УДК 517.5

К. В. Соліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ БІЛІНІЙНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain exact-order estimates of the best bilinear approximations of classes $S^{\,\Omega}_{p,\,\theta}B$ of periodic functions of many variables in the space L_q for some relations between parameters p, q, θ.

Получены точные по порядку оценки наилучших билинейных приближений классов $S^{\,\Omega}_{p,\,\theta}B$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p, q, θ.

Вступ. Роботу присвячено дослідженню найкращих білінійних наближень періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при деяких співвідношеннях між праметрами p, q, θ. Вона складається зі вступу та двох пунктів. У вступі наведено необхідні позначення і дано означення класів, що досліджуються. Перший пункт має допоміжний характер. В ньому, зокрема, сформульовано та доведено теорему про оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень. Отримані результати використано у другому пункті для встановлення оцінок зверху найкращих білінійних наближень функцій $2d$ змінних вигляду $f(x-y)$, $x,y\in\pi_d$, що породжуються з функцій $f(x)\in S^{\,\Omega}_{p,\,\theta}B$.

Наведемо необхідні означення та позначення.

Нехай $\mathbb{R}^{\,d}$, $d\geq 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $x=(x_1,\ldots,x_d)$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d=\prod_{j=1}^{d}[-\pi;\pi]$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1\leq p<\infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p=\infty$), функцій $f(x)=f(x_1,\ldots,x_d)$. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$||f||_p=\left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}|f(x)\,|^p dx\right)^{1/p},\quad 1\leq p<\infty,$$

$$||f||_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_d}|f(x)|.$$

Підмножину функцій $f\in L_p(\pi_d)$, для яких виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx_j=0,\quad j=\overline{1,d},$$

позначимо через $L_p^{\circ}(\pi_d)$.

Означимо простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B\subset L_p(\pi_d)$, властивості яких визначаються за допомогою мажорантної функції $\Omega(t)$, $t=(t_1,\ldots,t_d)\in\mathbb{R}^d_+$, для мішаного модуля неперервності l-го порядку ($l\in\mathbb{N}$) функції $f\in L_p(\pi_d)$, числових параметрів p і θ, $1\leq p,\theta\leq\infty$.

Отже, нехай для довільної функції $f\in L_p(\pi_d)$

$$\Omega_l(f,t)_p=\sup_{\substack{|h_j|\leq t_j\\ j=\overline{1,d}}}\|\Delta^l_h f(\cdot)\|_p$$

— мішаний модуль неперервності порядку l функції f, де $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \ldots \ldots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l(\ldots(\Delta_{h_1}^l f(x)))$, $h = (h_1, \ldots, h_d)$, — мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1, d}$, і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=o}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots x_d).$$

Нехай далі $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;

3) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leq C \left(\prod_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, $C > 0$ — деяка стала.

Множину таких функцій Ω позначимо через $\Psi_{l,d}$. У випадку $d = 1$ пишемо Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f, \cdot) \in \Psi_{l,d}$.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_{l,d}$ додатковим умовам, які опишемо у термінах двох понять, запроваджених С.Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0; \infty)$, майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \leq C_1 \varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \leq \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0; \infty)$, майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \geq C_2 \varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Нехай $d = 1$ і $\Omega \in \Psi_l^{(1,2)}$, тобто для $\Omega(t)$, $t \geq 0$, виконуються, принаймні, умови 1 і 2.

Будемо писати:

i) $\Omega \in S^\alpha$, $\alpha > 0$, якщо функція $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

ii) $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau > 0$.

Умови належності функції Ω до множин S^α і S_l часто називають у літературі умовами Барі – Стєчкіна [2].

При $d > 1$ для функції $\Omega \in \Psi_{l,d}^{(1,2)}$ будемо вважати, що $\Omega \in S^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, d}$ (відповідно $\Omega \in S_l$, $l \in \mathbb{N}$), якщо $\Omega(t_1, \ldots, t_d)$, як функція змінної t_j, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$, належить множині S^{α_j} (відповідно S_l).

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l}^d = \Psi_{l,d} \cap S^\alpha \cap S_l$.

Отже, нехай $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}^d$. Тоді

$$S_{p,\theta}^\Omega B = \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon |f|_{S_{p,\theta}^\Omega B} < \infty \right\},$$

де напівнорма $|f|_{S_{p,\theta}^\Omega B}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{S_{p,\theta}^\Omega B} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t \geq 0} \dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Визначимо норму в просторі $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ таким чином:

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} := \|f\|_p + |f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}, \quad 1 \le p, \theta \le \infty.$$

Наведене означення просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ (з незначною модифікацією) взято з роботи [3]. При $\theta = \infty$ простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ (з позначенням $S^{\Omega}_{p}H$) уведено в роботі [4].

Шкала просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ є природним узагальненням шкали просторів Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$ (див., наприклад, [5]), і $S^{\Omega}_{p,\theta}B \equiv B^r_{p,\theta}$ при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j < l$, $j = \overline{1,d}$ (зазначимо, що при $\theta = \infty$ $B^r_{p,\theta}$ — простори Нікольського H^r_p [6]).

У наступних міркуваннях ми будемо використовувати порядкові співвідношення. Запис $A \asymp B$ означає двосторонню нерівність між виразами A і B, тобто $C_3 B \le \le A \le C_4 B$, де $C_3,\ C_4 > 0$ — сталі, значення яких можуть бути різними в різних місцях. Також, якщо $A \le C_5 B$, $C_5 > 0$ та $A \ge C_6 B$, $C_6 > 0$, будемо писати $A \ll B$ і $A \gg B$ відповідно. Із контексту буде зрозуміло, від яких параметрів ці сталі не залежать. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів $\asymp$, $\ll$ і $\gg$.

Сформулюємо необхідні при доведенні одержаних у роботі результатів відомі твердження, що стосуються еквівалентного зображення норми $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}$ функцій $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$. Ці зображення подаються у термінах визначеного порядку росту p-норм деяких тригонометричних поліномів, які будуються на основі розкладу функції $f \in L_p(\pi_d)$ в ряд Фур'є за тригонометричною системою.

Отже, нехай $f \in L_p(\pi_d)$ і

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad (k,x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d,$$

де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f і для кожного вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$,

$$\rho(s) := \{k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\}.$$

В роботі [3] встановлено, що при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$ для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_s \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_s \dfrac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Як бачимо, таке зображення норми не охоплює випадки $p = 1$ і $p = \infty$. Деяка модифікація правої частини (2) дозволяє встановити подібне зображення і в цих випадках. Для цього введемо необхідні позначення.

Нехай

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(\frac{2n-k}{n} \right) \cos kt$$

— ядро Валле Пуссена порядку $2n$ і в точці $x = (x_1, \ldots, x_d)$

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \quad s = (s_1, \ldots, s_d), \quad s_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, d}. \tag{3}$$

Якщо $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, то покладемо

$$A_s(f, x) := f * A_s.$$

В роботі [7] встановлено, що при $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$ для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$ має місце співвідношення

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_s \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|A_s(f, \cdot)\|^{\theta}_p \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{4}$$

і відповідно в [4] при $\theta = \infty$

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{5}$$

У подальшому, в формулюваннях тверджень використовуються простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ у випадку, коли функція Ω має спеціальний вигляд

$$\Omega(t) = \omega \left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \quad \omega \in \Phi^1_{\alpha,l}, \ \alpha > 0. \tag{6}$$

Отже, тут $\omega(\cdot)$ — довільна функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l і $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$. Згідно з попередніми означеннями зрозуміло, що

$$\omega \in \Phi^1_{\alpha,l} \Longrightarrow \Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}, \quad \alpha = (\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{d}).$$

Зауважимо, що до множини $\Phi^1_{\alpha,l}$, $l \in \mathbb{N}$, належить, наприклад, функція

$$\omega(u) = \begin{cases} \dfrac{u^r}{\left(\log^+ \dfrac{1}{u}\right)^{\beta}}, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

де $\log^+ \tau = \max\{1, \log \tau\}$, $0 < r < l$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Далі для одиничної кулі у просторі $S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$ будемо використовувати те ж позначення, що і для самого простору $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, тобто

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B := \{f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d) \colon \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \leq 1\}.$$

1. Допоміжні твердження. Наведемо деякі допоміжні твердження, які будемо використовувати при доведенні основних результатів. Спочатку встановимо точні за порядком оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень функцій з класів $S^{\Omega}_{\infty,\theta}B$.

Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, покладемо

$$e_M(f)_q := \inf_{k^j,\ c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q, \tag{7}$$

де $\{k^j\}_{j=1}^M$ — система векторів $k^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$ з цілочисловими координатами, c_j — довільні комплексні числа. Величину (7) називають найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції f у просторі L_q. Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то позначимо

$$e_M(F)_q := \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{8}$$

Величина $e_M(f)_2$ для функції однієї змінної була введена С.Б. Стєчкіним [8] при формулюванні критерію абсолютної збіжності тригонометричних рядів. Пізніше величини $e_M(f)_q$ і $e_M(F)_q$ досліджувалися вже з точки зору апроксимації. Зокрема, поведінка величини (8) для деяких класів функцій багатьох змінних досліджувалась у роботах [9, 10], де можна ознайомитись з більш детальною бібліографією в цьому напрямі. Зазначимо також, що поведінка величин найкращих M-членних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, які розглядаються у даній роботі, вивчалась в [11 – 13].

Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, означимо величину

$$e_M^{\perp}(f)_q := \inf_{k_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} \hat{f}(k^j) e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q,$$

яка називається найкращим M-членним ортогональним тригонометричним наближенням функції f у просторі L_q. Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M^{\perp}(F)_q := \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q. \tag{9}$$

Згідно з означеннями величини (8) та (9) пов'язані співвідношенням

$$e_M(F)_q \le e_M^{\perp}(F)_q. \tag{10}$$

Теорема A (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [6, с. 65]). *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_7, C_8 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\pi_d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_7 \|f\|_p \le \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f;\cdot)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \le C_8 \|f\|_p. \tag{11}$$

З нерівностей (11) легко отримується (див., наприклад, [14, с. 17]) співвідношення

$$\|f\|_p \ll \left\{ \sum_s \|\delta_s(f;\cdot)\|_p^{p_0} \right\}^{1/p_0}, \tag{12}$$

де $p_0 = \min\{2; p\}$.

Справедливим є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}^{1}$, $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right\}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \asymp e_M^{\perp}(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \qquad (13)$$

Доведення. Оцінку зверху для $e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q$ отримаємо на підставі нерівності (10), вкладення $S_{\infty,\theta}^{\Omega}B \subset S_{p,\theta}^{\Omega}B$, $1 \le p < \infty$, та встановленої в [15] оцінки зверху для $e_M^{\perp}(S_{p,\theta}^{\Omega}B)_q$, $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$. В результаті одержимо

$$e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \le e_M^{\perp}(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \le e_M^{\perp}(S_{p,\theta}^{\Omega}B)_q \ll \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

В роботі [12] було встановлено порядкове співвідношення

$$e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}, \quad 1 < q \le 2, \quad 1 \le \theta \le \infty, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Тому, враховуючи властивість монотонності норми $\|\cdot\|_q$ по параметру $2 \le q < \infty$, маємо

$$e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \ge e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_2 \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Теорема 1 доповнює оцінки, отримані в роботах [12, 13].

2. Найкращі білінійні наближення. Означимо величину, яка буде досліджуватись в даному пункті роботи.

Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$ — множина функцій $f(x,y)$, $x, y \in \pi_d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \| \|f(\cdot,y)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ по змінній $x \in \pi_d$, а потім від результату по змінній $y \in \pi_d$ у просторі $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ означимо найкраще білінійне наближення порядку M:

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(x), v_j(y)} \left\| f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x)v_j(y) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$.

Якщо $F \subset L_q(\pi_{2d})$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \qquad (14)$$

Метою цього пункту є встановлення точних за порядком оцінок величини

$$\tau_M(S_{p,\theta}^{\Omega}B)_{q_1,q_2} = \sup_{f \in S_{p,\theta}^{\Omega}B} \tau_M(f)_{q_1,q_2},$$

де білінійні наближення $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ розглядаються для функцій вигляду $f(x-y)$, $x, y \in \pi_d$.

Зазначимо, що класичний результат про білінійні наближення належить Шмідту [17]. В дещо більш загальній, ніж в [17], формі цей результат сформульовано В. М. Темляковим в роботі [9, с. 10].

Лема А. *Нехай* $\|K(x,y)\|_{2,2} < \infty$, K — *інтегральний оператор з ядром* $K(x,y)$, K^* — *оператор, спряжений до оператора* K, *і* λ_j — *незростаюча послідовність власних чисел оператора* K^*K. *Тоді*

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)}\left\|K(x,y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right\|_{2,2}=\left(\sum_{j=M+1}^{\infty}\lambda_j\right)^{1/2}.$$

Дослідженню величини (14), де в якості F фігурують класи $\mathrm{W}^r_{p,\alpha}$ і H^r_p, присвячено праці В. М. Темлякова [9, 18 – 20], в яких можна знайти відповідну бібліографію. Що стосується білінійних наближень класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$, то вони досліджувались у роботах А. С. Романюка, В. С. Романюка [16] і А. С. Романюка [21].

Отримані результати будемо коментувати, співставляючи їх з оцінками колмогоровських поперечників.

Нагадаємо, що M-вимірним колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини Φ банахового простору $\mathcal{X}$ називається величина

$$d_M(\Phi,\mathcal{X}):=\inf_{\mathcal{L}_M}\sup_{f\in\Phi}\inf_{u\in\mathcal{L}_M}\|f-u\|_{\mathcal{X}}, \tag{15}$$

де $\mathcal{L}_M$ — довільний підпростір в $\mathcal{X}$ розмірності M.

Нехай F — деякий клас функцій і $f(x)$ — фіксована функція з F. Позначимо через F_f множину, що складається з функцій вигляду $f(x-y)$, які отримуємо з $f(x)$ зсувами її аргументу x на довільний вектор $y\in\pi_d$. Тоді має місце рівність (див., наприклад, [9, с. 85])

$$\tau_M(f(x-y))_{q_1,\infty}=d_M(F_f,L_{q_1}). \tag{16}$$

Таким чином, якщо функціональний клас F інваріантний відносно зсуву аргументу функції $f\in F$, то згідно з (16) значення величини $\tau_M(f(x-y))_{q_1,\infty}$ можуть бути оцінками знизу для колмогоровських поперечників $d_M(F_f,L_{q_1})$.

Справедливим є наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $2\le q_1\le\infty$, $1\le q_2,\theta\le\infty$ *і* $\Omega(t)=\omega\left(\prod_{j=1}^{d}t_j\right)$, *де* $\omega\in\Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha>\max\left\{0,\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1}{2}\right\}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M=(M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M\asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,q_2}\asymp\omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{17}$$

Доведення. Оцінки зверху в (17) можна легко отримати як наслідок результатів теореми 1.

З одного боку, згідно з оцінкою

$$e_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)},\ M \asymp 2^n n^{d-1},$$

для довільної функції f з класу $S^{\Omega}_{\infty,\theta}B$ знайдеться множина векторів $k^1,\ldots,k^M$, $k^j=(k^j_1,\ldots,k^j_d)$, $k^j\in\mathbb{Z}^d$, $j=\overline{1,M}$, і чисел $c_1,\ldots,c_M$ таких, що

$$\left\| f(x)-\sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)}\right\|_{q_1} \ll \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{18}$$

З іншого боку, ліву частину (18) можна подати у вигляді

$$\left\| f(x)-\sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)}\right\|_{q_1} = \left\| f(x-y)-\sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x-y)}\right\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \left\| f(x-y)-\sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)}e^{-i(k^j,y)}\right\|_{q_1,\infty}. \tag{19}$$

З (18) і (19) одержимо

$$\left\| f(x-y)-\sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)}e^{-i(k^j,y)}\right\|_{q_1,\infty} \ll \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{20}$$

Тепер, поклавши в (20) $c_j e^{i(k^j,x)}=u_j(x)$ і $e^{-i(k^j,y)}=v_j(y)$, отримаємо шукану оцінку зверху величини $\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,\infty}$ і, як наслідок, величини $\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,q_2}$.

Перейдемо до встановлення в (17) оцінки знизу.

Нехай M — довільне натуральне число, а $n\in\mathbb{N}$ підберемо таким чином, щоб для кількості елементів множини $Q_n=\bigcup_{\|s\|_1=n}\rho(s)$ виконувалось співвідношення $|Q_n|>4M$. Зауважимо також, що $|Q_n|\asymp 2^n n^{d-1}$.

Розглянемо функції

$$f_1(x)=C_9\omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta}\sum_{\|s\|_1=n}\prod_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j),\quad C_9>0,$$

при $1\le\theta<\infty$ і

$$f_2(x)=C_{10}\omega(2^{-n})2^{-n/2}\sum_{\|s\|_1=n}\prod_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j),\quad C_{10}>0,\quad \theta=\infty,$$

де $R_{s_j}(x_j)=\sum_{l=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1}\varepsilon_l e^{ilx}$, $\varepsilon_l=\pm1$, $j=\overline{1,d}$, — поліноми Рудіна – Шапіро, для яких, як відомо, виконується порядкова нерівність $\|R_{s_j}\|_\infty \ll 2^{s_j/2}$ (див., наприклад, [22, с. 155]).

Покладемо

$$F_n(x)=\sum_{\|s\|_1=n}\prod_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j).$$

Покажемо, що при деякому значенні сталої C_9 функція f_1 належить класу $S^{\Omega}_{\infty,\theta}B$, $1\le\theta<\infty$, а функція f_2 з деякою сталою C_{10} — класу $S^{\Omega}_{\infty,\infty}B$. Для цього спочатку знайдемо норму функції F_n у відповідних просторах. При $1\le\theta<\infty$ маємо

$$\|F_n\|_{S^{\Omega}_{\infty,\theta}B}\asymp\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(F_n,x)\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta}=$$

$$=\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left\|A_s(x)*\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\delta_{s'}(F_n,x)\right\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta}\le$$

$$\le\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s\|_1^\theta\left\|\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\delta_{s'}(F_n,x)\right\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta}.$$

Враховуючи, що $\|A_s\|_1\le6$ (див., наприклад, [14, с. 35]), продовжимо оцінку:

$$\|F_n\|_{S^{\Omega}_{\infty,\theta}B}\ll\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left\|\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\delta_{s'}(F_n,x)\right\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta}\le$$

$$\le\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left(\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\|\delta_{s'}(F_n,x)\|_\infty\right)^\theta\right)^{1/\theta}=$$

$$=\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left(\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\left\|\prod_{j=1}^dR_{s'_j}(x_j)\right\|_\infty\right)^\theta\right)^{1/\theta}\ll$$

$$\ll\left(\sum_{\|s\|_1\le n+d}\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left(\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}2^{\frac{\|s'\|_1}{2}}\right)^\theta\right)^{1/\theta}\ll$$

$$\ll\left(\sum_{\|s\|_1\le n+d}\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})2^{\frac{\|s\|_1\theta}{2}}\right)^{1/\theta}=$$

$$=\left(\sum_{\|s\|_1\le n+d}\frac{\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})}{2^{\alpha\theta\|s\|_1}}2^{\frac{\|s\|_1\theta}{2}}2^{\alpha\theta\|s\|_1}\right)^{1/\theta}\ll$$

$$\ll\frac{\omega^{-1}(2^{-(n+d)})}{2^{\alpha(n+d)}}\left(\sum_{\|s\|_1\le n+d}2^{\|s\|_1\theta(1/2+\alpha)}\right)^{1/\theta}\asymp$$

$$\asymp\frac{\omega^{-1}(2^{-(n+d)})}{2^{\alpha(n+d)}}2^{(n+d)(1/2+\alpha)}(n+d)^{(d-1)/\theta}\asymp\omega^{-1}(2^{-n})2^{n/2}n^{(d-1)/\theta}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то

$$\|F_n\|_{S^{\Omega}_{\infty,\infty}B} \ll \omega^{-1}(2^{-n})2^{n/2}.$$

Цим самим показано, що функції f_1 і f_2 при певних значеннях сталих C_9 і C_{10} належать до класів $S^{\Omega}_{\infty,\theta}B$, $1 \le \theta < \infty$, та $S^{\Omega}_{\infty,\infty}B$ відповідно.

Далі ми будемо використовувати допоміжне твердження.

Лема Б [9, с. 98]. *Нехай задано число M, а число $n \in \mathbb{N}$ таке, що для кількості елементів множини $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1=n} \rho(s)$ виконується умова $|Q_n| > 4M$. Тоді для довільної функції*

$$g(x) = \sum_{k \in Q_n} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}$$

такої, що $|\widehat{g}(k)| = 1$, виконується співвідношення

$$\inf_{u_j(x),\ \upsilon_j(y)} \left\| g(x-y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x)\ \upsilon_j(y) \right\|_{2,1} \gg M^{1/2}.$$

Оскільки функція F_n задовольняє умови леми Б, то для $\tau_M(f_1(x-y))_{2,1}$ маємо

$$\tau_M(f_1(x-y))_{2,1} \gg \omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta}\tau_M(F_n(x-y))_{2,1} \gg$$

$$\gg M^{1/2}\omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Провівши подібні міркування для функції f_2, отримаємо

$$\tau_M(f_2(x-y))_{2,1} \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)/2}.$$

Оцінку знизу і теорему доведено.

***Зауваження* 2.** При $\omega(u) = u^r$, тобто $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$, і певних обмеженнях на параметр r з теорем 1 і 2 можна отримати відповідні результати для класів $B^r_{\infty,\theta}$, які встановлено в роботі [16].

***Зауваження* 3.** Співставивши теорему 2 з оцінкою колмогоровського поперечника $d_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B, L_{q_1})$ [23], бачимо, що справджуються порядкові рівності

$$\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B, L_{q_1})$$

при $2 \le \theta < \infty$ та

$$\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B, L_{q_1})(\log^{d-1} M)^{(1/2-1/\theta)}$$

при $1 \le \theta < 2$.

Теорема 3. *Нехай $1 \le p \le 2 \le q_1 < \infty, 1 \le q_2, \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, де $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p}$, $l > \left[\dfrac{1}{p}\right]$. Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{21}$$

Доведення. Оцінки зверху отримаємо, як і в попередній теоремі, використавши оцінки величини $e_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)$, знайдені у роботах [12, 13].

Далі покажемо, що при $1 \le p \le 2$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$ і $1 \le \theta \le \infty$ виконується порядкова нерівність

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{2,1} \gg \omega(2^{-n})2^{n(1/p-1/2)}n^{(d-1)(1/2-1/\theta)},\ M \asymp 2^n n^{d-1}, \qquad (22)$$

з якої буде випливати оцінка знизу в (21).

Розглянемо випадок $p = 1$. За даним M підберемо натуральне n таким чином, щоб для кількості елементів множини $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1=n} \rho(s)$ виконувались співвідношення $|Q_n| > 2M$, $|Q_n| \asymp M$.

Розглянемо функції

$$g_1(x) = C_{11}n^{-(d-1)/\theta} \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_{11} > 0, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

та

$$g_2(x) = C_{12} \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}, \quad C_{12} > 0, \quad \theta = \infty,$$

де $\rho^+(s) = \left\{k\colon k = (k_1, \ldots, k_d),\ 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\right\}$.

При відповідному виборі сталих C_{11} та C_{12} функція g_1 належить класу $S^{\Omega}_{1,\theta}B$, $1 \le \theta < \infty$, а g_2 — класу $S^{\Omega}_{1,\infty}B$. Дійсно,

$$\|g_1\|_{S^{\Omega}_{1,\theta}B} \asymp \left(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(g_1,x)\|_1^{\theta} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \omega^{\theta}(2^{-\|s\|_1}) \right)^{1/\theta} =$$

$$= n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} 1 \right)^{1/\theta} \asymp n^{-(d-1)/\theta} n^{(d-1)/\theta} = 1,$$

$$\|g_2\|_{S^{\Omega}_{1,\infty}B} \asymp \sup_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \frac{\|A_s(g_2,x)\|_1}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll \sup_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = 1.$$

Використовуючи функцію g (тут для зручності функцію будемо позначати g, маючи на увазі g_1 при $1 \le \theta < \infty$ та g_2 у випадку $\theta = \infty$) в якості ядра, розглянемо інтегральний оператор $G\colon L_2 \longrightarrow L_2$:

$$(Gf)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} g(x-y) f(y) dy.$$

Нехай G^* — спряжений до G оператор, а λ_j — власні числа оператора G^*G, які розташовані в порядку незростання. Оскільки числа λ_j збігаються з числами $bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\omega^2(2^{-\|s\|_1})$, $b > 0$ (відповідно з числами $b\omega^2(2^{-\|s\|_1})$ при $\theta = \infty$), то за лемою A отримаємо

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \|g_1(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y)\|_{2,2} = \left(\sum_{j\geq M+1} \lambda_j\right)^{1/2} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\|s\|_1\geq n+1} n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \omega^2(2^{-\|s\|_1})\right)^{1/2} \gg$$

$$\gg n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1\geq n+1} \omega^2(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k\in\rho^+(s)} 1\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1\geq n+1} \omega^2(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1}\right)^{1/2} =$$

$$= n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1\geq n+1} \frac{\omega^2(2^{-\|s\|_1})}{2^{-2\alpha\|s\|_1}} 2^{(1-2\alpha)\|s\|_1}\right)^{1/2} \gg$$

$$\gg n^{-(d-1)/\theta} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{\|s\|_1\geq n+1} 2^{(1-2\alpha)\|s\|_1}\right)^{1/2} \gg$$

$$\gg n^{-(d-1)/\theta} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{(1-2\alpha)n/2} n^{(d-1)/2} =$$

$$= \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} 2^{n/2}. \tag{23}$$

Аналогічно у випадку $\theta = \infty$

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \left\| g_2(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,2} \gg \omega(2^{-n}) 2^{n/2} n^{(d-1)/2}.$$

Далі, нехай задано деякі системи функцій $\{u_j(x)\}_{j=1}^M \in L_2(\pi_d)$ і $\{v_j(y)\}_{j=1}^M \in \in L_1(\pi_d)$. Не обмежуючи загальності можемо вважати функції $v_j(y)$, $j = \overline{1, M}$, неперервними. Позначимо через $u_g(x, y)$ ортогональну проекцію функції $g(x-y)$ при фіксованому y на підпростір $U = \mathfrak{L}(\{u_j(x)\}_{j=1}^M)$ — лінійну оболонку функцій $u_j(x)$, $j = \overline{1, M}$. Покладемо

$$r(x, y) = g(x-y) - u_g(x, y).$$

Оскільки функція $u_g(x, y)$ має вигляд

$$u_g(x, y) = \sum_{j=1}^{M} u_j(x) \varphi_j(y), \tag{24}$$

то для довільного $y \in \pi_d$ матимемо

$$\left\| g(\cdot - y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\cdot) v_j(y) \right\|_2 \geq \|r(\cdot, y)\|_2, \tag{25}$$

$$\|r(\cdot, y)\|_2 \leq \|g(\cdot - y)\|_2. \tag{26}$$

Для функції $r(x,y)$ виконується нерівність

$$\|r(x,y)\|_{2,2}^2 \leq \|r(x,y)\|_{2,1} \|r(x,y)\|_{2,\infty}. \tag{27}$$

З одного боку, враховуючи (24), аналогічно до (23), отримуємо

$$\|r(x,y)\|_{2,2} = \|g(x-y) - u_g(x,y)\|_{2,2} \gg \omega(2^{-n}) 2^{n/2} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}, \tag{28}$$

а з іншого — можемо оцінити $\|r(x,y)\|_{2,\infty}$ зверху. З нерівності (26) випливає, що

$$\|r(x,y)\|_{2,\infty} \leq \|g\|_2. \tag{29}$$

Оцінимо $\|g\|_2$. Покладаючи $g = g_1$, знаходимо

$$\|g_1\|_2 = \left\| C_{11} n^{-(d-1)/\theta} \sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)} \right\|_2 \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \left\| \sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)} \right\|_2 \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega^2(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} 1 \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega^2(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1} \right)^{1/2} =$$

$$= n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \frac{\omega^2(2^{-\|s\|_1})}{2^{-2\alpha\|s\|_1}} 2^{(1-2\alpha)\|s\|_1} \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} 2^{(1-2\alpha)\|s\|_1} \right)^{1/2} =$$

$$= n^{-(d-1)/\theta} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{j=n}^{n+d} \sum_{\|s\|_1 = j} 2^{(1-2\alpha)\|s\|_1} \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{j=n}^{n+d} 2^{(1-2\alpha)j} j^{d-1} \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{(1-2\alpha)n/2} n^{(d-1)/2} = \omega(2^{-n}) 2^{n/2} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Якщо покласти $g = g_2$, то

$$\|g_2\|_2 = \left\| C_{12} \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)} \right\|_2 \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n/2} n^{(d-1)/2}.$$

Із оцінок $\|g_1\|_2$ і $\|g_2\|_2$ на підставі нерівності (29) для довільного $1 \le \theta \le \infty$ отримуємо

$$\|r(x,y)\|_{2,\infty} \le \|g\|_2 \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n/2} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{30}$$

З (27) – (30) випливає нерівність

$$\|r(x,y)\|_{2,1} \gg \omega(2^{-n}) 2^{n/2} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Тепер скористаємось нерівністю (25) і отримаємо необхідну оцінку при $p = 1$.

Розглянемо випадок $1 < p \le 2$. Знову ж за заданим M підберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб для $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 = n} \rho(s)\colon |Q_n| > 4M$, $|Q_n| \asymp M$. Розглянемо функції

$$f_3(x) = C_{13} \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} d_n(x), \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$f_4(x) = C_{14} \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} d_n(x), \quad \theta = \infty,$$

де $d_n(x) = \sum_{k \in Q_n} e^{i(k,x)}$, C_{13}, C_{14} — додатні сталі.

Оскільки

$$\left\| \sum_{k_j = 2^{s_j - 1}}^{2^{s_j} - 1} e^{ik_j x_j} \right\|_p \asymp 2^{s_j(1-1/p)}, \quad j = \overline{1,d},$$

то

$$\|\delta_s(d_n, x)\|_p = \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \right\|_p = \prod_{j=1}^d \left\| \sum_{k = 2^{s_j - 1}}^{2^{s_j} - 1} e^{ik_j x_j} \right\|_p \asymp$$

$$\asymp \prod_{j=1}^d 2^{s_j(1-1/p)} = 2^{\|s\|_1 (1-1/p)}.$$

Згідно з (2) при $1 \le \theta < \infty$ маємо

$$\|f_3\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{\|s\|_1 = n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|\delta_s(f,x)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1 = n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|\delta_s(d_n,x)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \left(\omega^{-\theta}(2^{-n}) \sum_{\|s\|_1 = n} \|\delta_s(d_n,x)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1 = n} 2^{\theta \|s\|_1 (1-1/p)} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(1-1/p)} 2^{n(1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1 = n} 1 \right)^{1/\theta} \ll 1.$$

При $\theta = \infty$

$$\|f_4\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{\|s\|_1 = n} \frac{\|\delta_s(f,x)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} \sup_{\|s\|_1 = n} \frac{\|\delta_s(d_n,x)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} \sup_{\|s\|_1 = n} \frac{2^{\|s\|_1 (1-1/p)}}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} \omega^{-1}(2^{-n}) 2^{n(1-1/p)} = 1.$$

Таким чином, функції f_3 та f_4 належать відповідно до класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \le \theta < \infty$, та $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ при деяких значеннях сталих $C_{13}, C_{14} > 0$. Оскільки функція d_n задовольняє умови леми Б, то для функцій f_3, f_4 матимемо

$$\tau_M(f_3)_{2,1} \gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} M^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} 2^{n/2} n^{(d-1)/2} =$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)},$$

$$\tau_M(f_4)_{2,1} \gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-1/p)} M^{1/2} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)} n^{(d-1)/2}.$$

Оцінку знизу і теорему доведено.

***Зауваження* 4.** Співставивши теорему 3 з оцінкою колмогоровського поперечника $d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$ [3], приходимо до висновку, що мають місце порядкові рівності

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$$

при $2 \le \theta < \infty$ та

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1}) (\log^{d-1} M)^{(1/2-1/\theta)}$$

при $1 \le \theta < 2$.

Теорема 4. *Нехай $2 \le p < q_1 < \infty$, $1 \le q_2, \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, де $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, справджується оцінка*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Доведення. Оцінку зверху отримаємо, як і в попередніх теоремах, з оцінки величини $e_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p$, $2 \le p < q_1 < \infty$ [13].

Тепер перейдемо до встановлення оцінок знизу. За даним M підберемо n так, щоб виконувались співвідношення: а) $M \asymp 2^n n^{d-1}$; б) $2^n n^{d-1} > 4M$.

Розглянемо функції

$$f_5(x) = C_{15}\omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta} \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j), \quad C_{15} > 0, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$f_6(x) = C_{16}\omega(2^{-n})2^{-n/2} \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j), \quad C_{16} > 0, \quad \theta = \infty,$$

де $R_{s_j}(x_j) = \sum_{l=2^{s_j-1}}^{2^{s^j}-1} \varepsilon_l e^{ilx_j}$, $\varepsilon_l = \pm 1$, $j = \overline{1,d}$, — поліноми Рудіна – Шапіро, для яких, як зазначалось вище, $\|R_{s_j}\|_\infty \ll 2^{s_j/2}$.

Покажемо, що при деякому виборі додатних сталих C_{15}, C_{16} ці функції належать класам $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \le \theta < \infty$, та $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ відповідно. Оскільки

$$\delta_s(f_5, x) = C_{15}\omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),$$

$$\delta_s(f_6, x) = C_{16}\omega(2^{-n})2^{-n/2} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),$$

то при $1 \le \theta < \infty$ матимемо

$$\|f_5\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|\delta_s(f_5, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1=n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \left\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j) \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1=n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) 2^{\frac{\|s\|_1 \cdot \theta}{2}} \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta}\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})2^{n/2} \left(\sum_{\|s\|_1=n} 1 \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll n^{-(d-1)/\theta}n^{(d-1)/\theta} = 1.$$

Відповідно при $\theta = \infty$

$$\|f_6\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f_6, x)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp \omega(2^{-n})2^{-n/2} \sup_{\|s\|_1=n} \frac{\left\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j) \right\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} <$$

$$< \omega(2^{-n})2^{-n/2} \sup_{\|s\|_1=n} \frac{\left\|\prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j)\right\|_\infty}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll \omega(2^{-n})2^{-n/2} \sup_{\|s\|_1=n} \frac{2^{\frac{\|s\|_1}{2}}}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = 1.$$

Тепер, врахувавши, що функція

$$\upsilon(x) = \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j)$$

задовольняє умови леми Б, отримаємо

$$\tau_M(f_5)_{2,1} \gg M^{1/2}\omega(2^{-n})2^{-n/2}n^{-(d-1)/\theta} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)},$$

$$\tau_M(f_6)_{2,1} \gg M^{1/2}\omega(2^{-n})2^{-n/2} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)/2}.$$

Теорему доведено.

***Зауваження* 5.** Співставляючи оцінку колмогоровського поперечника $d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$ [3] з теоремою 4, бачимо, що при $2 \leq \theta < \infty$

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$$

і

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})(\log^{d-1} M)^{(1/2-1/\theta)}$$

при $1 \leq \theta < 2$.

Теорема 5. *Нехай* $2 \leq q_1 \leq p < \infty$, $1 \leq q_2, \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha > \max\left\{0; \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}\right\}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з оцінки величини $e^{\perp}_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q$, $1 < q_1 \leq p < \infty$, $p \geq 2$, встановленої в [15]. Оцінку знизу отримуємо, як і в теоремі 4.

***Зауваження* 6.** Співставляючи оцінку колмогоровського поперечника $d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$ [24] з теоремою 5, бачимо, що при $\theta \geq 2$

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$$

і

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})(\log^{d-1} M)^{(1/2-1/\theta)}$$

при $1 \leq \theta < 2$.

***Зауваження* 7.** У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$ і певних обмеженнях на параметр r з теорем 3 – 5 отримуємо відповідні результати для класів $B^r_{p,\theta}$, які встановлені в роботі [21].

1. *Бернштейн С. Н.* Конструктивная теория функций (1931 – 1953): Собр. соч. – М.: Изд. АН СССР, 1954. – Т. 2. – 626 с.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
4. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. math. – 1994. – **20**, № 1. – P. 35 – 48.
5. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
7. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 692 – 704.
8. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
9. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
10. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
11. *Стасюк С. А.* Приближение функций многих переменных классов H^{Ω}_{p} полиномами по системе Хаара // Anal. math. – 2009. – **35**. – P. 257 – 271.
12. *Конограй А.Ф., Стасюк С. А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 9. – С. 1196 – 1214.
13. *Стасюк С. А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 381 – 394.
14. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 419 p.
15. *Стасюк С. А.* Найкращі M-членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 647 – 656.
16. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 536 – 551.
17. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. – 1907. – **63**. – S. 433 – 476.
18. *Темляков В. М.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1991. – **194**. – С. 229 – 248.
19. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 243 – 252.
20. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. – 1987. – **176**, №1. – С. 16 – 33.
21. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, №2. – С. 69 – 98.
22. *Кашин С. Б., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
23. *Конограй А. Ф.* Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Мат. студ. – 2008. – **29**, № 2. – С. 192 – 206.
24. *Стасюк С .А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1557 – 1568.

Одержано 01.03.11