УДК 512.552.12

І. С. Васюник, Б. В. Забавський (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

КІЛЬЦЯ МАЙЖЕ ОДИНИЧНОГО СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

We introduce the notion of a ring of almost unit stable rank 1 as generalization of a ring of unit stable rank 1. We prove that the ring of almost unit stable rank 1 with the nonzero Jacobson radical is a ring of unit stable rank 1 and is also a 2-good ring. We introduce the notion of an almost 2-good ring. We show that an adequate domain is an almost 2-good ring.

Введено понятие кольца почти единичного стабильного ранга 1, как обобщение кольца единичного стабильного ранга 1. Доказано, что кольцо почти единичного стабильного ранга 1 с ненулевым радикалом Джекобсона является кольцом единичного стабильного ранга 1, а также 2-хорошим кольцом. Введено понятие почти 2-хорошего кольца. Показано, что адекватная область является почти 2-хорошим кольцом.

Стабільний ранг є одним з основних інваріантів К-теорії. Це поняття, введене Х. Басом [1], активно використовується в теорії кілець, зокрема в задачах діагональної редукції матриць [2, 3]. Водночас одержано ряд узагальнень поняття стабільного рангу. Зокрема, таким є поняття одиничного стабільного рангу [2]. Саме воно є надзвичайно актуальним в алгебраїчній К-теорії. Зокрема, показано, що $K_1(R) \cong U(R)/V(R)$ [4]. По аналогії з дослідженнями [5], у даній роботі вводиться поняття майже одиничного стабільного рангу 1, а також майже 2-доброго кільця. Встановлено існування таких кілець та їх зв'язок з різними класами кілець, зокрема адекватними кільцями.

Далі під кільцем R розумітимемо комутативне кільце з ненульовою одиницею. Через $J(R)$ позначимо радикал Джекобсона, а через $U(R)$ — групу одиниць кільця.

Елемент a кільця R назвемо адекватним, якщо для довільного елемента b з кільця R елемент a можна подати у вигляді $a = r \cdot s$, де $rR + bR = R$ і для довільного необоротного дільника s' елемента s маємо $s'R + bR \neq R$. Очевидним прикладом адекватних елементів є оборотні елементи кільця R [7].

Нагадаємо, що якщо в кільці довільний скінченнопороджений ідеал є головним, то таке кільце називається кільцем Безу. Комутативне кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є адекватним, називається адекватним кільцем [7, 9]. Очевидним прикладом адекватного кільця є комутативні області головних ідеалів. Кільце R називається чистим, якщо для довільного елемента x кільця R існують оборотний елемент $u \in R$ та ідемпотент $e \in R$ такі, що $x = u + e$ [9]. Кільце R назвемо кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент e, що $e \in aR$ і $1 - e \in (1 - a)R$ [5].

Означення 1. *Будемо говорити, що кільце R є кільцем ідемпотентного стабільного рангу* 1, *якщо з умови $aR + bR = R$ для довільних елементів $a, b \in R$ випливає існування ідемпотента $e \in R$ такого, що $a + be \in U(R)$* [9].

Має місце наступний результат.

Теорема 1 [8, 9]. *Для комутативного кільця R наступні умови еквівалентні*:

1) R — *чисте кільце*;

2) R — *кільце з властивістю заміни*;

3) R — *кільце ідемпотентного стабільного рангу* 1.

Означення 2 [4]. *Будемо говорити, що кільце R є кільцем одиничного стабільного рангу* 1, *якщо з умови $aR + bR = R$ для довільних елементів $a, b \in R$ випливає існування оборотного елемента $u \in R$ такого, що $a + bu \in U(R)$.*

Означення 3 [11]. *Будемо говорити, що кільце R є 2-добрим кільцем, якщо довільний елемент з R є сумою двох оборотних елементів.*

Спочатку доведемо результат, який стосується комутативних областей Безу.

Твердження 1. *Нехай R — комутативна область Безу, a — ненульовий і необоротний елемент з R, b — елемент з кільця R такий, що $aR + bR = R$. Тоді образ елемента b при канонічному вкладенні $R \to R\diagup aR$ є оборотним елементом. Якщо ж $aR+bR \neq R$, то образ елемента b при канонічному вкладенні $R \to R\diagup aR$ є дільником нуля. Більш того, $Q(R\diagup aR) = R\diagup aR$, де $Q(R\diagup aR)$ — кільце часток фактор-кільця $R\diagup aR$.*

Доведення. Дійсно, якщо $aR + bR = R$, то існують елементи $u, v \in R$ такі, що $au + bv = 1$. Звідси $\overline{b} \cdot \overline{v} = \overline{1}$, де $\overline{b}$ і $\overline{v}$ — гомоморфні образи елементів b і v при канонічному вкладенні $R \to R\diagup aR$. Зауважимо, що якщо $\overline{b} \cdot \overline{v} = \overline{1}$ в $R\diagup aR$, то очевидно, що $aR+bR = R$, де b — прообраз елемента $\overline{b} \in R\diagup aR$ при канонічному вкладенні $R \to R\diagup aR$.

Якщо ж $aR + bR = dR \neq R$, то існують елементи $u, v, a_0, b_0 \in R$ такі, що $au + bv = d, a = da_0, b = db_0$. Звідси $\overline{b} \cdot \overline{a_0} = \overline{0}$, причому $\overline{a_0} \neq \overline{0}$. Той факт, що $Q(R\diagup aR) = R\diagup aR$, є очевидним наслідком попередніх міркувань.

Твердження доведено.

Теорема 2. *Нехай R — комутативна область Безу і a — адекватний елемент з області R такий, що $2R + aR = R$. Тоді фактор-кільце $R\diagup aR$ є 2-добрим кільцем.*

Доведення. Спочатку покажемо, що $R\diagup aR$ — чисте кільце. Згідно з теоремою 1, для цього достатньо показати, що $R\diagup aR$ — кільце ідемпотентного стабільного рангу 1. Позначимо $\overline{R} = R\diagup aR$. Нехай $\overline{bR} + \overline{cR} = \overline{R}$ для довільних елементів $\overline{b}, \overline{c} \in \overline{R}$. Тоді $aR + bR + cR = R$, де b, c — прообрази елементів $\overline{b}, \overline{c} \in \overline{R}$ при канонічному вкладенні $R \to R\diagup aR$. Оскільки a — адекватний елемент області R, то існують елементи $r, s \in R$ такі, що $a = r \cdot s$, де $rR+bR = R$ та $s'R+bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s. Далі, оскільки $rR + sR = R$, то існують елементи $u, v \in R$ такі, що $ru + sv = 1$. Розглянемо рівність $(ru)^2 - ru = = ru(ru - 1) = ru(-sv) = -rsuv = a(-uv) \in aR$. Тобто образ елемента ru при канонічному вкладенні $R \to \overline{R}$ є ідемпотентом.

Доведемо, що $aR+(b+cru)R = R$. Нехай $aR+(b+cru)R = hR \neq R$. Оскільки $h|a$, то $hR + rR = tR \neq R$, або $hR + sR = \alpha R \neq R$. Нехай $hR + rR = tR \neq R$. Оскільки $h|(b + cru)$, то $h|b$, що неможливо, тому що виконується $rR + bR = R$. Якщо ж $hR + sR = \alpha R \neq R$, то, згідно з означенням адекватності елемента a $\alpha R + bR = kR \neq R$, а отже, $k|cru$. Оскільки $sv + ru = 1$ і $kR \subset sR$, то $k|c$, що неможливо, тому що $aR + bR + cR = R$. Отже, $aR + (b + cur)R = R$, тобто $\overline{R}$ є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, а отже, $\overline{R}$ — чисте кільце. Оскільки $2R + aR = R$, то згідно з твердженням 1 $\overline{2}$ — оборотний елемент в $\overline{R}$, а згідно з [10] $\overline{R}$ — 2-добре кільце.

Означення 4. *Будемо говорити, що елемент кільця R є елементом майже одиничного стабільного рангу* 1, *якщо фактор-кільце $R\diagup aR$ є кільцем одиничного стабільного рангу* 1.

Спочатку наведемо еквівалентне означення елемента майже одиничного стабільного рангу 1.

Твердження 2. *Нехай a — елемент майже одиничного стабільного рангу* 1. *Якщо $aR + bR + cR = R$, то існує елемент $y \in R$ такий, що $aR + (b + cy)R = R$ і $yR + aR = R$.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$. Для довільного $x \in R$ позначимо $\overline{x} = x + aR$. Оскільки $\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$, то існує $y \in R$ такий, що $(\overline{b + cy})\,\overline{R} = \overline{R}$ і $\overline{y} \in U(\overline{R})$. Оскільки $\overline{R} = R/aR$, то з умови $\overline{y} \in U(\overline{R})$ випливає $yR + aR = R$. Покажемо, що $aR + (b + cy)R = R$. Справді, якщо це не так, то існує максимальний ідеал M кільця R, для якого $aR + (b + cy)R \subset M$. А це неможливо, оскільки $M \diagup aR$ є максимальним ідеалом в $\overline{R}$, а $(\overline{b + cy})\,\overline{R} = \overline{R}$. Отже, $aR + (b + cy)R = R$ і $yR + aR = R$.

Твердження доведено.

Твердження 3. *Нехай a — елемент кільця R такий, що для довільних елементів $b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$, існує елемент $y \in R$ такий, що $aR + (b + cy)R = R$ і $yR + aR = R$. Тоді елемент a є елементом майже одиничного стабільного рангу* 1.

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$ і $\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$. Очевидно, що $aR + bR + cR = R$. Згідно з обмеженнями, накладеними на елемент a, існує елемент $y \in R$ такий, що $(\overline{b + cy})\overline{R} = \overline{R}$ і $\overline{y} \in U(\overline{R})$, тобто елемент є елементом майже одиничного стабільного рангу 1.

Будемо говорити, що кільце R є кільцем майже одиничного стабільного рангу 1, якщо довільний ненульовий і необоротний елемент кільця R є елементом майже одиничного стабільного рангу 1.

Твердження 4. *Нехай R — комутативне кільце Безу одиничного стабільного рангу* 1, *тоді R є кільцем майже одиничного стабільного рангу* 1.

Доведення. Нехай $a \in R, a \neq 0, a \notin U(R)$ і b, c — елементи кільця R такі, що $aR + bR + cR = R$. Оскільки R — кільце Безу, то $bR + cR = dR$ для деякого елемента $d \in R$. Тому $b = db_0, c = dc_0, bu + cv = d$ для деяких елементів $b_0, c_0, u, v \in R$. Звідси $b_0u + c_0v + \alpha = 1$ для деякого елемента α такого, що $d\alpha = 0$. Оскільки R — кільце одиничного стабільного рангу 1, то існують оборотний елемент $u \in \in U(R)$ і елементи $x, y \in R$ такі, що $(b_0 + \alpha x) + (c_0 + \alpha y)u = w \in U(R)$. Нехай $b_0 + \alpha x = b_1$, $c_0 + \alpha y = c_1$. Оскільки $d\alpha = 0$, то $db_1 = b, dc_1 = c$. Тобто для елементів $b, c \in R$ ми знайшли елементи $b_1, c_1 \in R$ та оборотні елементи u, w такі, що $cR + bR = dR$, $b = db_1$, $c = dc_1$, $db_1w^{-1} + dc_1uw^{-1} = d$ і $b_1 + c_1u = w$. Оскільки $aR + bR + cR = R$, то $dR + aR = R$. Окрім того, $(b + cu)R + aR = R$, де $uR + aR = R$, оскільки $u \in U(R)$. Тобто ми довели, згідно з твердженням 2, що a — елемент майже одиничного стабільного рангу 1. Оскільки a — ненульовий і необоротний елемент R, це означає, що R є кільцем майже одиничного стабільного рангу 1.

Твердження доведено.

Виявляється, що у випадку, коли радикал Джекобсона є ненульовим кільцем майже одиничного стабільного рангу 1, то це кільце насправді є кільцем одиничного стабільного рангу 1.

Теорема 3. *Нехай R — кільце майже одиничного стабільного рангу* 1 *з ненульовим радикалом Джекобсона $J(R)$. Тоді R — кільце одиничного стабільного рангу* 1.

Доведення. Покажемо, що R є кільцем одиничного стабільного рангу 1. Нехай $bR + cR = R$ та $a \in J(R) \diagdown (0)$. Згідно з твердженням 3, існує елемент $u \in R$ такий, що $aR + (b + cu)R = R$ і $uR + aR = R$. Оскільки $a \in J(R)\{0\}$ і $aR + uR = R$, то $u \in U(R)$. Далі, оскільки $aR + (b + cu)R = R$ і $a \in J(R)\diagdown(0)$, то $(b + cu)R = R$, а це означає, що R є кільцем одиничного стабільного рангу 1.

Теорему доведено.

Зауважимо, що $u \in U(R)$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{u} \in U(R\diagup J(R))$, де $\overline{u} = u + J(R)$.

Як наслідок із теореми 3, отримаємо наступний результат.

Теорема 4. *Кільце R є кільцем майже одиничного стабільного рангу* 1 *тоді і тільки тоді,коли $R\diagup J(R)$ є кільцем майже одиничного стабільного рангу* 1.

Виявляється, що кільце майже одиничного стабільного рангу 1 з ненульовим радикалом Джекобсона тісно пов'язане з 2-добрим кільцем, тобто має місце наступний результат.

Теорема 5. *Нехай R — кільце майже одиничного стабільного рангу* 1 *з ненульовим радикалом Джекобсона. Тоді R є* 2*-добрим кільцем.*

Доведення. Згідно з теоремою 3, R є кільцем одиничного стабільного рангу 1. Тоді для довільного елемента $a \in R$ розглянемо $aR + (-1)R = R$. Оскільки R — кільце одиничного стабільного рангу 1, то існує елемент $u \in U(R)$ такий, що $a - u = w \in U(R)$. Звідси $a = w + u$, що і потрібно було довести.

Теорему доведено.

По аналогії з кільцем майже одиничного стабільного рангу 1 можна ввести до розгляду майже 2-добрі кільця.

Означення 5. *Кільце R називається майже* 2*-добрим кільцем, якщо для довільного ненульового і необоротного елемента $a \in R$ такого, що $2R + aR = R$, кільце $R\diagup aR$ є* 2*-добрим кільцем.*

Очевидним прикладом майже 2-доброго кільця на основі теореми 2 є адекватна область, тобто має місце такий результат.

Теорема 6. *Адекватна область є майже* 2*-добрим кільцем.*

1. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. – 1964. – **22**. – P. 5 – 60.
2. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over ring with finite stable range // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 1. – P. 134 – 148.
3. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable range // Visnyk Lviv. Ser. Mech. Math. – 2003. – **61**. – P. 206 – 211.
4. *Goodearl K. R., Menal P.* Stable rang one for rings with many units // S. Pure Appl. Algebra. – 1998. – **54**. – P. 261 – 287.
5. *Lam T. Y.* Serres conjecture // Lect. Notes Math. – Berlin; New York: Springer, 1978. – **636**.
6. *McGovern W. Wm.* Neat rings // J. Pure Appl. Algebra. – 2006. – **205**. – P. – 243 – 265.
7. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, № 2. – P. 225 – 236.
8. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitelly presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231 – 248.
9. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – **229**. – P. 269 – 278.
10. *Camilo V., Yu C. P.* Exchange rings, units and idempotents // Communs Algebra. – 1994. – **22**, № 12. – P. 4737 – 4749.
11. *Vamos P.* 2-good rings // Quart. J. Math. – 2005. – **56**. – P. 417 – 430.

Одержано 13.02.11