УДК 517.53

М. Є. Коренков, Ю. Зайонц, Ю. І. Харкевич (Волин. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕВАНЛІННИ ТА ДЕФЕКТНІ ЗНАЧЕННЯ ДЗЕТА-ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

We establish the Nevanlinna characteristics of the Weierstrass zeta function and show that none of the values $a \in \bar{C}$ is exceptional in the Nevanlinna sense for this function.

Найдены неванлинновы характеристики дзета-функций Вейерштрасса и показано, что ни одно из значений $a \in \bar{C}$ не является исключительным в смысле Неванлинны для этой функции.

У даній роботі ми знайдемо характеристики Неванлінни відомої дзета-функції Вейєрштрасса $\zeta(z)$, яка тісно пов'язана із функціями Вейєрштрасса $\sigma(z)$, $\wp(z)$ [1]. Вивчимо також питання про дефектні значення ζ-функції. Ці питання можна дослідити з допомогою асимптотичних формул із робіт [2, 3], однак ми скористаємося простішими засобами. Вказані функції часто використовуються при дослідженнях, що торкаються еліптичних функцій. Зазначимо, що $\zeta(z)$ — мероморфна функція з простими полюсами $\Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, де $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, $m \in Z$, $n \in \mathbb{Z}$, яка зображується у вигляді

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{ \frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\},$$

причому штрих біля знака суми означає, що доданком з $m = 0$, $n = 0$ нехтуємо. Функції $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\wp(z)$ пов'язані рівностями $\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$, $\wp(z) = -\zeta'(z)$, причому $\sigma(z)$ є цілою функцією з простими нулями Ω_{mn}, $\wp(z)$ — подвійно періодична мероморфна функція з полюсами другого порядку у вказаних точках, тобто еліптична функція.

Будемо вважати відомими основні поняття, факти і стандартні позначення із теорії розподілу значень мероморфних функцій [4]. Нагадаємо деякі з них.

Характеристики Неванлінни мероморфної функції f, $f \neq \mathrm{const}$, вводяться з допомогою рівностей

$$m(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi,$$

$$N(r, f) := \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \ln r,$$

$$T(r, f) := m(r, f) + N(r, f),$$

де $\ln^+ \alpha := \max\{0, \ln\alpha\}$, $\alpha > 0$, і $n(r, f)$ (що інакше позначається $n(r, \infty, f)$) є числом полюсів функції f у крузі $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, $r \geq 0$, з урахуванням їх кратностей. Якщо $a \in \mathbb{C}$, то використовуються позначення $n(r, a, f)$,

$N(r,a,f)$, $m(r,a,f)$ замість відповідно $n\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $N\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$, $m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)$. Дефектом Неванлінни мероморфної функції f у точці $a\in\overline{\mathbb{C}}$ називається величина

$$\delta(a,f) \;:=\; \varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}.$$

Якщо $\delta(a,f)>0$, то a називається винятковим (дефектним) значенням у розумінні Неванлінни мероморфної функції f.

Теорема 1. *Справджуються співвідношення* $(r\to\infty)$

$$N(r,\zeta) \;=\; \frac{\pi r^2}{2D}+O(r),$$

$$m(r,\zeta) \;=\; O(\ln r), \tag{1}$$

$$T(r,\zeta) \;=\; \frac{\pi r^2}{2D}+O(r), \tag{2}$$

де D *— площа основного паралелограма періодів функції* $\wp(z)$.

Доведення. Як відомо [1, с. 420],

$$N(r,\wp) \;=\; \frac{\pi r^2}{D}+O(r), \qquad r\to\infty.$$

Тому

$$N(r,\zeta) \;=\; \frac{\pi r^2}{2D}+O(r), \qquad r\to\infty.$$

Оскільки $\zeta(z)=\sigma'(z)/\sigma(z)$, то згідно з теоремою 1.3 [4, с. 122]

$$m(r,\zeta) \;=\; m\left(r,\frac{\sigma'}{\sigma}\right) \;=\; O(\ln r), \qquad r\to\infty.$$

Отже,

$$T(r,\zeta) \;=\; m(r,\zeta)+N(r,\zeta) \;=\; \frac{\pi r^2}{2D}+O(r), \qquad r\to\infty.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. *Жодне значення* $a\in\mathbb{C}$ *не є винятковим у розумінні Неванлінни для функції* $\zeta(z)$.

Доведення. Із (1), (2) випливає, що

$$\delta(\infty,\zeta) \;=\; \varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,\zeta)}{T(r,\zeta)} \;=\; 0,$$

тобто неванліннів дефект ζ-функції в точці ∞ дорівнює нулю.

Відомо [1, с. 422], що

$$m(r, 0, \wp) = O(r), \quad r \to \infty. \tag{3}$$

Використовуючи властивості характеристики $m(r, a, f)$ мероморфної функції f, лему 2.1 із [4, с. 129], оцінки (1), (3) і рівність $\zeta'(z) = -\wp(z)$, приходимо до висновку, що при $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, виконується

$$m(r, a, \zeta) \le m\left(r, \frac{\zeta}{\zeta'}\right) + O(\ln r) \le$$

$$\le m\left(r, \frac{1}{\zeta'}\right) + m(r, \zeta) + O(\ln r) = m\left(r, \frac{1}{\wp}\right) + O(\ln r) =$$

$$= m(r, 0, \wp) + O(\ln r) = O(r), \quad r \to \infty.$$

Тоді із рівності (2) випливає, що

$$\delta(a, \zeta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, a, \zeta)}{T(r, \zeta)} \le \lim_{r\to\infty} \frac{O(r)}{T(r, \zeta)} = 0,$$

тобто неванліннів дефект функції $\zeta(z)$ у довільній точці $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, дорівнює нулю, $\delta(a, \zeta) = 0$.

Розглянемо випадок, коли $a = 0$. Використовуючи властивості характеристики $m(r, a, f)$ мероморфної функції f, оцінку (3) і теорему 1.3 [4, с. 122], дістаємо

$$m(r, 0, \zeta) = m\left(r, \frac{1}{\zeta}\right) = m\left(r, \frac{\zeta'}{\zeta} \cdot \frac{1}{\zeta'}\right) \le m\left(r, \frac{\zeta'}{\zeta}\right) + m\left(r, \frac{1}{\zeta'}\right) =$$

$$= m\left(r, \frac{1}{\wp}\right) + O(\ln r) = m(r, 0, \wp) + O(\ln r) =$$

$$= O(r) + O(\ln r) = O(r), \quad r \to \infty.$$

Згідно з рівністю (2) знаходимо

$$\delta(0, \zeta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, 0, \zeta)}{T(r, \zeta)} \le \lim_{r\to\infty} \frac{O(r)}{T(r, \zeta)} = 0,$$

тобто неванліннів дефект функції $\zeta(z)$ у точці $a = 0$ дорівнює нулю, $\delta(0, \zeta) = 0$.

Теорему доведено.

Зауваження. Із рівності (2), зокрема, випливає, що $\zeta(z)$ — мероморфна функція порядку 2.

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
2. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Об асимптотике логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 1. – С. 25 – 32.
3. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 3. – С. 63 – 79.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

Одержано 12.11.10