q}\frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!}Q(\partial)f(z).$$

Тоді існує многочлен P: $P(\triangle)f_0 = 0$ у $B_{\mathcal{R}}$, де $\triangle$ — оператор Лапласа.

Отже, $P(\triangle)f = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \triangle^\nu f = 0$, де c_ν — стала.

Таким чином, при будь-якому $i \in 1, \ldots, n$

$$(\triangle - \lambda_i)F = 0,$$

де $F = c_n \prod_{j\neq i}^{n}(\triangle - \lambda_j)f$, а $\lambda_i \neq 0$ — корені рівняння $P(z) = 0$.

Нехай $\lambda_i \neq 0$. Як розв'язок диференціального рівняння Бесселя отримаємо

$$F(z) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda_i}|z|) + c_2 N_0(\sqrt{\lambda_i}|z|),$$

де J_0 і N_0 — відповідно функції Бесселя і Неймана; c_1, c_2 — деякі сталі.

За лемами 3 і 5 $c_1 = c_2 = 0$. Звідси $\prod_{j\neq i}^{n}(\triangle - \lambda_j)f_0 = 0$. Тоді $(\triangle - \lambda_m)\prod_{j\neq i}^{n}(\triangle - \lambda_j)f_0 = 0$, $m \in \mathbb{N}$.

Міркуючи аналогічно, переконуємося, що $\triangle f_0 = 0$, $\lambda_j \neq 0$.

Якщо ж $\lambda_j = 0$, то нехай $f = \sum_{k>\min\{h,m-1\}}^{N} c_k|z|^{2k}$, $N \in \mathbb{N}$.

Розглянемо випадок $k = \min\{h+s, m-1\} + 1$.

Функція з вибраним індексом не задовольняє рівняння (1). Далі беремо оператор Лапласа від f:

$$\triangle \sum_{k>\min\{h,m-1\}}^{N} c_k|z|^{2k} = \sum_{k>\min\{h,m-1\}}^{N} \tilde{c_k}|z|^{2(k-1)},$$

де $\tilde{c_k}$ — деякі сталі.

Тепер підставимо отриману функцію у рівняння (1). Тільки випадок, коли $k = \min\{h+s, m-1\} + 1$, підходить для вихідної рівності, тобто $f = \tilde{c}_{\min\{h,m-1\}}|z|^{2(k-1)}$, де $\tilde{c}_{\min\{h,m-1\}}$ — сталі.

Знову беремо оператор Лапласа і, таким чином, отримуємо функцію вигляду

$$f = \sum_{k=0}^{q} c_k|z|^{2k}, \quad c_k \text{ — стала},$$

що і потрібно було довести.

Лема 7. *Нехай для* $f_j(\rho)e^{ij\varphi}$ *виконується рівність* (1). *Тоді ця рівність виконується для* $f_{j+1}(\rho)e^{i(j+1)\varphi}$ *і* $f_{j-1}(\rho)e^{i(j-1)\varphi}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Доведення. Отже, для $f_j(\rho)e^{ij\varphi}$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f_j(\rho)e^{ij\varphi}\right) = \left(f_j' + j\frac{f_j(\rho)}{\rho}\right)e^{i(j-1)\varphi} + \left(f_j' - j\frac{f_j(\rho)}{\rho}\right)e^{i(j+1)\varphi},$$

де

$$f_j' + j\frac{f_j(\rho)}{\rho} = f_{j-1}(\rho). \tag{8}$$

За умовою $f_j(\rho)e^{ij\varphi}$ задовольняє рівність (1). Звідси $\frac{\partial}{\partial x}\left(f_j(\rho)e^{ij\varphi}\right)$ і $f_{j-1}(\rho)e^{i(j-1)\varphi}$ також задовольняють рівність (1).

Аналогічно

$$f_j' - j\frac{f_j(\rho)}{\rho} = f_{j+1}(\rho), \tag{9}$$

і $f_{j+1}(\rho)e^{i(j+1)\varphi}$ задовольняє рівність (3).

4. Доведення основного результату. *Достатність*. Очевидно, що рівність (1) збігається з рівністю (3) при $\beta = 0$.

Із леми 1 випливає достатність для основної теореми.

Необхідність. З рівності (8) маємо

$$f_1'(\rho) + \frac{f_1(\rho)}{\rho} = \sum_{k=0}^{q} c_k\rho^{2k}.$$

Тоді

$$f_1(\rho) = \sum_{k=0}^{q} c_k \frac{\rho^{2k+1}}{2k+2} + \frac{c}{\rho},$$

c — стала.

Підставимо отриману функцію в рівняння (9), вважаючи, що $c_{k,1} = \dfrac{c_k}{2k+2}$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s \left(\sum_{k=0}^{q} c_{k,1} (\zeta_\nu e^{i\alpha} + z)^{k+1} (\overline{\zeta_\nu} e^{-i\alpha} + \overline{z})^k + \frac{c}{(\overline{\zeta_\nu} e^{-i\alpha} + \overline{z})} \right) =$$

$$= \sum_{p=s}^{q} \frac{n r^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right)^{p} g(z) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c}{(\overline{\zeta_\nu} e^{-i\alpha} + \overline{z})},$$

де $g(z)$ має вигляд (2). Звідси очевидно, що рівність виконується лише при умові, що $c = 0$. Отже, $f_1(\rho) = \sum_{k=0}^{q} c_{k,1} \rho^{2k+1}$.

Нехай $f_j(\rho) = \sum_{k=0}^{q} c_{k,j} \rho^{2k+j}$. Тоді

$$f'_{j+1}(\rho) + (j+1) \frac{f_{j+1}(\rho)}{\rho} = \sum_{k=0}^{q} c_j \rho^{2k+j},$$

звідки $f_{j+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{q} c_{k,j+1} \rho^{2k+j+1}$.

Отже, за індукцією $f_j(\rho) = \sum_{k=0}^{q} c_{k,j} \rho^{2k+j}$.

Тепер розглянемо функцію з від'ємними індексами. Почнемо з $f_{-1}(\rho)$. З рівності (9) маємо

$$f'_{-1}(\rho) + (-1) \frac{f_{-1}(\rho)}{\rho} = f_0(\rho).$$

Звідси аналогічно отримуємо

$$f_{-1}(\rho) = \sum_{k=0}^{q} c_{k,-1} \rho^{2k+1}.$$

Знову використовуючи індукцію, одержуємо

$$f_{-j}(\rho) = \sum_{k=0}^{q} c_{k,-j} \rho^{2k+j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отже, $f_{-j}(z) = \left(\sum_{k=0}^{q} c_{k,-j} \rho^{2k+j} \right) e^{-i\varphi}$. Розглянемо детально два випадки.

1. Нехай $h \leq m-1$. Тоді

$$f_{-j}(z) = \sum_{k=0}^{h} c_{k,-j} z^k \overline{z}^{k+j}.$$

Звідси

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s \sum_{k=0}^{h} c_{k,-j} (\zeta_\nu e^{i\alpha} + z)^k (\overline{z} + \bar{\zeta}_\nu e^{-i\alpha})^{k+j} =$$

$$= \sum_{p=s}^{\min\{h+j,h+s\}} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} f(z).$$

У даному випадку $h+j=m-1, h-(m-1)=-j$.

2. Нехай $h>m-1$. Тоді

$$f_{-j}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,-j} z^k \bar{z}^{k+j}.$$

Звідси

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,-j} (\zeta_\nu e^{i\alpha}+z)^k (\bar{z}+\bar{\zeta}_\nu e^{-i\alpha})^{k+j} =$$

$$= \sum_{p=s}^{\min\{m-1+j,m-1+s\}} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} f(z).$$

Тоді $m-1+j \neq m-1$, тобто умова другого випадку не підходить.

Аналогічно проаналізуємо функції з додатними індексами.

1. Знову $h \le m-1$, $f_j(z) = \sum_{k=0}^{h} c_{k,j} z^{k+j} \bar{z}^k$. Тоді

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s \sum_{k=0}^{h} c_{k,j} (\zeta_\nu e^{i\alpha}+z)^{k+j} (\bar{z}+\bar{\zeta}_\nu e^{-i\alpha})^{k} =$$

$$= \sum_{p=s}^{\min\{h,h+j+s\}} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} f(z).$$

Тепер $h \neq h+j$, тобто умова першого випадку не підходить.

2. Розглянемо випадок $h>m-1$. Маємо

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu e^{i\alpha})^s \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,j} (\zeta_\nu e^{i\alpha}+z)^{k+j} (\bar{z}+\bar{\zeta}_\nu e^{-i\alpha})^{k} =$$

$$= \sum_{p=s}^{\min\{m-1,m-1+j+s\}} \frac{nR^{2p}}{(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} f(z).$$

Тоді $h-(m-1)=j$.

Об’єднуючи міркування щодо функцій $f_j(z)$, отримуємо

$$f_{-j}(z) = \sum_{k=0}^{h} c_{k,-j} z^k \bar{z}^{k+j}$$

і

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,j} z^{k+j} \bar{z}^k.$$

Тепер, враховуючи наведені вище міркування та леми 2 і 4, одержуємо

$$f(z) = f_0(z) + f_+(z) + f_-(z),$$

де, в свою чергу,

$$f_+(z) = \sum_{j=0}^{h-(m-1)} \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,j} z^{k+j} \bar{z}^k = \sum_{l=0}^{h} \sum_{k=0}^{m-1} c_{k,l} z^l \bar{z}^k,$$

$$f_-(z) = \sum_{j=0}^{m-1-h} \sum_{k=0}^{h} c_{k,-j} z^k \bar{z}^{k+j} = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{h} c_{k,l} z^k \bar{z}^l, \quad l = j + k.$$

Отже, шукана функція $f(z)$ має вигляд (2).

Теорему доведено.

1. *Netuka I., Vesely J.* Mean value property and harmonic functions // Classical and Modern Potential Theory and Applications / Eds Comri Sankaran et al. – Kluwer Acad. Publ., 1994. – P. 359 – 398.
2. *Zalcman L.* Mean values and differential equations // Isr. J. Math. – 1973. – **14**. – P. 339 – 352.
3. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2003. – 454 p.
4. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group // Ser. Springer Monogr. Math. – 2009.
5. *Ramsey T., Weit Y.* Mean values and classes of harmonic functions // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1984. – **96**. – P. 501 – 505.
6. *Maxwell O. R.* A theorem of Fédoroff // Duke Math. J. – 1948. – **18**. – P. 105 – 109.
7. *Трофименко О. Д.* Деякі інтегральні рівності для певних класів поліномів // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2009. – **18**. – С.184 – 188.

Одержано 10.11.10