УДК 517.948

С. М. Загороднюк (Харков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

УСЕЧЕННАЯ МАТРИЧНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ: ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД

We study the truncated matrix trigonometric moment problem. We obtain parametrization of all solutions of this moment problem (in both nondegenerate and degenerate cases) via an operator approach. This parametrization establishes a one-to-one correspondence between a certain class of analytic functions and all solutions of the problem. We use important results on generalized resolvents of isometric operators, obtained by M. E. Chumakin.

Вивчається зрізана матрична тригонометрична проблема моментів. Отримано параметризацію всіх розв'язків цієї проблеми (одночасно у невиродженому та виродженому випадках) за допомогою операторного підходу. Ця параметризація встановлює взаємно однозначну відповідність між деяким класом аналітичних функцій та всіма розв'язками задачі. При цьому використано важливі результати М. Є. Чумакіна про узагальнені резольвенти ізометричних операторів.

1. Введение. Целью настоящей работы является получение параметризации всех решений усеченной матричной тригонометрической проблемы моментов (сокращенно УМТПМ). Напомним, что эта проблема моментов состоит в нахождении неубывающей $\mathbb{C}_{N\times N}$-значной функции $M(t) = (m_{k,l})_{k,l=0}^{N-1}$, $t \in [0, 2\pi]$, $M(0) = 0$, которая является непрерывной слева на $(0, 2\pi]$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dM(t) = S_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, d, \tag{1}$$

где $\{S_n\}_{n=0}^d$ — заданная последовательность $N \times N$ комплексных матриц (моментов). Здесь $N \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathbb{Z}_+$ являются фиксированными числами.

Эта проблема моментов в существенном эквивалентна знаменитой проблеме коэффициентов Каратеодори (см. [1] для скалярного случая и [2, 3] для матричного) и поэтому представляет особый интерес.

Положим

$$T_d = (S_{i-j})_{i,j=0}^d = \begin{pmatrix} S_0 & S_{-1} & S_{-2} & \ldots & S_{-d} \\ S_1 & S_0 & S_{-1} & \ldots & S_{-d+1} \\ S_2 & S_1 & S_0 & \ldots & S_{-d+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_d & S_{d-1} & S_{d-2} & \ldots & S_0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\{S_n\}_{n=0}^d$ взято из (1), и

$$S_n := S_{-n}^*, \qquad n = -d, -d+1, \ldots, -1.$$

Скалярная ($N = 1$) усеченная тригонометрическая проблема моментов хорошо изучена. В 1911 г. F. Riesz и G. Herglotz получили необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи (см., например, [1]). В положительно определенном случае $T_d > 0$ М. Г. Крейн и А. А. Нудельман описали канонические решения задачи [4]. В 1966 г. М. Е. Чумакин описал все решения скалярной усеченной тригонометрической проблемы моментов, используя свои результаты по обобщенным резольвентам изометрических операторов (см. [5, 7]).

В случае произвольного N условие

$$T_d \geq 0 \tag{3}$$

является необходимым и достаточным для разрешимости проблемы моментов (1) (см., например, [8]). В 1969 г. О. Т. Инин получил описание всех решений УМТПМ во вполне неопределенном случае $T_d > 0$ [9]. При этом он использовал теорию псевдогильбертовых пространств, которая была построена М. Г. Крейном и Ю. М. Березанским [10].

Как уже упоминалось выше, УМТПМ тесно связана (и в существенном эквивалентна) матричной проблеме коэффициентов Каратеодори. Эта связь основана на матричном обобщении классического интегрального представления Рисса – Херглотца аналитической функции в единичном круге, имеющей неотрицательную вещественную часть (см. [2, 3] и ссылки в этих работах). В 1998 г. параметрическое описание всех решений последней задачи одновременно в невырожденном и вырожденном случаях было впервые получено G.-N. Chen, Y.-J. Hu [2]. В 2006 г. другое параметрическое описание всех решений задачи одновременно в невырожденном и вырожденном случаях было получено B. Fritzsche и B. Kirstein [3]. Однако осталось невыясненным, задают ли вышеупомянутые параметризации взаимно однозначное соответствие между соответствующими множествами параметров и решениями задачи.

Мы опишем все решения УМТПМ в общем случае $T_d \geq 0$. Для этого используем некоторый операторный подход и вышеупомянутые результаты М. Е. Чумакина об обобщенных резольвентах изометрических операторов. Операторный подход позволяет изучать одновременно невырожденный и вырожденный случаи различных проблем моментов (см. [11], а также [12, 13]). Заметим, что этот подход близок к „чисто операторному” подходу B. Sz.-Nagy, A. Korányi к интерполяционной проблеме Неванлинны – Пика [1, с. 217]. Полученная нами параметризация устанавливает взаимно однозначное соответствие между некоторым классом аналитических функций и всеми решениями задачи. При этом наша формула проще аналогичных формул G.-N. Chen, Y.-J. Hu и B. Fritzsche, B. Kirstein. Кроме того, операторная точка зрения позволяет увидеть целиком всю картину задачи, в отличие от применявшегося ранее пошагового алгоритма. Заметим, что предлагаемый нами операторный подход, конечно, не является единственно возможным (см., например, работу [14] и ссылки в ней).

Обозначения. Как обычно, через $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ обозначим множества вещественных, комплексных, натуральных, целых, целых неотрицательных чисел соответственно, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Множество комплексных векторов размерности $N\colon a = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ обозначим $\mathbb{C}_N$, $N \in \mathbb{N}$. Для $a \in \mathbb{C}_N$ a^* обозначает комплексно-сопряженный вектор. Множество всех комплексных матриц размера $N \times N$ обозначим через $\mathbb{C}_{N\times N}$.

Пусть $M(x)$ является непрерывной слева неубывающей матричнозначной функцией $M(x) = (m_{k,l}(x))_{k,l=0}^{N-1}$ на $[0, 2\pi]$, $M(0) = 0$, и $\tau_M(x)\colon = \sum_{k=0}^{N-1} m_{k,k}(x)$; $\Psi(x) = (dm_{k,l}/d\tau_M)_{k,l=0}^{N-1}$. Через $L^2(M)$ обозначим множество (классов эквивалентности) измеримых $\mathbb{C}_N$-значных функций f на $[0, 2\pi]$, $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, таких, что (см., например, [15, 16])

$$\|f\|^2_{L^2(M)} : = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\Psi(x) f^*(x) d\tau_M(x) < \infty.$$

Напомним, что измеримые $\mathbb{C}_N$-значные функции f, g на $[0, 2\pi]$ принадлежат одному классу эквивалентности, если $\|f - g\|_{L^2(M)} = 0$.

Множество $L^2(M)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f, g)_{L^2(M)} : = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\Psi(x) g^*(x) d\tau_M(x), \qquad f, g \in L^2(M).$$

Пусть H является гильбертовым пространством. Тогда $(\cdot,\cdot)_H$ и $\|\cdot\|_H$ обозначают скалярное произведение и норму в H соответственно. Индексы можно опускать в очевидных случаях.

Пусть A — линейный оператор в H. Обозначим через $D(A)$ его область определения, через $R(A)$ его область значений, через $\operatorname{Ker} A$ его ядро; A^* — сопряженный оператор в случае его существования. Если A обратим, A^{-1} обозначает его обратный оператор. $\overline{A}$ обозначает замыкание оператора, если оператор допускает замыкание. Если A ограничен, то $\|A\|$ — его норма.

Для произвольного множества $M \subseteq H$ обозначим через $\overline{M}$ замыкание M по норме H. Для произвольного множества элементов $\{x_n\}_{n\in I}$ в H пишем $\operatorname{Lin}\{x_n\}_{n\in I}$, подразумевая линейную оболочку элементов x_n, и $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in I} := \overline{\operatorname{Lin}\{x_n\}_{n\in I}}$. Здесь I является произвольным набором индексов. Через E_H обозначим единичный оператор в H, т. е. $E_H x = x$, $x \in H$. Если H_1 является подпространством в H, то $P_{H_1} = P^H_{H_1}$ — оператор ортогонального проектирования на H_1 в H.

2. Описание решений УМТПМ. Пусть задана УМТПМ (1) с $d \in \mathbb{N}$ и выполняется соотношение (3) с T_d, определенным формулой (2). Пусть

$$T_d = (\gamma_{n,m})^{(d+1)N-1}_{n,m=0}, \qquad S_k = (S_{k;s,l})^{N-1}_{s,l=0}, \quad -d \le k \le d,$$

где $\gamma_{n,m}, S_{k;s,l} \in \mathbb{C}$. Заметим, что

$$\gamma_{kN+s, rN+l} = S_{k-r;s,l}, \qquad 0 \le k, \quad r \le d, \quad 0 \le s, \quad l \le N-1. \tag{4}$$

Рассмотрим комплексное линейное векторное пространство $\mathfrak{H}$, элементами которого являются векторы $\vec{u} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{(d+1)N-1})$, где $u_n \in \mathbb{C}$, $0 \le n \le$ $\le (d+1)N - 1$. Операции сложения и умножения на скаляр определены как стандартные операции с числовыми векторами. Обозначим

$$\vec{\varepsilon}_n = (\delta_{n,0}, \delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \ldots, \delta_{n,(d+1)N-1}), \qquad 0 \le n \le (d+1)N-1,$$

где $\delta_{n,r}$ — символ Кронекера. Векторы $\{\vec{\varepsilon}_n\}^{(d+1)N-1}_{n=0}$ образуют базис линейного пространства $\mathfrak{H}$. В пространстве $\mathfrak{H}$ определим функционал B следующим образом:

$$B(\vec{u}, \vec{w}) = \sum_{n,r=0}^{(d+1)N-1} a_n \overline{b_r} \gamma_{n,r},$$

где

$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{(d+1)N-1} a_n \vec{\varepsilon}_n, \qquad \vec{w} = \sum_{r=0}^{(d+1)N-1} b_r \vec{\varepsilon}_r, \quad a_n, b_r \in \mathbb{C}.$$

Пространство $\mathfrak{H}$ с функционалом B образуют квазигильбертово пространство [10]. Следуя стандартной процедуре (см., например, [10, с. 24]), относим два элемента $\vec{u}$, $\vec{w}$ из $\mathfrak{H}$ к одному классу (эквивалентности), который обозначаем $[\vec{u}]$ или $[\vec{w}]$, если $B(\vec{u}-\vec{w}, \vec{u}-\vec{w}) = 0$. Если $[\vec{z}]$ $(z \in \mathfrak{H})$ — некоторый другой класс, то $[c_1\vec{u} + c_2\vec{z}] = c_1[\vec{u}] + c_2[\vec{z}]$ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Скалярное произведение для произвольных двух классов h_1, h_2 определяется так:

$$\langle h_1, h_2 \rangle = B(\vec{u}_1, \vec{u}_2),$$

где $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ — произвольные элементы классов h_1 и h_2 соответственно. Пространство классов с заданным скалярным произведением является гильбертовым пространством, поскольку оно конечномерно. Всюду в дальнейшем это пространство классов обозначим через H. Положим

$$x_n := [\vec{\varepsilon}_n], \qquad 0 \le n \le (d+1)N - 1.$$

Тогда

$$(x_n, x_m)_H = \gamma_{n,m}, \qquad 0 \le n, \quad m \le (d+1)N - 1, \tag{5}$$

и $\operatorname{span}\{x_n\}_{n=0}^{(d+1)N-1} = H$. Обозначим $H_0 := \operatorname{Lin}\{x_n\}_{n=0}^{dN-1}$. Рассмотрим следующий оператор:

$$Ax = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_{k+N}, \qquad x = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Проверим, что это определение корректно. Пусть элемент $x \in H_0$ допускает два представления:

$$x = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_k, \qquad x = \sum_{k=0}^{dN-1} \beta_k x_k, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}.$$

Используя соотношения (4), (5), получаем

$$\left\| \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_{k+N} - \sum_{k=0}^{dN-1} \beta_k x_{k+N} \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{dN-1} (\alpha_k - \beta_k) x_{k+N}, \sum_{r=0}^{dN-1} (\alpha_r - \beta_r) x_{r+N} \right) =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{dN-1} (\alpha_k - \beta_k)\overline{(\alpha_r - \beta_r)}\gamma_{k+N,r+N} = \sum_{k,r=0}^{dN-1} (\alpha_k - \beta_k)\overline{(\alpha_r - \beta_r)}\gamma_{k,r} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{dN-1} (\alpha_k - \beta_k) x_k, \sum_{r=0}^{dN-1} (\alpha_r - \beta_r) x_r \right) = (x - x, x - x) = 0.$$

Следовательно, определение A корректно и $D(A) = H_0$. Поскольку оператор A действует в конечномерном пространстве, он является замкнутым. Пусть $x, y \in H_0$, $x = \sum_{k=0}^{dN-1} \alpha_k x_k$, $y = \sum_{k=0}^{dN-1} \eta_k x_k$, $\alpha_k, \eta_k \in \mathbb{C}$. Тогда

$$(Ax, Ay) = \sum_{k,r=0}^{dN-1} \alpha_k \overline{\eta_r} (x_{k+N}, x_{r+N}) = \sum_{k,r=0}^{dN-1} \alpha_k \overline{\eta_r} \gamma_{k+N,r+N} =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{dN-1} \alpha_k \overline{\eta_r} \gamma_{k,r} = \sum_{k,r=0}^{dN-1} \alpha_k \overline{\eta_r} (x_k, x_r) = (x, y).$$

Значит, A является изометрическим оператором. Каждый изометрический оператор допускает унитарное расширение в более широком пространстве [17]. Пусть $\widetilde{U} \supseteq \supseteq A$ является унитарным расширением A в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supseteq H$. Выберем произвольное целое неотрицательное число n:

$$n = rN + l, \qquad 0 \le r \le d, \quad 0 \le l \le N - 1.$$

По индукции легко получаем соотношение

$$x_{rN+l} = A^r x_l.$$

Выберем произвольное m:

$$m = kN + s, \qquad 0 \le k \le d, \quad 0 \le s \le N - 1.$$

Используя (4), можем записать

$$S_{k-r;s,l} = \gamma_{kN+s,rN+l} = (x_m, x_n)_H = (A^k x_s, A^r x_l)_H =$$

$$= (\widetilde{U}^k x_s, \widetilde{U}^r x_l)_{\widetilde{H}} = (\widetilde{U}^{k-r} x_s, x_l)_{\widetilde{H}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(k-r)t} d(E_t x_s, x_l)_{\widetilde{H}},$$

где $\{E_t\}_{t\in[0,2\pi]}$ является непрерывным слева ортогональным разложением единицы оператора $\widetilde{U}$. Таким образом, имеем

$$S_{j;s,l} = \int_0^{2\pi} e^{ijt} d(P_H^{\widetilde{H}} E_t x_s, x_l)_H, \qquad -d \le j \le d, \quad 0 \le s, \quad l \le N - 1.$$

Положим

$$M_{\widetilde{U}}(t) = \Big((P_H^{\widetilde{H}} E_t x_s, x_l)_H \Big)_{s,l=0}^{N-1}, \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{7}$$

Тогда $M_{\widetilde{U}}(t)$ является решением проблемы моментов (1) (то, что эта функция является неубывающей, легко следует из свойств ортогонального разложения единицы).

Замечание. Для случая $d = 0$ произвольная непрерывная слева неубывающая $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция M, $M(0) = 0$, $M(2\pi) = S_0$, является решением УМТПМ (1). Поэтому мы изучаем здесь лишь случай $d \in \mathbb{N}$.

Пусть $\widehat{U} \supseteq A$ является произвольным унитарным расширением A в гильбертовом пространстве $\widehat{H} \supseteq H$, $\{\widehat{E}_t\}_{t\in[0,2\pi]}$ — непрерывным слева ортогональным разложением единицы $\widehat{U}$. Напомним [6, 7], что функция

$$\mathbf{E}_t = P_H^{\widehat{H}} \widehat{E}_t, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

называется *спектральной функцией* A (*порожденной расширением* $\widehat{U}$). Операторнозначная функция $\mathbf{R}_\zeta$, определяемая для $\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta| \neq 1$ равенством

$$\mathbf{R}_\zeta h = P_H^{\widehat{H}} (E_{\widehat{H}} - \zeta \widehat{U})^{-1} h, \qquad \zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta| \neq 1, \quad h \in H,$$

называется *обобщенной резольвентой* A (*порожденной расширением* $\widehat{U}$). Если $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{R}_\zeta$ соответствуют одному и тому же унитарному расширению A, то говорят, что они связаны. Связанные непрерывная слева спектральная функция и обобщенная резольвента A находятся в биективном соответствии:

$$(\mathbf{R}_\zeta h, g)_H = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} d(\mathbf{E}_t h, g) \qquad \forall h, g \in H. \tag{8}$$

Функция $(\mathbf{E}_t h, g)$ может быть найдена по формуле обращения [7, 18].

Как видно из изложенного выше, произвольная непрерывная слева спектральная функция изометрического оператора A (соответствующая некоторому унитарному расширению A в некотором гильбертовом пространстве, содержащем H) порождает решение проблемы моментов (1) посредством соотношения (7).

С другой стороны, пусть $\widehat{M}$ является произвольным решением проблемы моментов (1). Множество всех классов эквивалентности функций из $L^2(\widehat{M})$ (см. введение относительно определения классов эквивалентности), которые содержат многочлены вида

$$P(t) = \sum_{k=0}^{d} (\alpha_{k,0}, \alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,N-1}) e^{ikt} = \sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_{k,s} e^{ikt} \vec{e}_s, \quad \alpha_{k,s} \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

где

$$\vec{e}_s = (\delta_{0,s}, \delta_{1,s}, \ldots, \delta_{N-1,s}),$$

и $\delta_{r,s}$ обозначает символ Кронекера (или множество всех многочленов вида (9) в $L^2(\widehat{M})$), обозначаем через $L^2_{0,d}(\widehat{M})$. Выберем произвольный многочлен

$$Q(t) = \sum_{r=0}^{d} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{r,l} e^{irt} \vec{e}_l, \quad \beta_{r,l} \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Тогда

$$(P(t), Q(t))_{L^2(\widehat{M})} = \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{r,l}} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-r)t} \vec{e}_s d\widehat{M}(t) \vec{e}_l^{\,*} =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{r,l}} \vec{e}_s S_{k-r} \vec{e}_l^{\,*} = \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{r,l}} S_{k-r;s,l} =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s}\overline{\beta_{r,l}}\gamma_{kN+s,rN+l} = \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} \alpha_{k,s}\overline{\beta_{r,l}}(x_{kN+s}, x_{rN+l})_H =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_{k,s} x_{kN+s}, \sum_{r=0}^{d} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{r,l} x_{rN+l} \right)_H . \tag{11}$$

Рассмотрим оператор

$$WP(t) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} \alpha_{k,s} x_{kN+s}.$$

Покажем, что этот оператор корректно задан как оператор из $L^2_{0,d}(\widehat{M})$ в H. Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ — два многочлена вида (9) и (10) соответственно. Предположим, что они принадлежат одному и тому же классу эквивалентности в $L^2(\widehat{M})$:

$$(P(t) - Q(t), P(t) - Q(t))_{L^2(\widehat{M})} = 0.$$

Тогда

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} (\alpha_{k,s} - \beta_{k,s}) e^{ikt} \vec{e}_s, \sum_{r=0}^{d} \sum_{l=0}^{N-1} (\alpha_{r,l} - \beta_{r,l}) e^{irt} \vec{e}_l \right)_{L^2(\widehat{M})} =$$

$$= \sum_{k,r=0}^{d} \sum_{s,l=0}^{N-1} (\alpha_{k,s} - \beta_{k,s}) \overline{(\alpha_{r,l} - \beta_{r,l})} \int_0^{2\pi} e^{i(k-r)t} \vec{e}_s d\widehat{M}(t) \vec{e}_l^{\,*} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{d} \sum_{s=0}^{N-1} (\alpha_{k,s} - \beta_{k,s}) x_{kN+s}, \sum_{r=0}^{d} \sum_{l=0}^{N-1} (\alpha_{r,l} - \beta_{r,l}) x_{rN+l} \right)_H = \|WP - WQ\|_H.$$

Следовательно, оператор W определен корректно. Соотношение (11) показывает, что W является изометрическим оператором. Он отображает $L^2_{0,d}(\widehat{M})$ на H. Обозначим

$$L^2_1(\widehat{M}) := L^2(\widehat{M}) \ominus L^2_{0,d}(\widehat{M}).$$

Оператор

$$U := W \oplus E_{L^2_1(\widehat{M})}$$

является унитарным оператором, который отображает $L^2(\widehat{M}) = L^2_{0,d}(\widehat{M}) \oplus L^2_1(\widehat{M})$ на $H_1 := H \oplus L^2_1(\widehat{M})$.

Рассмотрим унитарный оператор

$$U_0 f(t) = e^{it} f(t), \qquad f(t) \in L^2(\widehat{M}).$$

Тогда

$$\widetilde{U}_0 := U U_0 U^{-1}$$

является унитарным оператором в H_1. Заметим, что

$$\widetilde{U}_0 x_{kN+s} = U U_0 e^{ikt} \vec{e}_s = U e^{i(k+1)t} \vec{e}_s = x_{(k+1)N+s} = A x_{kN+s},$$

где $0 \leq k \leq d-1,\ 0 \leq s \leq N-1$. Значит, $\widetilde{U}_0 \supseteq A$. Пусть $\{\widetilde{E}_t\}_{t\in[0,2\pi]}$ — непрерывное слева ортогональное разложение единицы $\widetilde{U}_0$ и $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{R}_\zeta$ — спектральня функция и обобщенная резольвента A, которые соответствуют унитарному расширению $\widetilde{U}_0$ соответственно. Проверим, что

$$\widehat{M}(t) = \big((\mathbf{E}_t x_s, x_l)_H\big)_{s,l=0}^{N-1}. \tag{12}$$

Действительно, можно записать

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} d(\mathbf{E}_t x_s, x_l)_H = (\mathbf{R}_\zeta x_s, x_l)_H = \Big((E_{H_1} - \zeta\widetilde{U}_0)^{-1} x_s, x_l\Big)_{H_1} =$$

$$= \Big(U(E_{L^2(\widehat{M})} - \zeta U_0)^{-1} U^{-1} x_s, x_l\Big)_{H_1} =$$

$$= \Big((E_{L^2(\widehat{M})} - \zeta U_0)^{-1} \vec{e}_s, \vec{e}_l\Big)_{L^2(\widehat{M})} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1-\zeta e^{it}} \vec{e}_s d\widehat{M}(t) \vec{e}_l^{\,*}.$$

Согласно формуле обращения заключаем, что соотношение (12) выполнено.

Следующая теорема позволяет использовать различные описания обобщенных резольвент изометрических операторов для описания решений УМТПМ (ср. [1], теорема 4.1.3).

Теорема 1. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов* (1) *с* $d \in \mathbb{N}$ *и выполнено условие* (3). *Пусть оператор* A *построен для проблемы моментов, как в* (6). *Все решения проблемы моментов имеют вид*

$$M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \qquad m_{k,j}(t) = (\mathbf{E}_t x_k, x_j)_H, \tag{13}$$

где $\mathbf{E}_t$ *является непрерывной слева спектральной функцией изометрического оператора* A (*соответствующей некоторому унитарному расширению* A, *действующему в некотором гильбертовом пространстве* $\widehat{H} \supset H$). *Наоборот, произвольная непрерывная слева спектральная функция* A (*соответствующая некоторому унитарному расширению* A, *действующему в некотором гильбертовом пространстве, содержащем* H) *порождает по формуле* (13) *решение проблемы моментов* (1).

Кроме того, соответствие между всеми непрерывными слева спектральными функциями A (*соответствующими некоторым унитарным расширениям* A, *действующим в некоторых гильбертовых пространствах, содержащих* H) *и всеми решениями проблемы моментов, устанавливаемое соотношением* (13), *взаимно однозначно.*

Доказательство. Остается показать, что различные непрерывные слева спектральные функции A (соответствующие некоторым унитарным расширениям A в гильбертовых пространствах, содержащих H) порождают различные решения проблемы моментов (1). Обозначим

$$H_\zeta := (E_H - \zeta A)D(A) = (E_H - \zeta A)H_0, \qquad \zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta| \neq 1;$$

$$L_N := \mathrm{Lin}\{x_k\}_{k=0}^{N-1}.$$

Выберем произвольный элемент $x \in H$, $x = \sum_{k=0}^{dN+N-1} \alpha_k x_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Проверим, что для произвольного $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\colon |\zeta| \neq 1$ существует представление

$$x = v + y, \qquad v \in H_\zeta, \quad y \in L_N, \tag{14}$$

в котором элементы v, y могут зависеть от выбора ζ.

Действительно, выберем произвольное $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\colon |z| \neq 1$. Положим

$$c_r := -\frac{1}{\zeta}\alpha_{r+N}, \qquad r = dN-N, dN-N+1, \ldots, dN-1.$$

Далее, полагаем

$$c_r := \frac{1}{\zeta}(c_{r+N} - \alpha_{r+N}), \qquad r = dN-N-1, \quad dN-N-2, \ldots, 0.$$

Пусть

$$u := \sum_{k=0}^{dN-1} c_k x_k \in D(A),$$

$$v := (E_H - \zeta A)u \in H_\zeta.$$

Тогда

$$v = \sum_{k=0}^{dN-1} c_k x_k - \zeta \sum_{k=0}^{dN-1} c_k x_{k+N} = \sum_{k=0}^{dN-1} c_k x_k - \zeta \sum_{k=N}^{dN+N-1} c_{k-N} x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_k + \sum_{k=N}^{dN-1} (c_k - \zeta c_{k-N}) x_k - \zeta \sum_{k=dN}^{dN+N-1} c_{k-N} x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_k + \sum_{k=N}^{dN+N-1} \alpha_k x_k = \sum_{k=0}^{N-1} (c_k - \alpha_k) x_k + x.$$

Наконец, полагаем $y\colon = -\sum_{k=0}^{N-1} (c_k - \alpha_k) x_k \in L_N$ и получаем $x = v + y$. Таким образом, соотношение (14) выполнено.

Предположим от противного, что две различные непрерывные слева спектральные функции A (соответствующие некоторым унитарным расширениям A в гильбертовых пространствах, содержащих H) порождают одно и то же решение проблемы моментов (1). Это означает, что существуют два унитарных расширения $U_j \supseteq A$ в гильбертовых пространствах $\widetilde{H}_j \supseteq H$ такие, что

$$\mathbf{E}_{1,t} = P_H^{\widetilde{H}_1} E_{1,t} \neq P_H^{\widetilde{H}_2} E_{2,t} = \mathbf{E}_{2,t}$$

и

$$\left(P_H^{\widetilde{H}_1} E_{1,t} x_k, x_j\right)_H = \left(P_H^{\widetilde{H}_2} E_{2,t} x_k, x_j\right)_H, \qquad 0 \leq k, \quad j \leq N-1, \quad t \in [0, 2\pi],$$

где $\{E_{j,t}\}_{t\in[0,2\pi]}$ — ортогональные разложения единицы операторов U_j, $j = 1, 2$. По линейности получаем

$$(P_H^{\widetilde{H}_1} E_{1,t}x, y)_H = (P_H^{\widetilde{H}_2} E_{2,t}x, y)_H, \qquad x, y \in L_N, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{15}$$

Обозначим

$$R_{j,\zeta} := (E_{\widetilde{H}_j} - \zeta U_j)^{-1}, \qquad \mathbf{R}_{j,\zeta} := P_H^{\widetilde{H}_j} R_{j,\zeta}, \qquad j = 1, 2, \quad \zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta| \neq 1.$$

Из (15), (8) следует, что

$$(\mathbf{R}_{1,\zeta}x, y)_H = (\mathbf{R}_{2,\zeta}x, y)_H, \qquad x, y \in L_N, \quad \zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta| \neq 1. \tag{16}$$

Выберем произвольное $\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta| \neq 1$. Поскольку для $j = 1, 2$ можно записать

$$R_{j,\zeta}(E_H - \zeta A)x = (E_{\widetilde{H}_j} - \zeta U_j)^{-1}(E_{\widetilde{H}_j} - \zeta U_j)x = x, \qquad x \in H_0 = D(A),$$

имеем

$$\begin{gathered} R_{1,\zeta}u = R_{2,\zeta}u \in H, \qquad u \in H_\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta| \neq 1; \\ \mathbf{R}_{1,\zeta}u = \mathbf{R}_{2,\zeta}u, \qquad u \in H_\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta| \neq 1. \end{gathered} \tag{17}$$

Предположим дополнительно, что $\zeta \neq 0$. Тогда можно записать

$$(\mathbf{R}_{j,\zeta}x, u)_H = (R_{j,\zeta}x, u)_{\widetilde{H}_j} = (x, R_{j,\zeta}^* u)_{\widetilde{H}_j} =$$
$$= (x, (E_{\widetilde{H}_j} - R_{j,1/\bar{\zeta}})u)_{\widetilde{H}_j} = (x, u)_H - (x, \mathbf{R}_{j,1/\bar{\zeta}}u)_H,$$
$$x \in L_N, \quad u \in H_{1/\bar{\zeta}}, \quad j = 1, 2.$$

Следовательно, получаем

$$(\mathbf{R}_{1,\zeta}x, u)_H = (\mathbf{R}_{2,\zeta}x, u)_H, \qquad x \in L_N, \quad u \in H_{\frac{1}{\bar{\zeta}}}, \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\colon\ |\zeta| \neq 1. \tag{18}$$

Выберем произвольное $\zeta \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |\zeta| < 1$. Посредством (14) произвольный элемент $y \in H$ может быть представлен как $y = y_{1/\bar{\zeta}} + y'$, $y_{1/\bar{\zeta}} \in H_{1/\bar{\zeta}}$, $y' \in L_N$. Используя (16) и (18), находим

$$(\mathbf{R}_{1,\zeta}x, y)_H = (\mathbf{R}_{1,\zeta}x, y_{1/\bar{\zeta}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,\zeta}x, y_{1/\bar{\zeta}} + y')_H = (\mathbf{R}_{2,z}x, y)_H,$$

где $x \in L_N$, $y \in H$. Таким образом,

$$\mathbf{R}_{1,\zeta}x = \mathbf{R}_{2,\zeta}x, \qquad x \in L_N, \quad \zeta \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |\zeta| < 1. \tag{19}$$

Выберем произвольное $\zeta \in \mathbb{C}\colon 0 < |\zeta| < 1$. Для произвольного $h \in H$, используя (14), можем записать

$$h = a + b, \qquad a \in L_N, \quad b \in H_\zeta.$$

Используя соотношения (19), (17), получаем

$$\mathbf{R}_{1,\zeta}h = \mathbf{R}_{1,\zeta}a + \mathbf{R}_{1,\zeta}b = \mathbf{R}_{2,\zeta}a + \mathbf{R}_{2,\zeta}b = \mathbf{R}_{2,\zeta}h.$$

Значит,
$$\mathbf{R}_{1,\zeta} = \mathbf{R}_{2,\zeta}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |\zeta| < 1.$$
Заметим, что $\mathbf{R}_{1,0} = E_H = \mathbf{R}_{2,0}$ и выполнена формула [7]
$$\mathbf{R}^*_{j,\zeta} = E_H - \mathbf{R}_{j,\frac{1}{\bar\zeta}}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\colon\ |\zeta| \neq 1, \quad j = 1,2.$$
Тогда
$$\mathbf{R}_{1,\zeta} = \mathbf{R}_{2,\zeta}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}\colon\ |\zeta| \neq 1.$$
По формуле обращения получаем $\mathbf{E}_{1,t} = \mathbf{E}_{2,t}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Мы воспользуемся следующим результатом.

Теорема 2 ([7], теорема 3)**.** *Произвольная обобщенная резольвента $\mathbf{R}_\zeta$ замкнутого изометрического оператора T в гильбертовом пространстве H имеет представление*
$$\mathbf{R}_\zeta = \left[E - \zeta(T \oplus \Phi_\zeta)\right]^{-1}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{20}$$
Здесь Φ_ζ является аналитической в $\mathbb{D}$ операторнозначной функцией, значения которой являются линейными сжатиями (*т. е.* $\|\Phi_\zeta\| \leq 1$), *отображающими $H \ominus D(T)$ в $H \ominus R(T)$.*

Наоборот, любая аналитическая в $\mathbb{D}$ операторнозначная функция с вышеописанными свойствами порождает согласно соотношению (20) *обобщенную резольвенту $\mathbf{R}_\zeta$ оператора T.*

Заметим, что соотношение (20) также показывает, что различные аналитические в $\mathbb{D}$ операторнозначные функции с вышеописанными свойствами порождают различные обобщенные резольвенты T.

Сравнивая две последние теоремы, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть задана усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов* (1) *и условие* (3) *выполнено. Пусть оператор A построен для проблемы моментов, как в* (6). *Все решения проблемы моментов имеют вид*
$$M(t) = (m_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \qquad t \in [0, 2\pi], \tag{21}$$
где $m_{k,j}$ получаются из соотношения
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \zeta e^{it}} dm_{k,j}(t) = (\mathbf{R}_\zeta x_k, x_j)_H, \qquad z \in \mathbb{C}:\ |z| \neq 1, \tag{22}$$
и
$$\mathbf{R}_\zeta = [E - \zeta(A \oplus \Phi_\zeta)]^{-1}, \quad \mathbf{R}_{1/\bar\zeta} = E_H - \mathbf{R}^*_\zeta, \qquad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{23}$$
Здесь Φ_ζ является аналитической в $\mathbb{D}$ операторнозначной функцией, значения которой являются линейными сжатиями, отображающими $H \ominus D(A)$ в $H \ominus R(A)$.

Наоборот, произвольная аналитическая в $\mathbb{D}$ операторнозначная функция с вышеописанными свойствами порождает посредством соотношений (21) – (23) *решение проблемы моментов* (1).

Более того, соответствие между всеми аналитическими в $\mathbb{D}$ операторнозначными функциями с вышеописанными свойствами и всеми решениями проблемы моментов (1), *устанавливаемое соотношениями* (21) – (23), *является взаимно однозначным.*

Доказательство очевидно.

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.
2. *Chen G.-N., Hu Y.-J.* On the multiple Nevanlinna – Pick matrix interpolation in the class φ_p and the Carathéodory matrix coefficient problem // Linear Algebra and Appl. – 1998. – **283**. – P. 179 – 203.
3. *Fritzsche B., Kirstein B.* The matricial Carathéodory problem in both nondegenerate and degenerate cases // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2006. – **165**. – P. 251 – 290.
4. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
5. *Чумакин М. Е.* Решения усеченной тригонометрической проблемы моментов // Учен. зап. Ульянов. пед. ин-та. – 1966. – **20**, вып. 4. – С. 311 – 355.
6. *Чумакин М. Е.* Об обобщенных резольвентах изометрического оператора // Докл. АН СССР. – 1964. – **154**, № 4. – С. 791 – 794.
7. *Чумакин М. Е.* Обобщенные резольвенты изометрических операторов // Сиб. мат. журн. – 1967. – **8**, № 4. – С. 876 – 892.
8. *Ando T.* Truncated moment problems for operators // Acta sci. math. (Szeged). – 1970. – **31**, № 4. – P. 319 – 334.
9. *Инин О. Т.* Усеченная матричная тригонометрическая проблема моментов // Изв. вузов. Математика. – 1969. – **84**, № 5. – С. 49 – 57.
10. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
11. *Zagorodnyuk S. M.* Positive definite kernels satisfying difference equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 1. – P. 83 – 100.
12. *Загороднюк С. М.* О сильной матричной проблеме моментов Гамбургера // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 471 – 482.
13. *Zagorodnyuk S. M.* A description of all solutions of the matrix Hamburger moment problem in a general case // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 3. – P. 271 – 288.
14. *Berezansky Yu. M.* Some generalizations of the classical moment problem // Integral Equat. Operator Theory. – 2002. – **44**. – P. 255 – 289.
15. *Маламуд М. М., Маламуд С. М.* Операторные меры в гильбертовом пространстве // Алгебра и анализ. – 2003. – **15**, № 3. – С. 1 – 52.
16. *Rosenberg M.* The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-negative Hermitian measure // Duke Math. J. – 1964. – **31**. – P. 291 – 298.
17. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М., Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 484 с.
18. *Ахиезер Н., Крейн М.* О некоторых вопросах теории моментов. – Харьков: ГОНТИ, 1938. – 256 с.

Получено 14.12.10,
после доработки — 12.04.11