УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

ТОЧНЫЕ ВЕРХНИЕ ГРАНИ НОРМ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ СРАВНЕНИЯ

For arbitrary $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ and $p>0,$ we solve the extremal problem

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}|x^{(k)}(t)|^{q}dt\to\sup,\quad q\geq p,\quad k=0\quad\text{or}\quad q\geq 1,\quad k\geq 1,$$

on the set of functions S_{φ}^{k} such that $\varphi^{(i)}$ is the comparison function for $x^{(i)},\ i=0,1,\ldots,k,$ and (in the case $k=0$) $L(x)_p\leq L(\varphi)_p,$ where

$$L(x)_p:=\sup\left\{\left(\int\limits_{a}^{b}|x(t)|^{p}dt\right)^{1/p}\ :\ a,b\in\mathbf{R},\ |x(t)|>0,\ t\in(a,b)\right\}.$$

In particular, we solve this extremal problem for Sobolev classes and for bounded sets of the spaces of trigonometric polynomials and splines.

Для довільних $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ і $p>0$ розв'язано екстремальну задачу

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}|x^{(k)}(t)|^{q}dt\to\sup,\quad q\geq p,\quad k=0\quad\text{або}\quad q\geq 1,\quad k\geq 1,$$

на множині функцій S_{φ}^{k} таких, що $\varphi^{(i)}$ – функція порівняння для $x^{(i)},\ i=0,1,\ldots,k,$ і (у випадку $k=0$) $L(x)_p\leq L(\varphi)_p$, де

$$L(x)_p:=\sup\left\{\left(\int\limits_{a}^{b}|x(t)|^{p}dt\right)^{1/p}\ :\ a,b\in\mathbf{R},\ |x(t)|>0,\ t\in(a,b)\right\}.$$

Як наслідок, вказану задачу розв'язано на соболєвських класах та на обмежених підмножинах просторів тригонометричних поліномів і сплайнів.

1. Введение. Пусть $G=\mathbf{R}$ или $G=[\alpha,\beta]$. Будем рассматривать пространства $L_p(G),\ 0<p\leq\infty,$ всех измеримых функций $x\colon G\to\mathbf{R}$, для которых $\|x\|_{L_p(G)}<\infty,$ где

$$\|x\|_{L_p(G)}:=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_G|x\,(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}, & 0<p<\infty,\\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in G}|x\,(t)|, & p=\infty.\end{cases}$$

Для $r\in\mathbf{N}$ и $p,s\in(0,\infty]$ через $L_{p,s}^{r}$ обозначим пространство всех функций $x\in L_p(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)}\in L_s(\mathbf{R})$. Будем писать $\|x\|_p$ вместо $\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$ и L_{∞}^{r} вместо $L_{\infty,\infty}^{r}$.

Будем говорить, что $f\in L_{\infty}^{1}$ является функцией сравнения для $x\in L_{\infty}^{1}$, если $\|x\|_{\infty}\leq\|f\|_{\infty}$ и из равенства $x(\xi)=f(\eta),\ \xi,\eta\in\mathbf{R}$, следует неравенство $|x'(\xi)|\leq|f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi\in L_{\infty}^{1}$ назовем S-функцией, если она обладает свойствами: φ – четная относительно $\omega/2,\ |\varphi|$ — выпуклая вверх на

$[0,\omega]$ и строго монотонная на $[0,\omega/2]$. Для $k=0,1,2,\ldots$ и S-функции $\varphi\in L_\infty^{k+1}$ через S_φ^k обозначим класс функций $x\in L_\infty^{k+1}$ таких, что $\varphi^{(i)}$ является функцией сравнения для $x^{(i)},\ i=0,1,\ldots,k$. Примерами классов S_φ^k являются соболевские классы

$$\{x\in L_\infty^r\colon \|x^{(r)}\|_\infty\le A_r, \|x\|_\infty\le A_0\},$$

а также ограниченные подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ (сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n,\ k\in\mathbf{Z}$).

В настоящей работе решены некоторые модификации известной экстремальной задачи

$$\|x^{(k)}\|_q\to\sup,\quad 0\le k\le r-1,\quad q\ge 1, \tag{1}$$

на классе функций $x\in L_{p,s}^r$, удовлетворяющих ограничениям

$$\|x^{(r)}\|_s\le A_r,\quad \|x\|_p\le A_0.$$

Эта задача эквивалентна (см., например, [1, с. 47]) нахождению точной константы C в неравенстве типа Колмогорова – Надя

$$\|x^{(k)}\|_q\le C\,\|x\|_p^\alpha\left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha},\quad 0\le k\le r-1, \tag{2}$$

на классе функций $x\in L_{p,s}^r$, где $\alpha=(r-k+1/q-1/s)/(r+1/p-1/s)$.

Несмотря на большое количество работ, относящихся к данной тематике, точная константа в неравенстве (2) для всех r известна лишь в нескольких случаях. Подробную библиографию можно найти в [1 – 3].

Для произвольного отрезка $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ Б. Бояновым и Н. Найденовым [4] решена следующая задача:

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt\to\sup,\quad k=1,2,\ldots,$$

на классе S_φ^k, где Φ — непрерывно дифференцируемая положительная функция на $(0,\infty)$ такая, что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0)=0$.

Через W обозначим класс непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций Φ на $[0,\infty)$ таких, что $\Phi(0)=0$. Для $p>0$ положим [5]

$$L(x)_p:=\sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]}\colon a,b\in\mathbf{R},\ |x(t)|>0,\ t\in(a,b)\right\}.$$

В настоящей работе для произвольного отрезка $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ решена экстремальная задача

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p)dt\to\sup,\quad \Phi\in W,\quad p>0, \tag{3}$$

на классе функций S_φ^0, удовлетворяющих условию $L(x)_p\le L(\varphi)_p$. В качестве следствия получено решение задачи

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

на классах S_φ^k. В частности, решены задачи (3) и (4) на классах

$$\Omega_p^r := \{x \in L_\infty^r \colon \|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, L(x)_p \le A_0\}$$

и на ограниченных подмножествах пространств T_n и $S_{n,r}$. Отметим, что решение задач (3) и (4) на классах Ω_p^r было получено ранее в [6].

2. Вспомогательные утверждения. Заметим, что если функция $x \in S_\varphi^0$ удовлетворяет условию $L(x)_p < \infty$ для некоторого $p > 0$ и $|x(t)| > 0,\ t \in (a, b)$, причем $a = -\infty$ или $b = +\infty$, то $x(t) \to 0$ при $t \to -\infty$ или $t \to +\infty$. В этом случае будем полагать $x(-\infty) = 0$ и $x(+\infty) = 0$.

Символом $r(x, t),\ t > 0$, обозначим перестановку (см., например, [7], §1.3) функции $|x|,\ x \in L_1[a, b]$. При этом условимся, что $r(x, t) = 0$ для $t \ge b - a$.

Лемма 1. *Пусть φ — S-функция с периодом 2ω, $p > 0$, $\Phi \in W$, а функция $x \in S_\varphi^0$ и интервал (a, b), $-\infty \le a < b \le \infty$, таковы, что*

$$L(x)_p \le L(\varphi)_p,$$

$$x(a) = x(b) = 0, \quad |x(t)| > 0, \ \ t \in (a, b).$$

Тогда для любого измеримого множества $E \subset (a, b)$, $\mu E \le \omega$, выполнены неравенства

$$\int_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int_0^\omega \Phi(|\varphi(t)|^p)dt \tag{5}$$

и

$$\int_E \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt, \quad \Theta = \frac{\mu E}{2}, \tag{6}$$

где m — точка локального экстремума функции φ.

Кроме того, если $-\infty < a < b < \infty$, то

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \le \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \Phi(|\varphi(t)|^p)dt. \tag{7}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in S_\varphi^0$ и интервал (a, b), удовлетворяющие условиям леммы 1. В силу определения класса S_φ^0

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty. \tag{8}$$

Докажем неравенство (5). Обозначим через $\overline{x}$ сужение функции x на $[a, b]$, а через $\overline{\varphi}$ сужение функции φ на $[0, \omega]$. В силу теоремы Харди – Литтлвуда – Полиа (см., например, [7], утверждение 1.3.11) для доказательства (5) достаточно показать, что

$$\int_0^\xi r(|\overline{x}|^p, t)dt \le \int_0^\xi r(|\overline{\varphi}|^p, t)dt, \quad \xi > 0. \tag{9}$$

В силу (8) и условия $x(a) = x(b) = 0$ леммы 1 для любого $z \in (0, \|\overline{x}\|_{L_\infty[a,b]})$ существуют точки $t_i \in (a, b),\ i = 1, \ldots, m,\ m \ge 2,$ и две точки $y_j \in (c, c + \pi/\lambda),$ $j = 1, 2,$ такие, что

$$z = |\overline{x}(t_i)| = |\overline{\varphi}(y_j)|. \tag{10}$$

Поскольку φ является функцией сравнения для $x,$ то

$$|\overline{x}'(t_i)| \le |\overline{\varphi}'(y_j)|.$$

Поэтому если точки θ_1 и θ_2 выбраны так, что

$$z = r(\overline{x}, \theta_1) = r(\overline{\varphi}, \theta_2),$$

то согласно теореме о производной перестановки (см., например, [7], предложение 1.3.2)

$$|r'(\overline{x}, \theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^m |\overline{x}'(t_i)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^2 |\overline{\varphi}'(y_j)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\overline{\varphi}, \theta_2)|.$$

Отсюда следует, что разность $\Delta(t) := r(\overline{x}, t) - r(\overline{\varphi}, t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с – на +). То же самое верно и для разности $\Delta_p(t) := r^p(\overline{x}, t) - r^p(\overline{\varphi}, t).$ Рассмотрим интеграл

$$I(\xi) := \int_0^\xi \Delta_p(t)dt.$$

Ясно, что $I(0) = 0.$ Поскольку по условию леммы $L(x)_p \le L(\varphi)_p,$ то для достаточно больших ξ

$$I(\xi) = L(x)_p^p - L(\varphi)_p^p \le 0.$$

Кроме того, производная $I'(t) = \Delta_p(t)$ меняет знак на $[0, \infty)$ не более одного раза (с – на +). Следовательно, $I(\xi) \le 0$ для всех $\xi \ge 0.$ Таким образом, неравенства (9) и (5) доказаны.

Докажем теперь (6). Для этого заметим, что доказательство (5) было основано на том, что φ является функцией сравнения для функции $x.$ Аналогичными рассуждениями, используя (5) вместо условия $L(x)_p \le L(\varphi)_p,$ можно доказать неравенство

$$\int_0^\xi r(\Phi(|\overline{x}|^p, t))dt \le \int_0^\xi r(\Phi(|\overline{\varphi}|^p, t))dt, \quad \xi > 0.$$

Отсюда следует оценка

$$\int_E \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int_0^{\mu E} r(\Phi(|\overline{x}|^p, t))dt \le$$

$$\leq \int_0^{\mu E} r(\Phi(|\overline{\varphi}|^p, t))dt = \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt,$$

что и доказывает (6).

Осталось доказать (7). Пусть $-\infty < a < b < \infty$. Выберем $d \in (a, b)$ так, что

$$\int_a^d \Phi(|x(t)|^p)dt = \int_d^b \Phi(|x(t)|^p)dt := I.$$

Тогда в силу (5) существует $y \in [0, \omega/2]$, для которого

$$I = \int_0^y \Phi(|\varphi(t)|^p)dt.$$

Поскольку φ является функцией сравнения для x, то $d - a \geq y$, $b - d \geq y$. Следовательно,

$$\int_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt = \int_a^d \Phi(|x(t)|^p)dt + \int_d^b \Phi(|x(t)|^p)dt \leq$$

$$\leq \frac{d-a}{y} \int_0^y \Phi(|\varphi(t)|^p)dt + \frac{b-d}{y} \int_0^y \Phi(|\varphi(t)|^p)dt =$$

$$= (b-a)\frac{1}{y} \int_0^y \Phi(|\varphi(t)|^p)dt.$$

Нетрудно видеть, что функция

$$\frac{1}{y} \int_0^y \Phi(|\varphi(t)|^p)dt$$

не убывает на $[0, \omega/2]$. Поэтому

$$\int_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \leq (b-a)\frac{2}{\omega} \int_0^{\omega/2} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt = (b-a)\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt,$$

что эквивалентно (7).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* φ — S*-функция с периодом* 2ω, $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$, $\Phi \in W$. *Предположим, что функция* $x \in S^0_\varphi$ *имеет нули и удовлетворяет условию*

$$L(x)_p \leq L(\varphi)_p.$$

Если t_0 — *нуль функции* x, *то для любого* $\xi \in (0, \omega]$

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\xi} \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int\limits_0^{\xi} \Phi(\varphi(t)|^p)dt \tag{11}$$

и

$$\int\limits_{t_0-\xi}^{t_0} \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int\limits_{-\xi}^{0} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt.$$

Доказательство. Переходя к сдвигу $x(\cdot+\tau)$, если нужно, можно считать, что $t_0 = 0$ (напомним, что $\varphi(0) = 0$).

Докажем (11). Второе неравенство леммы 2 доказывается аналогично. Поскольку φ является функцией сравнения для функции x и $t_0 = 0$, то $|x(t)| \le |\varphi(t)|$, $t \in (0, \omega/2)$. Если последнее неравенство выполнено для всех $t \in (0,\xi)$, то (11) очевидно. Поэтому можно предположить, что разность $\Delta(t) := |x(t)| - |\varphi(t)|$ меняет знак на $(0,\xi)$. При этом она имеет не более одной перемены знака (с – на +) на $(0,\omega)$, так как φ является функцией сравнения для x. Ясно, что то же самое справедливо для разности $\Delta_\Phi(t) := \Phi(|x(t)|^p) - \Phi(|\varphi(t)|^p)$. Пусть точка $d \in (0,\xi)$ такова, что $\Delta(t) \le 0,\ t \in (0,d)$, и $\Delta(t) \ge 0,\ t \in (d,\omega)$. Тогда $\Delta_\Phi(t) \le 0,\ t \in (0,d)$, и $\Delta_\Phi(t) \ge 0,\ t \in (d,\omega)$.

Рассмотрим два случая: 1) $|x(t)| > 0,\ t \in (0,\xi)$, 2) $x(t)$ имеет нуль на $(0,\xi)$. Положим $I_\Phi(t) := \displaystyle\int_0^t \Delta_\Phi(u)du$. Докажем неравенство $I_\Phi(t) \le 0,\ t \in (0,\omega)$, которое эквивалентно (11).

Сначала предположим, что $|x(t)| > 0,\ t \in (0,\xi)$. Согласно предположению $d < \xi$. Поэтому $|x(t)| \ge |\varphi(t)| > 0,\ t \in (d,\omega)$, и, следовательно, $|x(t)| > 0$, $t \in (0,\omega)$. Но тогда согласно неравенству (5) $I_\Phi(\omega) \le 0$. Кроме того, $I_\Phi(0) = 0$ и производная $I'_\Phi(t) = \Delta_\Phi(t)$ меняет знак на $(0,\omega)$ не более одного раза (с – на +). Таким образом, $I_\Phi(t) \le 0,\ t \in (0,\omega)$.

Предположим теперь, что $x(t)$ имеет нуль на $(0,\xi)$. Положим $c := \sup\{t \in \in (0,\omega) : x(t) = 0\}$. Ясно, что $x(c) = 0$ и $|x(t)| \le |\varphi(t)|,\ t \in (0,c)$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\gamma} \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int\limits_0^{\gamma} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt, \qquad \gamma \in [0,c]. \tag{12}$$

Если $\xi \le c$, то (11) следует из (12). Пусть теперь $c < \xi$. Тогда $|x(t)| > 0,\ t \in (c,\omega)$. В этом случае (11) уже доказано. Поэтому, полагая $t_0 := c$ и применяя (11) с $\xi - c$ вместо ξ, получаем

$$\int\limits_c^{\xi} \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int\limits_0^{\xi-c} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt \le \int\limits_c^{\xi} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt. \tag{13}$$

Последнее неравенство следует из очевидного соотношения

$$\inf_{a\in(0,\omega-\delta)} \int\limits_a^{a+\delta} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt = \int\limits_0^{\delta} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt, \quad \delta \le \omega.$$

Складывая (13) и (12) с $\gamma = c$, получаем (11).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть φ — S-функция с периодом 2ω, $p > 0$, $\Phi \in W$. Если функция $x \in S_\varphi^0$ удовлетворяет условию $L(x)_p \le L(\varphi)_p$, то для любого отрезка $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $b - a \le \omega$, выполнено неравенство*

$$\int\limits_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt, \quad \Theta = \frac{b-a}{2}, \tag{14}$$

где m — точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$. В частности,

$$\int\limits_a^b \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int\limits_0^\omega \Phi(|\varphi(t)|^p)dt.$$

Доказательство. Если $|x(t)| > 0$ для $t \in (a, b)$, то (14) следует из неравенства (6). Поэтому предположим, что $x(t)$ имеет нуль $t_0 \in (a, b)$. Тогда согласно лемме 2

$$\int\limits_a^{t_0} \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int\limits_{a-t_0}^{0} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{b} \Phi(|x(t)|^p)dt \le \int\limits_{0}^{b-t_0} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt,$$

Складывая последние два неравенства, получаем (14), так как

$$\sup_{\mu E = \delta} \int\limits_E \Phi(|\varphi(t)|^p)dt = \int\limits_{m-\delta/2}^{m+\delta/2} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt, \quad \delta \le \omega.$$

Лемма 3 доказана.

3. Основные результаты. Пусть φ — S-функция с периодом 2ω. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ и $p > 0$. Воспользуемся конструкцией экстремальной функции в задаче Б. Боянова и Н. Найденова [4]. Для этого представим длину отрезка $[\alpha, \beta]$ в виде

$$\beta - \alpha = n\omega + 2\Theta, \quad \Theta \in (0, \omega), \tag{15}$$

где $n \in \mathbf{N}$ или $n = 0$, и рассмотрим функцию $\varphi(t + \tau)$, где τ выбрано так, что

$$|\varphi(\alpha + \Theta + \tau)| = |\varphi(\beta - \Theta + \tau)| = \|\varphi\|_\infty. \tag{16}$$

Ясно, что $\varphi(\cdot + \tau) \in S_\varphi^0$.

Теорема 1. *Пусть φ — S-функция, $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, $p > 0$, $\Phi \in W$. Тогда*

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p)dt : x \in S_\varphi^0,\ L(x)_p \le L(\varphi)_p\right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|\varphi(t+\tau)|^p)dt,$$

где τ выбрано из условия (16). *В частности, для любого $q \ge p$*

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta |x(t)|^q dt : x \in S_\varphi^0,\ L(x)_p \le L(\varphi)_p\right\} = \int\limits_\alpha^\beta |\varphi(t+\tau)|^q dt.$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in S^0_\varphi$ такую, что $L(x)_p \leq L(\varphi)_p$. Пусть 2ω — период функции φ, $a_k := \alpha + k\omega$, $k = 0, 1, \ldots, n$. По лемме 3

$$\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} \Phi(|x(t)|^p)dt \leq \int\limits_0^{\omega} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

и

$$\int\limits_{a_n}^{\beta} \Phi(|x(t)|^p)dt \leq \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt,$$

где m — точка локального максимума сплайна φ, а Θ определено в (15). Таким образом,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x(t)|^p)dt \leq n \int\limits_0^{\omega} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt + \int\limits_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi(|\varphi(t)|^p)dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|\varphi(t+\tau)|^p)dt.$$

Равенство здесь достигается для $x(t) = \varphi(t+\tau)$. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе следует из первого, если положить $\Phi(t) = t^{q/p}$.

Теорема доказана.

Пусть $k \in \mathbf{N}$ и $\varphi \in L^{k+1}_\infty$. Для $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ рассмотрим функцию $\varphi(\cdot + \tau + \tau_k)$, где

$$\tau_k := \frac{\omega}{4}\left(1 + (-1)^{k+1}\right), \tag{17}$$

а τ определено равенством (16). Ясно, что $\varphi(\cdot + \tau + \tau_k) \in S^k_\varphi$ и

$$\varphi^{(k)}(\alpha + \theta + \tau + \tau_k) = \varphi^{(k)}(\beta - \theta + \tau + \tau_k) = \|\varphi^{(k)}\|_\infty.$$

Теорема 2. *Пусть $k \in \mathbf{N}$, $\varphi \in L^{k+1}_\infty$ — S-функция, $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, $\Phi \in W$. Тогда*

$$\sup\left\{\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt : x \in S^k_\varphi\right\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|\varphi^{(k)}(t+\tau+\tau_k)|)dt,$$

где τ выбрано из условия (16). *В частности, для любого $q \geq 1$*

$$\sup\left\{\int\limits_{\alpha}^{\beta} |x^{(k)}(t)|^q dt : x \in S^k_\varphi\right\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\varphi^{(k)}(t+\tau+\tau_k)|^q dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in S^k_\varphi$. Поскольку $\varphi^{(i)}$ является функцией сравнения для $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, то

$$L(x^{(k)})_1 \leq 2\|x^{(k-1)}\|_\infty \leq 2\|\varphi^{(k-1)}\|_\infty = L(\varphi^{(k)})_1. \tag{18}$$

Поэтому, применяя теорему 1 с $p = 1$ к функции $x^{(k)} \in S^0_{\varphi^{(k)}}$, получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|\varphi^{(k)}(t + \tau + \tau_k)|)dt.$$

Равенство здесь достигается для функции $x = \varphi(t + \tau + \tau_k)$. Первое утверждение теоремы доказано. Второе непосредственно следует из первого.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Теорема 2 была доказана ранее Б. Бояновым и Н. Найденовым [4].

Для функций, имеющих нули, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть φ — S-функция с периодом 2ω, $p > 0$, $\Phi \in W$. Тогда если функция $x \in S^0_\varphi$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ таковы, что $L(x)_p < L(\varphi)_p$ и $x(\alpha) = x(\beta) = 0$, то*

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x(t)|^p)dt \le \frac{1}{\omega} \int\limits_{0}^{\omega} \Phi\left(|\varphi(t)|^p\ \right) dt.$$

В частности, для любого $q \ge p$

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} |x(t)|^q dt \le \frac{1}{\omega} \int\limits_{0}^{\omega} |\varphi(t)|^q\, dt.$$

Кроме того, если $k \in \mathbf{N}$, $\varphi \in L^{k+1}_\infty$, а функция $x \in S^k_\varphi$ и отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$ удовлетворяют условиям $x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0$, то

$$\frac{1}{b - a} \int\limits_{a}^{b} \Phi(|x^{(k)}(t)|^p)dt \le \frac{1}{\omega} \int\limits_{0}^{\omega} \Phi\left(\left|\varphi^{(k)}(t)\right|^p\ \right) dt.$$

В частности, для любого $q \ge 1$

$$\frac{1}{b - a} \int\limits_{a}^{b} |x^{(k)}(t)|^q dt \le \frac{1}{\omega} \int\limits_{0}^{\omega} \left|\varphi^{(k)}(t)\right|^q dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ и функцию $x \in S^0_\varphi$, удовлетворяющие условиям теоремы. Рассмотрим множество всех отрезков $[a_j, b_j] \subset [\alpha, \beta]$ таких, что

$$x(a_j) = x(b_j) = 0, \quad |x(t)| > 0, \quad t \in (a_j, b_j).$$

Ясно, что

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x(t)|^p)dt = \sum_j \int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi(|x(t)|^p)dt$$

и

$$\sum_j (b_j - a_j) \le \beta - \alpha.$$

Заметим, что функция x на каждом из отрезков $[a_j, b_j]$ удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому, оценивая интегралы $\int_{a_j}^{b_j} \Phi(|x(t)|^p)dt$ с помощью неравенства (7), получаем

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p)dt \le \sum_j (b_j - a_j)\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \Phi(|\varphi(t)|^p)dt \le$$

$$\le (\beta-\alpha)\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \Phi(|\varphi(t)|^p)dt.$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения зафиксируем произвольные отрезок $[a,b] \subset \mathbf{R}$ и функцию $x \in S_\varphi^k$, удовлетворяющие условиям второй части теоремы. Поскольку $\varphi^{(i)}$ является функцией сравнения для $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, то выполнены соотношения (18). Поэтому для функции $x^{(k)} \in S^0_{\varphi^{(k)}}$ выполнены условия теоремы 3 с $p = 1$. Применяя к $x^{(k)}$ первое утверждение этой теоремы, получаем второе утверждение.

4. Решение экстремальных задач на соболевских классах. Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$, удовлетворяющий условию $\varphi(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$. Пусть $A_r, A_0,\ p > 0$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p, \tag{19}$$

и положим

$$\varphi(t) := A_r \varphi_{\lambda,r}(t). \tag{20}$$

Ясно, что φ является S-функцией с периодом $2\omega = 2\pi/\lambda$. В силу (19) и (20)

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty = A_r, \quad L(\varphi)_p = A_0.$$

Рассмотрим класс функций

$$\Omega_p^r := \{x \in L_\infty^r \colon \|x^{(r)}\|_\infty \le A_r,\ L(x)_p \le A_0\}.$$

Лемма 4. *Пусть* $r \in \mathbf{N},\ A_0, A_r,\ p > 0$. *Тогда для любого* $k = 0, 1, \ldots, r-1$

$$\Omega_p^r \subset S_\varphi^k,$$

где функция φ *определена равенством* (20), *а число* λ *— равенством* (19).

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in \Omega_p^r$. Докажем сначала неравенство

$$\|x\|_\infty \le A_r \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{21}$$

Предположим, что (21) не выполнено. Тогда существует $\omega < \lambda$ такое, что

$$\|x\|_\infty = A_r \|\varphi_{\omega,r}\|_\infty. \tag{22}$$

Пусть $t_0 \in \mathbf{R}$ удовлетворяет условию

$$\|\varphi_{\omega,r}\|_\infty = \varphi_{\omega,r}(t_0) \tag{23}$$

и c — наибольший нуль сплайна $\varphi_{\omega,r}$ в промежутке $(-\infty, t_0)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется точка $t_\varepsilon \in (c, t_0)$, для которой $\varphi_{\omega,r}(t_\varepsilon) = \|\varphi_{\omega,r}\|_\infty - \varepsilon$. Положим $\delta := t_0 - t_\varepsilon$. Ясно, что $\delta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ определим функцию $\psi_\varepsilon(t)$ на $[c, c + \pi/\omega]$ следующим образом:

$$\psi_\varepsilon(t) := \begin{cases} \varphi_{\omega,r}(t-\delta), & t \in [c+\delta, t_0], \\ \varphi_{\omega,r}(t+\delta), & t \in [t_0, c+\pi/\omega - \delta], \\ 0, & t \in [c, c+\delta] \cup [c+\pi/\omega - \delta, c+\pi/\omega]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi_\varepsilon(t_0) = \|\varphi_{\omega,r}\|_\infty - \varepsilon$ и $\psi_\varepsilon(t) \to \varphi_{\omega,r}(t)$, $t \in [c, c+\pi/\omega]$, при $\varepsilon \to 0$. Из (22) и (23) следует существование такого сдвига $x_\varepsilon(t) := x(t + \tau_\varepsilon)$, что $x'_\varepsilon(t_0) = 0$ и

$$|x_\varepsilon(t_0)| \geq A_r \left(\|\varphi_{\omega,r}\|_\infty - \varepsilon\right) = A_r \psi_\varepsilon(t_0). \tag{24}$$

Согласно определению класса Ω_p^r выполнено неравенство $\|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r$. Следовательно, в силу (22) функция x удовлетворяет условиям теоремы сравнения Колмогорова [8]. По этой теореме из (24) следует неравенство

$$|x_\varepsilon(t)| \geq A_r \psi_\varepsilon(t), \quad t \in [c+\delta,\ c+\pi/\omega - \delta].$$

Поэтому

$$L(x)_p = L(x_\varepsilon)_p \geq A_r \|\psi_\varepsilon\|_{L_p[c+\delta,\ c+\pi/\omega-\delta]}.$$

Устремляя ε к нулю и учитывая (19), получаем

$$L(x)_p \geq A_r L(\varphi_{\omega,r})_p > A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p = A_0.$$

Но $x \in \Omega_p^r$ и, следовательно, $L(x)_p \leq A_0$. Полученное противоречие доказывает неравенство (21). Это неравенство вместе с неравенством $\|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r$ обеспечивают выполнение условий теоремы сравнения Колмогорова. В силу этой теоремы сплайн $\varphi(t) := A_r \varphi_{\lambda,r}(t)$ является функцией сравнения для функции x, а производная $\varphi^{(i)}$ — функцией сравнения для $x^{(i)}$, $i = 1, \ldots, r-1$, т. е. $x \in S_\varphi^k$, $k = 0, \ldots, r-1$.

Лемма доказана.

Из теорем 1, 2 и леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4 [6]. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, A_0, A_r, $p > 0$, $\Phi \in W$, $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. *Тогда*

$$\sup \left\{ \int_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p) dt : x \in \Omega_p^r \right\} = \int_\alpha^\beta \Phi(|A_r \varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p) dt$$

и

$$\sup\left\{\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi(|x^{(k)}(t)|)dt : x\in\Omega_p^r\right\}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi(|\varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau+\tau_k)|)dt,$$

где λ,τ *и* τ_k *определены равенствами* (19), (16) *и* (17) *соответственно.*

Полагая $\Phi(t)=t^{q/p},\ q\geq p,$ в первом соотношении теоремы и $\Phi(t)=t^q,$ $q\geq 1,$ во втором, получаем точные оценки норм $\|x^{(k)}\|_{L_q[\alpha,\beta]},\ k=0,1,\ldots,r-1,$ на классах Ω_p^r.

Для функций, имеющих нули, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $r\in\mathbf{N},\ p>0,\ \Phi\in W$. *Если функция* $x\in L_\infty^r$ *и отрезок* $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ *таковы, что* $L(x)_p<\infty$ *и* $x(\alpha)=x(\beta)=0,$ *то*

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi(|x(t)|^p)dt\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi\left(\left|\left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r}{r+1/p}}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}}\varphi_r(t)\right|^p\right)dt.$$

Кроме того, если $k=1,2,\ldots,r-1,$ *а функция* $x\in L_\infty^r$ *и отрезок* $[a,b]\subset\mathbf{R}$ *удовлетворяют условию* $x^{(k)}(a)=x^{(k)}(b)=0,$ *то*

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi(|x^{(k)}(t)|)dt\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi\left(\left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r-k}{r+1/p}}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}|\varphi_{r-k}(t)|\right)dt.$$

Доказательство. Пусть функция $x\in L_\infty^r$ и отрезок $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ таковы, что $A_0:=L(x)_p<\infty,\ x(\alpha)=x(\beta)=0.$ Положим $A_r:=\left\|x^{(r)}\right\|_\infty$ и выберем $\lambda>0$ из условия (19), т. е.

$$\lambda^{-1}=\left(\frac{L(x)_p}{A_rL(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{1}{r+1/p}}.$$

Тогда $x\in\Omega_p^r$. В силу леммы 4 $x\in S_\varphi^k,\ k=0,1,\ldots,r-1,$ где $2\pi/\lambda$-периодическая S-функция φ определена равенством (20), т. е. $\varphi(t):=A_r\varphi_{\lambda,r}(t)$.

Докажем первое неравенство теоремы 5. В силу первого неравенства теоремы 3, с учетом выбора λ и равенства $\varphi_{\lambda,r}(t)=\lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t),$ имеем

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi(|x(t)|^p)dt\leq\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/\lambda}\Phi\left(\left|A_r\lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)\right|^p\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi\left(\left|\left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r}{r+1/p}}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}}\varphi_r(t)\right|^p\right)dt.$$

Первое неравенство теоремы 5 доказано. Второе доказывается аналогично.

5. Решение экстремальных задач на пространствах тригонометрических полиномов. Через T_n обозначим пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Теорема 6. *Пусть* $p > 0,\ \Phi \in W$. *Если полином* $t_n \in T_n$ *и отрезок* $[\alpha, \beta] \subset \subset \mathbf{R}$ *таковы, что* $t_n(\alpha) = t_n(\beta) = 0$, *то*

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|t_n(u)|^p)du \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Phi\left(n\left|\frac{L(t_n)_p}{L(\sin(\cdot))_p}\sin u\right|^p \right)du.$$

В частности, для любого $q \ge p$

$$\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta |t_n(u)|^q\,du\right)^{1/q} \le n^{1/p}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\sin(\cdot)|^q\,du\right)^{1/q}\frac{L(t_n)_p}{L(\sin(\cdot))_p}.$$

Доказательство. Применяя первое неравенство теоремы 5 к функции $x(u) = = t_n(u)$ и оценивая $\|t_n^{(r)}\|_\infty$ с помощью нервенства Бернштейна $\|t_n^{(r)}\|_\infty \le \le n^r\|t_n\|_\infty$, имеем

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|t_n(u)|^p)du \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Phi\left(\left|\left(\frac{L(t_n)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r}{r+1/p}} (n^r\,\|t_n\|_\infty)^{\frac{1/p}{r+1/p}}\,\varphi_r(u)\right|^p \right)du.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r = 2\nu,\ \nu \to \infty$, и учитывая соотношение $|\varphi_{2\nu}(u)| \to \dfrac{4}{\pi}|\sin u|$, получаем первое неравенство теоремы. Положив в нем $\Phi(t) = t^{q/p}$, получим второе утверждение.

Пусть полином $t_n \in T_n$ имеет нули и α — его нуль. Применяя к этому полиному и отрезку $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ теорему 6, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $q \ge p > 0$. *Для любого тригонометрического полинома* t_n *порядка не выше* n, *имеющего нули, выполняется точное на классе* T_n *неравенство*

$$\|t_n\|_{L_q(\mathbf{T})} \le n^{1/p}\|\sin(\cdot)\|_{L_q(\mathbf{T})}\frac{L(t_n)_p}{L(\sin(\cdot))_p}.$$

Неравенство обращается в равенство для полиномов $t_n(u) = a\sin(nu + b),\ a, b \in \in \mathbf{R}$.

Для $A_0, p > 0$ положим

$$T_n(A_0, p) := \{t_n \in T_n : L(t_n)_p \le A_0 L(\sin n(\cdot))_p\}.$$

Любой полином $t_n \in T_n(A_0, p)$ вследствие периодичности имеет нули, так как $L(t_n)_p < \infty$.

Лемма 5. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$. *Для любого* $k = 0, 1, \ldots$

$$T_n(A_0, p) \subset S_\varphi^k,$$

где $\varphi(u) = A_0 \sin nu$.

Доказательство. Зафиксируем $t_n \in T_n(A_0, p)$. Применяя следствие 1 при $q = \infty$, получаем

$$\|t_n\|_\infty \le n^{1/p} \frac{L(t_n)_p}{L(\sin(\cdot))_p} = \frac{L(t_n)_p}{L(\sin n(\cdot))_p}.$$

Из этого неравенства и условия $L(t_n)_p \le A_0 L(\sin n(\cdot))_p$ следует, что $\|t_n\|_\infty \le A_0$. Но тогда, как известно (см., например, доказательство теоремы 8.1.1 из [1]), функция $\varphi(u) = A_0 \sin nu$ является функцией сравнения для t_n, а производная $\varphi^{(k)}$ — функцией сравнения для $t_n^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Лемма доказана.

Из теорем 1, 2 и леммы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* A_0, $p > 0$, $\Phi \in W$. *Для любого отрезка* $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|t_n(t)|^p)dt : t_n \in T_n(A_0, p)\right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(A_0|\sin n(t+\tau)|^p)dt,$$

где τ *выбрано так, что* $|\sin(n(\alpha+\theta))| = |\sin(n(\beta-\theta))| = 1$, *а* θ *определено равенством* (15), *т. е.* $\beta - \alpha = m\pi/n + 2\Theta$, $m \in \mathbf{N}$, $\Theta \in (0, \pi/(2n))$.

Кроме того, для любого $k \in \mathbf{N}$

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|t_n^{(k)}(t)|)dt : t_n \in T_n(A_0, p)\right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(n^k A_0|\sin n(t+\tau+\tau_k)|)dt,$$

где $\tau_k := \dfrac{\pi}{4n}\left(1 + (-1)^{k+1}\right)$.

Второе утверждение теоремы при $p = \infty$ получено ранее Б. Бояновым и Н. Найденовым [4] и дает решение известной задачи Эрдеша.

6. Решение экстремальных задач на пространствах сплайнов. Через $S_{n,r}$ обозначим пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in \mathbf{Z}$.

Теорема 8. *Пусть* $p > 0$, $\Phi \in W$. *Для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *и отрезка* $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ *такого, что* $s(\alpha) = s(\beta) = 0$, *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|s(u)|^p)du \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Phi\left(n\left|\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r(\cdot))_p}\varphi_r(u)\right|^p\right)du.$$

В частности, для любого $q \ge p$

$$\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta |s(u)|^q\,du\right)^{1/q} \le n^{1/p}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\varphi_r(u)|^q\,du\right)^{1/q}\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теоремы 6, но вместо неравенства Бернштейна нужно применить неравенство [10]

$$\|s^{(r)}\|_\infty \le n^{r+1/p}\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}, \quad s \in S_{n,r}, \ \ p > 0, \ \ r \in \mathbf{N},$$

и опустить предельный переход при $r \to \infty$.

Пусть сплайн $s \in S_{n,r}$ имеет нули и α — его нуль. Применяя к этому сплайну и отрезку $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ теорему 8, получаем такое следствие.

Следствие 2. *Пусть $q \geq p > 0$. Для любого сплайна $s \in S_{n,r}$, имеющего нули, выполняется точное на классе $S_{n,r}$ неравенство*

$$\|s\|_{L_q(\mathbf{T})} \leq n^{1/p} \|\varphi_r\|_{L_q(\mathbf{T})} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Неравенство обращается в равенство для сплайнов $s(t) = a\varphi_r(nt), \ a \in \mathbf{R}$.

Для $A_0, p > 0$ положим

$$S_{n,r}(A_0, p) := \{s(\cdot + \tau) : s \in S_{n,r}, \ L(s)_p \leq A_0 L(\varphi_{n,r})_p, \ \tau \in \mathbf{R}\}.$$

Любой сплайн $s \in S_{n,r}(A_0, p)$ вследствие периодичности имеет нули, так как $L(s)_p < \infty$.

Лемма 6. *Пусть $r, n \in \mathbf{N}$. Для любого $k = 0, 1, \ldots, r-1$*

$$S_{n,r}(A_0, p) \subset S^k_\varphi,$$

где $\varphi(t) = A_0 \varphi_{n,r}(t)$.

Доказательство. Зафиксируем $s \in S_{n,r}(A_0, p)$. Применяя следствие 2 при $q = \infty$, получаем

$$\|s\|_\infty \leq n^{1/p} \|\varphi_r\|_\infty \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Из этого неравенства и условия

$$L(s)_p \leq A_0 L(\varphi_{n,r})_p = A_0 n^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$$

следует, что

$$\|s\|_\infty \leq n^{1/p} \|\varphi_r\|_\infty A_0 n^{-(r+1/p)} = A_0 \|\varphi_{n,r}\|_\infty. \tag{25}$$

Но тогда в силу неравенства Тихомирова (см., например, [1], лемма 8.2.1)

$$\|s^{(r)}\|_\infty \leq \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty}, \quad s \in S_{n,r},$$

имеем $\|s^{(r)}\|_\infty \leq A_0$. Следовательно, в силу (25) выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [8]. Согласно этой теореме $\varphi(t)$ является функцией сравнения для s, а $\varphi^{(k)}$ — функцией сравнения для $s^{(k)}, \ k = 0, 1, \ldots, r-1$.

Лемма доказана.

Из теорем 1, 2 и леммы 6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть $A_0, \ p > 0, \ \Phi \in W$. Для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$*

$$\sup \left\{ \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|s(t)|^p) dt : s \in S_{n,r}(A_0, p) \right\} =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \Phi(A_0 |\varphi_{n,r}(t + \tau)|^p) dt,$$

где τ выбрано так, что $|\varphi_{n,r}(\alpha + \tau + \theta)| = |\varphi_{n,r}(\beta + \tau - \theta)| = \|\varphi_{n,r}\|_\infty$, а θ определено равенством (15), *т. е. $\beta - \alpha = m\pi/n + 2\Theta, \ m \in \mathbf{N}, \ \Theta \in (0, \pi/(2n))$.*

Кроме того, для любого $k = 1, 2, \ldots, r-1$

$$\sup\left\{\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|s^{(k)}(t)|)dt : s \in S_{n,r}(A_0, p)\right\} =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(n^k A_0 |\varphi_{n,r-k}(t+\tau+\tau_k)|)dt,$$

где $\tau_k := \dfrac{\pi}{4n}\left(1 + (-1)^{k+1}\right).$

1. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
2. *Бабенко В. Ф.* Исследования Днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 5 – 29.
3. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives and differences // Lect. Notes Math. – 1992. – **1536**. – 150 p. .
4. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. d'Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
5. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 2. – P. 148 – 168.
6. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 6. – С. 765 – 776.
7. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
8. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
9. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Anal. Math. – 1976. – **2**, № 1. – С. 11 – 40.
10. *Kofanov V. A.* Some exact inequalities of Kolmogorov type // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 3. – С. 1 – 8.

Получено 25.02.11