УДК 517.9

О. В. Лопотко (Нац. лісотехн. ун-т України, Львів)

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРНИХ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

We obtain integral representation of even functions of two variables, for which the kernel $[k_1(x+y)+k_2(x-y)]$, $x,y\in R^2$, is positive definite.

Получено интегральное представление четных функций двух переменных, для которых ядро $[k_1(x+y)+k_2(x-y)]$, $x,y\in R^2$, положительно определено.

У роботі [3] М. Г. Крейн застосував метод спрямованих функціоналів для одержання інтегральних зображень додатно визначених ядер $K(x,y)$, $x,y\in R^1$. Ю. М. Березанський в [1] запропонував метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y)$, $x,y\in R^1$, за допомогою власних функцій диференціальних операторів. Цей метод полягає у введенні за ядром $K(x,y)$, $x,y\in R^1$, гільбертового простору і побудові розвинення за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів, які розглядаються у цьому просторі; відповідна рівність Парсеваля дає потрібне зображення. У монографії [2] за цією методикою доведено теорему про інтегральне зображення парних додатно визначених (п.д.в.) функцій скінченної кількості змінних. У роботі [4] побудовано інтегральне зображення для пари парних додатно визначених (п.п.д.в.) функцій однієї змінної. У даній роботі доведено теорему для п.п.д.в. функцій двох змінних. Ця теорема є узагальненням прикладів 3, 4 [2, с. 712].

Означення. *Пару парних дійсних неперервних функцій* $k_1(x)$, $k_2(x)$, $x\in R^2$, *будемо називати додатно визначеними* (*п.п.д.в.*), *якщо для довільної фінітної функції* $u(x)\in C_0^\infty(R^2)$ *виконується нерівність*

$$\int_{R^2}\int_{R^2}\left[k_1(x+y)+k_2(x-y)\right]u(y)\overline{u(x)}\,dxdy \ \geq\ 0\ , \qquad (1)$$

тобто неперервне ядро $K(x,y)=\left[k_1(x+y)+k_2(x-y)\right]$ *повинно бути додатно визначеним.*

Теорема. *Кожна п.п.д.в. функцій* $k_1(x)$, $k_2(x)$, $x\in R^2$, *допускає зображення*

$$k_1(x_1;x_2)+k_2(0;0) \ = \ \int_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\,\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}\,d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)\ +$$

$$+\ \int_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\,\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}\,d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2)\ +$$

$$+\int_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2)+$$

$$+\int_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2), \tag{2}$$

$$k_1(0;0)+k_2(x_1;x_2) = \int_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)-$$

$$-\int_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2)-$$

$$-\int_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2)+$$

$$+\int_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2), \tag{3}$$

де $d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)$, $d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2)$, $d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2)$, $d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2)$ — *борелівські невід'ємні міри, причому*

$$d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2)=\lambda_1\lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2), \tag{4}$$

$$\lambda_1 d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2)=\lambda_2 d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2). \tag{5}$$

Якщо $|k_1(x_1;x_2)|\le Ce^{N\left(x_1^2+x_2^2\right)}$ *і* $|k_2(x_1;x_2)|\le Ce^{N\left(x_1^2+x_2^2\right)}$, $C,N>0$, *для всіх* $x\in R^2$, *то міри у* (2) *і* (3) *визначаються однозначно. У випадку, коли* $k_1(x)=0$, *міра* $d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)$ *зосереджена на* $[0;\infty)\times[0;\infty)$ *і визначається однозначно, до того ж*

$$d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2)=\lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2), \tag{6}$$

$$d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2)=\lambda_1 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2), \tag{7}$$

$$d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2)=\lambda_1\lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2). \tag{8}$$

У випадку, коли $k_2(x)=0$, *міра* $d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)$ *зосереджена на* $(-\infty;0]\times(-\infty;0]$ *і визначається однозначно, до того ж*

$$d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2)=-\lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2), \tag{9}$$

$$d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2)=-\lambda_1 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2), \tag{10}$$

$$d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2)=\lambda_1\lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2). \tag{11}$$

Навпаки, функції виду (2), (3) *з умовами* (4), (5) *є п.л.д.в. функціями.*

Доведення. За функціями $k_1(x)$, $k_2(x)$ введемо квазіскалярний добуток у просторі $L_2(R^2,dx)$

$$\langle u, \nu \rangle_{H_k} = \int\limits_{R^1} \int\limits_{R^1} K(x, y)\, u(y)\, \nu(x)\, dx dy, \quad u, \nu \in C_0^\infty(R^2). \tag{12}$$

Після проведення факторизації й поповнення відносно (12) одержимо гільбертовий простір H_k.

Позначимо через $A_j, j = 1, 2$, мінімальний оператор у просторі $H_0 = L_2(R^2; dx)$, який відповідає виразу $L_1^{(j)} = -\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}, j = 1, 2$. Кожний із операторів $A_j, j = 1, 2$, допускає продовження оснащення з $D = C_0^\infty(R^2)$. Звуження $A_j, j = 1, 2$, на D буде збігатися з відображенням $u \to L^{(j)+}u$, $u \in C_0^\infty(R^2)$, у просторі H_k. За оператори $B_j, j = 1, 2$ (див. [2, с. 702, 703], VIII), можна прийняти оператори $u \to L^{(j)+}u$, $u \in C_0^\infty(R^2)$, які діють у просторі $H_+^{(j)} = L_2\left(R^j; p^{(j)}(x_j) dx_j\right)$, де $p(x)$ вибираємо так, щоб $\int_{R^2} K(x, x) / p(x) dx < \infty$. Роль операторів C_j в H_+ будуть відігравати оператори вигляду $u \to L^{(j)+}u$, де $u \in D(C_1) = H_+^{(1)} \otimes C_0^\infty(R^1)$ і $D(C_2) = C_0^\infty(R^1) \otimes H_+^{(1)}$. Оскільки комутативність $K(x, y)$ і A_j еквівалентна ермітовості C_j в H_k, то можна обмежитись перевіркою ермітовості C_j в H_k, тобто рівності

$$\left\langle L^{(j)+}u, \nu \right\rangle = \left\langle u, L^{(j)+}\nu \right\rangle, \quad u, \nu \in C_0^\infty(R^2), \quad j = 1, 2. \tag{13}$$

Для гладкого додатно визначеного ядра $K(x, y)$ рівність (13) виконується.

Перевіримо (13) для довільного додатно визначеного ядра $K(x, y)$. Цю перевірку достатньо здійснити на функціях виду $u(x_1)$ $u(x_2)$, оскільки вони щільні у $L_2(R^2; dx)$.

Нехай $j = 1$. Введемо допоміжні парні функції

$$f_1(t) = \int\limits_{R^1} \int\limits_{R^1} K_1(t, x_2 + y_2)\, u(y_2)\, u(x_2)\, dx_2 dy_2$$

і

$$f_2(t) = \int\limits_{R^1} \int\limits_{R^1} K_2(t, x_2 - y_2)\, u(y_2)\, u(x_2)\, dx_2 dy_2,$$

тоді

$$\left\langle L^{(1)+}u, \nu \right\rangle = \int\limits_{R^1} \int\limits_{R^1} f_1(x_1 + y_1) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u(y_1) v(x_1)\, dx_1 dy_1 +$$

$$+ \int\limits_{R^1} \int\limits_{R^1} f_2(x_1 - y_1) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u(y_1) \nu(x_1) dx_1 dy_1 =$$

$$= \int_{R^1} f_1(y_1)\left(\int_{R^1} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u(y_1 - x_1)\nu(x_1)dx_1 \right)dy_1 +$$

$$+ \int_{R^1} f_2(y_1)\left(\int_{R^1} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} u(y_1 + x_1)\nu(x_1)dx_1 \right)dy_1 =$$

$$= \int_{R^1}\int_{R^1} f_1(x_1 + y_1)u(y_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\nu(x_1)dx_1 dy_1 +$$

$$+ \int_{R^1}\int_{R^1} f_2(x_1 - y_1)\, u(y_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\nu(x_1)dx_1 dy_1 = \left\langle u, L^{(1)+}\nu \right\rangle .$$

Таким чином, $K(x,y)$ комутує з $-\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $j = 1,2$.

Тепер для ядра $K(x,y)$ можна застосувати теорему 4.3 [2, с. 708, 709] і одержати зображення

$$[\, k_1(x+y) + k_2(x-y)\,] = \int_{R^2} \Omega_\lambda(x,y)d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{R^2} \sum_{\alpha,\beta\in A} X_\alpha(x,\lambda)\overline{X_\beta(y,\lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \qquad x, y \in R^2 , \tag{14}$$

де

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Omega_\lambda = \lambda_j\Omega_\lambda , \qquad -\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\Omega_\lambda = \lambda_j\Omega_\lambda ,$$

$$d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\Omega_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial y_1^{\beta_1}\partial y_2^{\beta_2}} \right)(0;0)d\rho(\lambda) ,$$

до того ж

$$\lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2}\Omega_\lambda(0;0) = \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\Omega_\lambda(0;0) , \tag{15}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial x_2\partial y_1\partial y_2}\Omega_\lambda(0;0) = \lambda_1\lambda_2\Omega_\lambda(0;0) , \tag{16}$$

і $X_\alpha(x,\lambda) = X_{\alpha_1}^{(1)}(x_1,\lambda_1)X_{\alpha_2}^{(2)}(x_2,\lambda_2)$, $X_0^{(j)}(x_j,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda_j}\,x_j$, $X_1^{(j)}(x_j,\lambda) = \dfrac{\sin\sqrt{\lambda_j}\,x_j}{\lambda_j}$, $j = 1,2$, A — паралелепіпед з цілочисловими вершинами $\alpha_1 = 0,1$; $\alpha_2 = 0,1$.

Якщо тепер виконаємо у (14) заміну $x_1 = -x_1$, $y_1 = -y_1$ і додамо отриману рівність до (14), а потім в одержаній рівності виконаємо заміну $x_2 = -x_2$, $y_2 = -y_2$ і додамо одержану рівність до попередньої рівності, отримаємо зображення

$$[\, k_1(x_1 + y_1; x_2 + y_2) + k_2(x_1 - y_1; x_2 - y_2)\,] =$$

$$= \int_{R^2} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\sigma_{0000}(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \frac{\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\sqrt{\lambda_2}} \cos\sqrt{\lambda_1}y_1 \frac{\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\sqrt{\lambda_2}} d\sigma_{0101}(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\sigma_{1010}(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2}{\sqrt{\lambda_2}} \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\sqrt{\lambda_2}} d\sigma_{1111}(\lambda_1;\lambda_2), \tag{17}$$

причому, завдяки (15), (16), $d\sigma_{1111}(\lambda_1;\lambda_2) = \lambda_1\lambda_2 d\sigma_{0000}(\lambda_1;\lambda_2)$ і $\lambda_1 d\sigma_{0101}(\lambda_1;\lambda_2) = \lambda_2 d\sigma_{1010}(\lambda_1;\lambda_2)$, тобто виконано умови (4), (5). Якщо тепер у (17) покладемо $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, то дістанемо зображення (2), а якщо покладемо $y_1 = -x_1$, $y_2 = -x_2$, то одержимо (3).

Однозначність мір у (2), (3), якщо $k_1(x)$, $k_2(x)$ задовольняють оцінки, випливає з того, що замикання в H_k операторів C_j, $j = 1, 2$, самоспряжене і комутуюче.

Останнє твердження теореми доводиться таким чином.

Із зображення (2) знаходимо

$$k_1(x_1 + y_1; x_2 + y_2) + k(0;0) =$$

$$= \int_{R^2} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1+y_1)}{2} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2+y_2)}{2} d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1+y_1)}{2} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2+y_2)}{2\lambda_2} d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1+y_1)}{2\lambda_1} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2+y_2)}{2} d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1+y_1)}{2\lambda_1} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2+y_2)}{2\lambda_2} d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2). \tag{18}$$

Із зображення (3) отримуємо

$$k_1(0;0)+k_2(x_1-y_1;x_2-y_2) =$$

$$= \int_{R^2} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1-y_1)}{2}\,\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)}{2}\,d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) -$$

$$- \int_{R^2} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1-y_1)}{2}\,\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)}{2\lambda_2}\,d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2) -$$

$$- \int_{R^2} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1-y_1)}{2\lambda_1}\,\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)}{2}\,d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1-y_1)}{2\lambda_1}\,\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)}{2\lambda_2}\,d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2). \tag{19}$$

Додавши (18) і (19), з урахуванням (4), (5) одержимо рівність

$$k_1(x_1+y_1;x_2+y_2)+k_2(x_1-y_1;x_2-y_2)+k_1(0;0)+k_2(0;0) =$$

$$= \int_{R^2} d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \Big[\cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}y +$$

$$+ \sin\sqrt{\lambda_1}x_1 \sin\sqrt{\lambda_2}x_2 \sin\sqrt{\lambda_1}y_1 \sin\sqrt{\lambda_2}y \Big] d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1 \sin\sqrt{\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_1}y_1 \sin\sqrt{\lambda_2}x_2 \sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2} \right) d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2).$$

Тоді, оскільки $k_1(0;0)+k_2(0;0) = \int_{R^2} d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)$ (це випливає з (18) або (19)), з урахуванням (4), (5) отримуємо

$$k_1(x_1+y_1;x_2+y_2)+k_2(x_1-y_1;x_2-y_2) =$$

$$= \int_{R^2} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}y_2\, d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2}{\sqrt{\lambda_2}} \cos\sqrt{\lambda_1}y_1\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\sqrt{\lambda_2}}\, d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \cos\sqrt{\lambda_2}x_2\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cos\sqrt{\lambda_2}y_2\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\sqrt{\lambda_1}}\, d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+\int\limits_{R^2}\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}\,x_1}{\sqrt{\lambda_1}}\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}\,x_2}{\sqrt{\lambda_2}}\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}\,y_1}{\sqrt{\lambda_1}}\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}\,y_2}{\sqrt{\lambda_2}}\,d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2)\,. \qquad (20)$$

За допомогою рівності (20) перевіряємо умову (1).

Теорему доведено.

У випадку, коли у нерівності (1) $k_2(x)=0$, оператори $A_j\le 0$, $j=1,2$. Дійсно, наприклад, для $j=1$ маємо

$$\langle A_1u,u\rangle=-\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1}f_1(x_1+y_1)u''(y_1)u(x_1)dx_1dy_1 =$$

$$(x_1+y_1=t_1\Rightarrow y_1=t_1-x_1)$$

$$=-\int\limits_{R^1}\left(\int\limits_{R^1}f_1(t_1)u''_{t_1}(t_1-x_1)dt_1\right)\overline{u}(x_1)dx_1 =$$

$$=-\int\limits_{R^1}\left(\int\limits_{R^1}f_1(t_1)u''_{t_1}(t_1-x_1)dt_1\right)\overline{u}(x_1)dx_1 =$$

$$=-\int\limits_{R^1}f_1(t_1)\left(\int\limits_{R^1}u''_{t_1}(t_1-x_1)\overline{u}(x_1)dx_1\right)dt_1 =$$

$$=\left(\begin{array}{l}\displaystyle\int\limits_{R^1}u''_{x_1}(t_1-x_1)\overline{u}(x_1)\,dx_1=\\[2ex] \displaystyle\qquad=\Big[-\overline{u(x_1)}\,u'_{x_1}(t_1-x_1)\Big]_{-\infty}^{\infty}+\int\limits_{R^1}u'_{x_1}(t_1-x_1)\overline{u'(x_1)}\,dx_1\\[2ex] \qquad u''_{x_1}(t_1-x_1)\,dx_1=d\nu \quad\Rightarrow\quad \nu=-u'_{x_1}(t_1-x_1)\\[1ex] \qquad\qquad \overline{u(x_1)}=u \qquad\quad\Rightarrow\quad du=\overline{u'(x_1)}\,dx_1\end{array}\right)=$$

$$=-\int\limits_{R^1}f_1(t_1)\left(\int\limits_{R^1}u'_{x_1}(t_1-x_1)\overline{u'(x_1)}\,dx_1\right)dt_1 =$$

$$=-\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1}f_1(x_1+z_1)u'(z_1)\overline{u'(x_1)}\,dx_1dz_1\le 0\,.$$

$$(t_1-x_1=z_1\Rightarrow t_1=x_1+z_1)$$

Тому інтегрування у зображенні (17) буде здійснюватися по $R_-^2=R_-^1\times R^1$. Елементарне ядро буде мати вигляд

$$\Omega_\lambda(x;y) = \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}\,x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}\,x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}\,y_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}\,y_2 +$$

$$+\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}\,x_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}\,x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}\,y_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}\,y_2 +$$

$$+\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}\,x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}\,x_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}\,y_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}\,y_2 +$$

$$+\ \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}\,x_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}\,x_2 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}\,y_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}\,y_2\,, \quad \lambda \in R^2\,,$$

і міри у (17) будуть пов'язані співвідношеннями (9) – (11):

$$d\sigma_{0000}(\lambda_1;\lambda_2) = \Omega_\lambda(0;0)d\rho(\lambda_1;\lambda_2) = d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)\,,$$

$$d\sigma_{0101}(\lambda_1;\lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2}\Omega_\lambda(0;0)d\rho(\lambda_1;\lambda_2) = -\lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) = d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2)\,,$$

$$d\sigma_{1010}(\lambda_1;\lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\Omega_\lambda(0;0)d\rho(\lambda_1;\lambda_2) = -\lambda_1 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) = d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2)\,,$$

$$d\sigma_{1111}(\lambda_1;\lambda_2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2}\Omega_\lambda(0;0)d\rho(\lambda_1;\lambda_2) =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) = d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2)\,.$$

Якщо тепер у зображенні (17) покладемо $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, то одержимо

$$k_1(x_1;x_2) = \int\limits_{R^2} \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) \qquad \text{i} \qquad k_1(0;0) = \int\limits_{R^2} d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)\,,$$

тобто зображення (2) і (3).

У випадку, коли у нерівності (1) $k_1(x) = 0$, оператори $A_j \geq 0$, $j = 1,2$. Дійсно, наприклад, для $j = 1$ маємо

$$\langle A_1 u, u \rangle = -\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_1(x_1 - y_1)u''(y_1)\overline{u(x_1)}dx_1 dy_1 =$$

$$(x_1 - y_1 = t_1 \Rightarrow y_1 = x_1 - t_1)$$

$$= -\int\limits_{R^1}\left(\int\limits_{R^1} f_2(t_1)u''_{t_1}(x_1 - t_1)dt_1\right)\overline{u(x_1)}dx_1 =$$

$$= -\int\limits_{R^1}\left(\int\limits_{R^1} f_2(t_1)u''_{x_1}(x_1 - t_1)dt_1\right)\bar{u}(x_1)dx_1 =$$

$$= -\int\limits_{R^1} f_2(t_1)\left(\int\limits_{R^1} u''_{t_1}(x_1 - t_1)\bar{u}(x_1)dx_1\right)dt_1 =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \int\limits_{R^1} u''_{x_1}(x_1 - t_1)\bar{u}(x_1)dx_1 = \\ \qquad = \left[\overline{u(x_1)}u'_{x_1}(x_1 - t_1)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{R^1} u'_{x_1}(x_1 - t_1)\overline{u'(x_1)}dx_1 \\ \qquad u''_{x_1}(x_1 - t_1)dx_1 = d\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = -u'_{x_1}(x_1 - t_1) \\ \qquad \overline{u(x_1)} = u \quad \Rightarrow \quad du = \overline{u'(x_1)} \end{array}\right) =$$

$$= \int_{R^1} f_2(t_1)\left(\int_{R^1} u'_{x_1}(x_1 - t_1)\overline{u'(x_1)}\, dx_1 \right) dt_1 =$$

$$= \int_{R^1}\int_{R^1} f_2(x_1 - z_1)u'(z_1)\overline{u'(x_1)}\, dx_1 dz_1 \geq 0 .$$

$$(x_1 - y_1 = z_1 \Rightarrow t_1 = x_1 - z_1)$$

Тому інтегрування у зображенні (17) буде здійснюватися по $R^2_+ = R^1_+ \times R^1_+$. Елементарне ядро буде мати вигляд

$$\Omega_\lambda(x; y) = \cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}y_2 +$$

$$+ \cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \sin\sqrt{\lambda_2}x_2 \cos\sqrt{\lambda_1}y_1 \sin\sqrt{\lambda_2}y_2 +$$

$$+ \sin\sqrt{\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 \sin\sqrt{\lambda_1}y_1 \cos\sqrt{\lambda_2}y_2 +$$

$$+ \sin\sqrt{\lambda_1}x_1 \sin\sqrt{\lambda_2}x_2 \sin\sqrt{\lambda_1}y_1 \sin\sqrt{\lambda_2}y_2, \quad \lambda \in R^2_+,$$

і міри у (17) будуть пов'язані співвідношеннями (6) – (8):

$$d\sigma_{0000}(\lambda_1; \lambda_2) = \Omega_\lambda(0;0)d\rho(\lambda_1;\lambda_2) = d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2),$$

$$d\sigma_{0101}(\lambda_1;\lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2}\Omega_\lambda(0;0)d\rho(\lambda_1;\lambda_2) = \lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) = d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2),$$

$$d\sigma_{1010}(\lambda_1;\lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\Omega_\lambda(0;0)d\rho(\lambda_1;\lambda_2) = \lambda_1 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) = d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2),$$

$$d\sigma_{1111}(\lambda_1;\lambda_2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1 \partial x_2 \partial y_2}\Omega_\lambda(0;0)d\rho(\lambda_1;\lambda_2) =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) = d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2).$$

Якщо тепер у зображенні (17) покладемо $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, то одержимо

$$k_2(x_1;x_2) = \int_{R^2_+} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1 \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) \quad \text{і} \quad k_2(0;0) = \int_{R^2_+} d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2),$$

тобто зображення (2) і (3).

Зауваження. **1.** Нехай $k_1(x) = k_2(x) = \frac{1}{2}k(x_1;x_2)$, тоді з (2) і (3) випливає

$$\int_{R^2} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\, \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}\, d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\, \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}\, d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2) = 0 .$$

Тому

$$\frac{1}{2}k(x_1;x_2)+\frac{1}{2}k(0;0) = \int\limits_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\,\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}\,d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2) + $$

$$+\int\limits_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\,\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}\,d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2).$$

З урахуванням (4) попереднє зображення набере вигляду

$$\frac{1}{2}k(x_1;x_2)+\frac{1}{2}k(0;0)=\int\limits_{R^2}\frac{2+2\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{4}d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2),$$

або

$$k_2(x_1;x_2)=\int\limits_{R^2}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\,d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2),$$

тобто одержимо зображення (4.22) із [2, с. 712].

2. Нехай $k_1(x)=\frac{1}{2}k(x)$, $k_2(x)=-\frac{1}{2}k(x)$, $k(0;x_2)=k(x_1;0)=0$. Тоді у (2) і (3) $d\rho_1(\lambda_1;\lambda_2)=0$, оскільки $k(0;0)=0$. Міра $d\rho_2(\lambda_1;\lambda_2)\equiv 0$, позаяк $k(x_1;0)=0$, і міра $d\rho_3(\lambda_1;\lambda_2)\equiv 0$, бо $k(0;x_2)=0$. Тоді одержимо відоме зображення з [2, с. 712]

$$k(x_1;x_2)=\int\limits_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{\lambda_1}\,\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{\lambda_2}\,d\rho_4(\lambda_1;\lambda_2).$$

1. *Березанский Ю. М.* Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. – 1956. – **108**, № 3. – С. 893 – 896.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
3. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Докл. АН СССР. – 1946. – **53**, № 1. – С. 3 – 6.
4. *Лопотко О. В.* Інтегральне зображення парних додатно визначених функцій однієї змінної // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 281 – 284.

Одержано 27.04.09,
після доопрацювання — 11.04.11