УДК 517.946

К. О. Буряченко (Донец. нац. ун-т)

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

We consider a Cauchy-type boundary-value problem of, a problem with three boundary conditions, and the Dirichlet problem for a general fourth-order differential equation with constant complex coefficients and nonzero right-hand side in a bounded domain $\Omega \subset R^2$ with smooth boundary. Using the method of the Green formula, the theory of expansion of differential operators, and the theory of L-traces (i.e., traces associated with a differential operation L), we obtain necessary and sufficient (for elliptic operators) conditions for the solvability of each of the problems under consideration in the space $H^m(\Omega)$, $m \geq 4$.

Рассматривается краевая задача типа Коши, задача с тремя граничными условиями и задача Дирихле для общего бестипного дифференциального уравнения четвертого порядка с постоянными комплексными коэффициентами и ненулевой правой частью в ограниченной области $\Omega \subset R^2$ с гладкой границей. С помощью метода формулы Грина, теории расширений дифференциальных операторов, теории L-следов, т. е. следов, ассоциированных с дифференциальной операцией L, получены необходимые, а в случае эллиптичности оператора и достаточные условия разрешимости каждой из задач в пространстве $H^m(\Omega)$, $m \geq 4$.

Вступ. У роботі розглядаються питання існування розв'язку задачі з трьома граничними умовами та задачі Діріхле для безтипних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами та ненульовою правою частиною. Чималу увагу приділено вивченню проблеми існування розв'язку граничної задачі типу Коші (з чотирма граничними умовами), яка є допоміжною задачею для вивчення аналогічних властивостей розв'язків задачі з трьома граничними умовами та задачі Діріхле.

Основним апаратом досліджень є метод формули Гріна та метод L-слідів, тобто слідів, асоційованих з лінійною безтипною диференціальною операцією L зі сталими комплексними коефіцієнтами. Умови існування розв'язку деяких граничних задач, які формулюються в термінах L-слідів, виникали ще при дослідженні задачі Неймана для рівняння Лапласа $\Delta u = f(x)$, $u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi(x)$: $\int_{\partial\Omega} \psi(x) ds_x = \int_\Omega f(x)dx$. Враховуючи, що для оператора $L = \Delta$ ці сліди мають вигляд $L_{(0)}u = -u|_{\partial\Omega}$, $L_{(1)}u = u'_\nu|_{\partial\Omega}$, останню умову можна записати в термінах L-слідів: $\int_{\partial\Omega} L_{(1)}u \, ds_x = \int_\Omega f(x)dx$. Поширенню цього результату на випадок деяких крайових задач для загального безтипного диференціального оператора четвертого порядку присвячено дану роботу.

В монографії [1] було розроблено метод формули Гріна для загальної безтипної лінійної диференціальної операції $\mathcal{L}$ зі сталими комплексними коефіцієнтами

$$\mathcal{L}(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

а також введено означення асоційованих з цією операцією слідів (L-слідів). Це поняття виникло у зв'язку з вивченням граничних властивостей розв'язків з простору $L_2(\Omega)$ диференціальних рівнянь з максимальним оператором $Lu = f(x) \in L_2(\Omega)$. Як показано в роботі [2], в загальному випадку звичайні сліди $u|_{\partial\Omega}$, $u'_\nu|_{\partial\Omega}, \ldots$ $\ldots, u_\nu^{(m-1)}|_{\partial\Omega}$ розв'язків цього рівняння з простору $L_2(\Omega)$ не існують навіть у сенсі узагальнених функцій. Так, у випадку $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ в одиничному крузі K функція $u(x,y) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{5/8}} \in L_2(K)$ є розв'язком рівняння $Lu = 0$, але $\langle u|_{\partial K}, 1\rangle = \infty$, оскільки $\lim_{|r| \to 1-0} \displaystyle\int_{x^2+y^2=r^2} u(x,y)ds = \infty$. Однак у кожного L_2-розв'язку рівняння $Lu = 0$ існують L-сліди [2].

При доведенні основних результатів роботи використано теореми існування розв'язків неоднорідних операторних рівнянь з мінімальним оператором [3].

У роботі доведено необхідні, а у випадку еліптичності оператора і достатні умови існування розв'язків декількох граничних задач: граничної задачі типу Коші, задачі з трьома граничними умовами та задачі Діріхле для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами. Аналогічні питання для однорідних рівнянь другого порядку повністю вивчено в [1], а для четвертого порядку — в роботах [4, 5]. Випадок неоднорідних диференціальних рівнянь четвертого порядку розглядається уперше в даній роботі.

1. Формулювання задачі. В обмеженій області $\Omega \subset R^2$ з гладкою межею $\partial\Omega$ розглянемо безтипне диференціальне рівняння четвертого порядку з ненульовою правою частиною та зі сталими комплексними коефіцієнтами:

$$L(\partial_x)u = a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x). \tag{1}$$

Для рівняння (1) розглянемо кілька граничних задач:

задачу типу Коші

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi(x), \quad u''_{\nu\nu}|_{\partial\Omega} = \sigma(x), \quad u'''_{\nu\nu\nu}|_{\partial\Omega} = \chi(x); \tag{2}$$

задачу з трьома крайовими умовами

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi(x), \quad u''_{\nu\nu}|_{\partial\Omega} = \sigma(x); \tag{3}$$

задачу Діріхле

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi(x). \tag{4}$$

Вважатимемо, що $f(x) \in H^{m-4}(\Omega)$, $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega)$, $\chi(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega)$, $m \geq 4$, ν — вектор зовнішньої нормалі, $|\nu| = 1$, $\partial_x = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, 4$.

Розв'язком задачі (1), (2) з класу $H^m(\Omega)$, $m \geq 4$, називатимемо функцію $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq 4$, яка задовольняє рівняння (1) та умови на межі (2) (див., наприклад, [1]).

Зауважимо, що символ оператора $L(D_x)$ допускає зображення $L(\xi) = a_0\xi_1^4 + a_1\xi_1^3\xi_2 + a_2\xi_1^2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2^3 + a_4\xi_2^4 = \langle \xi, a^1\rangle\langle \xi, a^2\rangle\langle \xi, a^3\rangle\langle \xi, a^4\rangle$, отже, рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\langle \nabla, a^1 \rangle \langle \nabla, a^2 \rangle \langle \nabla, a^3 \rangle \langle \nabla, a^4 \rangle u = f(x), \qquad (1^*)$$

де $a^j \in \mathbf{C}^2$, $j = 1, \ldots, 4$, — комплексні вектори, які визначаються коефіцієнтами рівняння (1), $\langle a, b \rangle = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2$ — скалярний добуток. Розглядатимемо далі також вектори $\tilde{a}^j = (-\bar{a}_2^j, \bar{a}_1^j)$, $j = 1, \ldots, 4$.

Метою роботи є отримання необхідних, а для еліптичних рівнянь і достатніх умов існування розв'язку граничних задач (2)–(4) у просторі Соболєва $H^m(\Omega)$, $m \geq 4$. Розглянемо спочатку задачу (1), (2). Основним апаратом досліджень є метод асоційованих з оператором L слідів (L-слідів).

В обмеженій області $\Omega \in R^n$ розглянемо лінійну диференціальну операцію $\mathcal{L}$ та формально спряжену до неї $\mathcal{L}^+$:

$$\mathcal{L}(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad \mathcal{L}^+(D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha (\bar{a}_\alpha \cdot), \qquad (5)$$

де $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Означення 1. *Нехай L_{00} — оператор, породжений операцією $\mathcal{L}(D_x)$ на $C_0^\infty(\Omega)$. Мінімальним оператором L_0 називається розширення оператора L_{00} на множину $D(L_0) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$. (Замикання відбувається за нормою графіка: $||u||_L^2 = ||u||_{L_2(\Omega)}^2 + ||\mathcal{L}u||_{L_2(\Omega)}^2$.)*

Означення 2. *Максимальним оператором L називається звуження $\mathcal{L}(D_x)|_{D'(\Omega)}$ на множину $D(L) := \{u \in L_2(\Omega) \colon Lu \in L_2(\Omega)\}$.*

Визначимо розширення $\tilde{L}$ мінімального оператора, що міститься в максимальному: $L_0 \subset \tilde{L} \subset L$.

Означення 3. *Оператором $\tilde{L}$ будемо називати розширення оператора L_0 на множину $D(\tilde{L}) := \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}$ (за нормою графіка).*

Означення 4. *Максимальний оператор L називається правильним, якщо $D(L) = D(\tilde{L})$.*

Означення 5. *Нехай для деякої функції $u \in D(\tilde{L})$ існують лінійні неперервні функціонали $L_{(p)}u$ над простором $H^{m-p-1/2}(\partial\Omega)$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$, такі, що виконується рівність*

$$(Lu, v) - (u, L^+ v) = \sum_{j=0}^{m-1} (L_{(m-1-j)} u, \gamma_j v), \qquad (6)$$

де $\gamma_j = p_j \gamma$, $\gamma \colon u \in H^m(\Omega) \to (u|_{\partial\Omega}, \ldots, u_\nu^{(m-1)}|_{\partial\Omega}) \in H^{(m)}$, $p_j \colon H^{(m)} \to H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$. Функціонал $L_{(p)}u$ називатимемо $L_{(p)}$-слідом функції $u \in D(\tilde{L})$.

Аналогічно можна побудувати оператори L_0^+, L^+, $\tilde{L}^+$, пов'язані з формально спряженою операцією $\mathcal{L}^+(D_x)$.

2. Теореми існування та єдиності. В цьому пункті ми сформулюємо і доведемо основні результати даної роботи.

Теорема 1. *Для існування та єдиності розв'язку задачі Коші* (1), (2) *у просторі Соболєва $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 4$, необхідно, щоб L-сліди цього розв'язку $L_{(0)}u$, $L_{(1)}u$, $L_{(2)}u$, $L_{(3)}u$ задовольняли умови*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \{L_{(3)}u \cdot Q(-\tilde{a}^j \cdot x) + L_{(2)}u \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)Q'(-\tilde{a}^j \cdot x) +$$

$$+L_{(1)}u \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^2 Q''(-\tilde{a}^j \cdot x) + L_{(0)}u \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^3 Q'''(-\tilde{a}^j \cdot x)\} ds_x =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f(x) \cdot \overline{Q(-\tilde{a}^j \cdot x)} dx \tag{7}$$

для довільного полінома $Q \in \mathbb{C}[z]$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Доведення. Нехай $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq 4$, — розв'язок задачі (1), (2). Запишемо формулу Гріна

$$\int\limits_{\Omega} \{Lu \cdot \bar{v} - u \cdot \overline{L^+ v}\} dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(m-k-1)}u \cdot v_\nu^{(k)} \, ds_x$$

для цього розв'язку u та деякої функції $v \in \operatorname{Ker} L^+$. В результаті матимемо

$$\int\limits_{\Omega} f(x) \cdot \overline{v(x)} dx = \int\limits_{\partial\Omega} \{P(x) \cdot v + R(x) \cdot v'_\nu + S(x) \cdot v''_{\nu\nu} + T(x) \cdot v'''_{\nu\nu\nu}\} ds_x, \tag{8}$$

де функції P, R, S, T — L-сліди розв'язку u задачі (1), (2), які однозначно визначаються за допомогою функцій $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\sigma(x)$, $\chi(x)$:

$$\begin{gathered} T(x) = L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega), \\ S(x) = L_{(1)}u = L(\nu)\psi(x) + \alpha_1 \varphi'_s(x) + \alpha_2 \varphi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega), \\ R(x) = L_{(2)}u = -L(\nu)\sigma(x) + \beta_1 \psi'_s(x) + \beta_2 \psi(x) + \beta_3 \varphi''_{ss}(x) + \\ +\beta_4 \varphi'_s(x) + \beta_5 \varphi(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega), \\ P(x) = L_{(3)}u = L(\nu)\chi(x) + \delta_1 \varphi'''_{sss}(x) + \delta_2 \sigma(x) + \delta_3 \psi''_{ss}(x) + \delta_4 \psi'_s(x) + \\ +\delta_5 \psi(x) + \delta_6 \varphi''_{ss}(x) + \delta_7 \varphi'_s(x) + \delta_8 \varphi(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega). \end{gathered} \tag{9}$$

Тут s — натуральний параметр $\partial\Omega$, α_i, $i = 1, 2$, β_j, $j = 1, \ldots, 5$, δ_k, $k = 1, \ldots, 8$, — функції, що гладкі за змінною x і залежать від коефіцієнтів рівняння (1).

Згідно з (1*), будь-який поліном $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) \in \mathbb{C}[z]$, $j = 1, 2, 3, 4$, належить $\operatorname{Ker} L^+$. Поклавши в (8) $v(x) = Q(-\tilde{a}^j \cdot x) \in \mathbb{C}[z]$, $j = 1, 2, 3, 4$, отримаємо умови (7).

Далі вважатимемо, що рівняння (1) еліптичне. В цьому випадку справджується, зокрема, зворотне твердження.

Теорема 2. *Нехай існує четвірка функцій* $(P, R, S, T) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega) \times \times H^{m-5/2}(\partial\Omega) \times H^{m-3/2}(\partial\Omega) \times H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $m \geqslant 4$, *яка задовольняє умови* (7) *для довільного полінома* $Q \in \mathbb{C}[z]$.

Тоді у просторі Соболєва $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 4$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *граничні дані якого пов'язані з функціями* P, R, S, T *співвідношеннями* (9).

Доведення проведемо в кілька етапів.

1. Вважатимемо, що $\varphi(x) \in H^{7/2}(\partial\Omega)$, $\psi(x) \in H^{5/2}(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, $\chi(x) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, і доведемо існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H^4(\Omega)$.

Побудуємо функцію $\omega \in H^4(\Omega)$, яка є розв'язком задачі Діріхле для правильно еліптичного рівняння:

$$\Delta^4\omega = 0, \quad \omega|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad \omega'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi(x), \quad \omega''_{\nu\nu}|_{\partial\Omega} = \sigma(x), \quad \omega'''_{\nu\nu\nu}|_{\partial\Omega} = \chi(x). \tag{10}$$

З результатів роботи [6, с. 207–218] відомо, що така функція існує.

Розв'язок задачі (1), (2) знаходитимемо у вигляді

$$u = \mathcal{U} + \omega. \tag{11}$$

Тоді з урахуванням умов (2) і (10) функція $\mathcal{U}$ є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} L(D_x)\mathcal{U} = -L(D_x)\omega + f(x), \\ \mathcal{U}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathcal{U}'_\nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathcal{U}''_{\nu\nu}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathcal{U}'''_{\nu\nu\nu}|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Оскільки, L-сліди розв'язку задачі (12) нульові, а оператор L є правильним (згідно з [7, с. 64–69]), то $\mathcal{U} \in D(L_0)$, де L_0 — мінімальний оператор, який породжений диференціальною операцією (5).

Доведемо існування розв'язку рівняння

$$L_0\mathcal{U} = -L\omega + f(x) \tag{13}$$

в $D(L_0)$. Відомо [3, с. 32], що для лінійної диференціальної операції L довільного порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами в обмеженій області з гладкою межею виконується нерівність Хермандера

$$||Lu||_{L_2} \geqslant C||u||_{L_2} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{14}$$

Згідно з означенням $D(L_0)$ нерівність (14) можна поширити на функції з $D(L_0)$. Тому образ мінімального оператора L_0 є замкненим підпростором в $L_2(\Omega)$, а отже, для доведення існування розв'язку рівняння (13) в $D(L_0)$ можна скористатися таким результатом.

Лема [8, с. 104, 107]**.** *Для існування розв'язку рівняння* $L_0\mathcal{W} = F(x) \in L_2$ *в* $D(L_0)$ *необхідно і достатньо, щоб функція* $F(x)$ *задовольняла умову*

$$\int_\Omega F(x) \cdot \overline{v(x)} dx = 0 \tag{15}$$

для будь-якої функції $v \in \ker(L^+) = \ker(L_0^*)$.

Отже, для розв'язності рівняння (13) в $D(L_0)$ достатньо перевірити виконання рівності

$$-\int_\Omega L\omega \cdot \overline{v(x)}\, dx + \int_\Omega f(x) \cdot \overline{v(x)}\, dx = 0 \tag{16}$$

для будь-якої функції $v \in \ker(L^+) = \ker(L_0^*)$. Умова (16) — це інший запис формули (15) для правої частини $F(x) = f(x) - Lw$ рівняння (13).

Розглянемо ліву частину (16) для $v = Q(-\tilde{a}^j \cdot x)$, а інтеграл $-\int_\Omega L\omega \cdot \overline{Q(-\tilde{a}^j \cdot x)} dx$ подамо за допомогою формули Гріна

$$\int\limits_{\Omega} Lu \cdot \overline{v}\, dx - \int\limits_{\Omega} u \cdot \overline{L^{+}v}\, dx = \sum_{k=0}^{3} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(3-k)}u \cdot \partial^{k} v\, ds_x.$$

В результаті матимемо

$$-\int\limits_{\Omega} L\omega \cdot \overline{Q(-\tilde{a}^j \cdot x)}\, dx + \int\limits_{\Omega} f(x) \cdot \overline{Q(-\tilde{a}^j \cdot x)}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f(x) \cdot \overline{Q(-\tilde{a}^j \cdot x)}\, dx - \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{k=0}^{3} L_{(3-k)}\omega \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^k Q^{(k)}(-\tilde{a}^j \cdot x)\, ds_x. \quad (17)$$

Оскільки функція ω — розв'язок задачі (10), то з урахуванням (9) її L-сліди мають вигляд $L_{(0)}\omega = T$, $L_{(1)}\omega = S$, $L_{(2)}\omega = R$, $L_{(3)}\omega = P$, тому права частина рівності (17) дорівнює нулю внаслідок умов (8). Отже, рівність (16) виконується для поліномів $Q(-\tilde{a}^j \cdot x)$, $j = 1, \ldots, 4$. Враховуючи можливість записати рівняння (1) у вигляді (1*) для $a^j \in \mathbb{C}^2$, $a^j \perp \tilde{a}^j$, $j = 1, \ldots, 4$, а також теорему 1 з монографії [9, с. 289], кожен поліном $q \in \ker L^+$ можна подати у вигляді

$$q = Q_1(-\tilde{a}^1 \cdot x) + Q_2(-\tilde{a}^2 \cdot x) + Q_3(-\tilde{a}^3 \cdot x) + Q_4(-\tilde{a}^4 \cdot x).$$

Отже, умова (16) справджується для всіх поліномів $q \in \ker L^+$.

Внаслідок еліптичності оператора L^+ область Ω є L^+-опуклою для носіїв [10, с. 62] (наслідок 10.8.2), що згідно з наслідками 10.5.3 та 10.6.10 [10, с. 50 – 54] призводить до щільності поліномів з $\ker L^+$ у множині всіх $L_{2,\mathrm{loc}}$-розв'язків рівняння $L^+v = 0$. Покажемо, що в даному випадку є щільність таких розв'язків у топології простору $L_2(\Omega)$. Дійсно, за теоремою 1 з [9, с. 289] кожен розв'язок v рівняння $L^+v = 0$ є сумою розв'язків вигляду $v_j(\tilde{a}^j \cdot x)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Якщо $\tilde{a}^j$ — дійсний вектор, то функцію v_j однієї змінної $(\tilde{a}^j \cdot x)$ можна продовжити за межі області визначення так, щоб продовжена функція належала простору $L_2(\Omega)$. Застосовуючи твердження про щільність у локальному просторі до продовженої функції, отримуємо щільність розв'язків у $L_2(\Omega)$. Якщо $\tilde{a}^j$ — комплексний вектор, то функція v є розв'язком рівняння $\langle \nabla, a^j \rangle \langle \nabla, \overline{a^j} \rangle v = 0$, яке після стискування вздовж осі координат перетворюється в рівняння Лапласа $\Delta \tilde{v} = 0$. Функція $\tilde{v}$ має L-слід $L_{(0)}\tilde{v} = \tilde{v}_0 \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, який можна наблизити гладкими функціями $\tilde{v}_n \to \tilde{v}_0$. За теоремою про повний набір ізоморфізмів [6, с. 8] для задачі Діріхле існує оператор $T\colon H^{-1/2}(\partial\Omega) \to L_2(\Omega)$ такий, що $T|_{H^{m-1/2}(\partial\Omega)} \in H^m(\Omega)$, тому $T\tilde{v}_n \to \tilde{v}$ в кожному просторі $H^m(\Omega)$ і $T\tilde{v}_n \in \ker L^+$ [1, с. 158]. Таким чином, рівність (16) справджується для будь-якої функції $v \in \ker L^+$, а рівняння (13) має розв'язок в $D(L_0)$.

Покажемо, що $D(L_0) = \overset{\circ}{H}{}^4(\Omega)$, тобто рівняння (13) має розв'язок в $\overset{\circ}{H}{}^4(\Omega)$. Цей факт випливає з означень просторів $D(L_0)$ (див. означення 1) і $\overset{\circ}{H}{}^4(\Omega)$ [6, с. 71], а також з еквівалентності норми графіка $||u||_L^2 = ||u||_{L_2}^2 + ||Lu||_{L_2}^2$ еліптичного оператора $L(D_x)$ з (1) і норми $||u||_{H^4(\Omega)}$ для $u \in C_0^\infty(\Omega)$, що є наслідком нерівності Гордінга [11, с. 35, 107]:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0\colon ||Lu||_{L_2}^2 \geqslant \varepsilon ||u||_{H^4}^2 - C_\varepsilon ||u||_{L_2}^2 \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отже, розв'язок задачі (12) існує та належить простору $\overset{\circ}{H}{}^4(\Omega)$. З формули (11) отримуємо існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H^4(\Omega)$.

2. Доведемо єдиність розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H^4(\Omega)$.

Нехай задача (1), (2) має два розв'язки: $u_1(x),\ u_2(x) \in H^4(\Omega)$, тоді функція $\tilde{u} = u_1 - u_2 \in D(L_0) = \overset{\circ}{H}{}^4(\Omega)$ є розв'язком однорідного рівняння з мінімальним оператором:

$$L_0\tilde{u} = 0,$$

тобто $\tilde{u} \in \ker L_0$. З нерівності Хермандера (14) для $\tilde{u} \in D(L_0)$ отримуємо $u_1(x) = u_2(x)$. Єдиність розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H^4(\Omega)$ доведено. Зауважимо, що при доведенні єдиності ми не використовували еліптичність оператора.

3. Доведемо, що за умов гладкості $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega)$, $\chi(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega)$, $m \geqslant 4$, побудований в п. 1 розв'язок $u \in H^4(\Omega)$ задачі (1), (2) належить простору $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 4$.

Розглянемо функцію $v_1 = \langle\nabla, a^2\rangle\langle\nabla, a^3\rangle\langle\nabla, a^4\rangle u$. Оскільки $u \in H^4(\Omega)$ — розв'язок задачі (1), (2), то функція $v_1 \in H^1(\Omega)$ задовольняє рівняння

$$\langle\nabla, a^1\rangle v_1 = f(x) \tag{18}$$

і умову на межі

$$v_1|_{\partial\Omega} = a_{1,1}\chi(x) + a_{1,2}\sigma'_\tau(x) + a_{1,3}\sigma(x) + a_{1,4}\psi'_\tau(x) + a_{1,5}\psi''_{\tau\tau}(x) + a_{1,6}\varphi''_{\tau\tau}(x) +$$
$$+ a_{1,7}\varphi'''_{\tau\tau\tau}(x) + a_{1,8}\psi(x) + a_{1,9}\varphi'_\tau(x) =: V_1(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega).$$

Тут і далі $a_{i,j} = a_{i,j}(k, \tau, \nu, a^1, a^2, a^3, a^4)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 9$, — гладкі за змінною $x \in \partial\Omega$ функції, k — кривизна кривої $\partial\Omega$.

Після лінійного невиродженого перетворення координат

$$x = A^1 y, \quad A^1 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_1^1 & -\operatorname{Im} a_1^1 \\ \operatorname{Re} a_2^1 & -\operatorname{Im} a_2^1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$
$$x = (x_1, x_2)^T, \quad y = (y_1, y_2)^T,$$

рівняння (18) набере вигляду

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\tilde{v}_1(y) = \tilde{f}(y),$$

де $\tilde{v}_1(y) = v_1(A^1 y)$. Застосовуючи до обох частин останнього рівняння оператор $\dfrac{\partial}{\partial y_1} - i\dfrac{\partial}{\partial y_2}$, отримуємо задачу для визначення гладкості функції $\tilde{v}_1(y)$:

$$\Delta\tilde{v}_1(y) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - i\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\tilde{f}(y) = \tilde{f}_1(y), \quad \tilde{v}_1|_{\partial\tilde{\Omega}_1} = \tilde{V}_1(y) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega), \tag{20}$$

де $\tilde{f}_1(y) \in H^{m-5}(\Omega)$, $\tilde{V}_1(y) = V_1(A^1 y)$, а через $\tilde{\Omega}_1$ позначено область, в яку перетворилась область Ω після заміни змінних (19).

Зауважимо, що гладкість граничної функції $\tilde{V}_1$ не змінилася внаслідок нескінченної диференційовності $\partial\Omega$ та диференційовності перетворення (19).

З властивостей розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа [12, с. 249, 250] відомо, що розв'язок $\tilde{v}_1(y)$ задачі (20) належить $H^{m-3}(\tilde{\Omega}_1)$. Виконуючи зворотний перехід до змінних $x = (x_1, x_2)^T$, отримуємо $v_1(x) \in H^{m-3}(\Omega)$.

Розглянемо тепер функцію $v_2 = \langle \nabla, a^3 \rangle \langle \nabla, a^4 \rangle u \in H^2(\Omega)$, яка є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} \langle \nabla,\, a^2 \rangle v_2(x) = v_1(x), \\ v_2|_{\partial\Omega} = a_{2,1}\psi(x) + a_{2,2}\sigma(x) + a_{2,3}\varphi'_\tau(x) + a_{2,4}\psi'_\tau(x) + a_{2,5}\varphi''_{\tau\tau}(x) =: \\ =: V_2(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega). \end{gathered} \tag{21}$$

Знову виконаємо заміну змінних

$$x = A^2 y, \quad A^2 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_1^2 & -\operatorname{Im} a_1^2 \\ \operatorname{Re} a_2^2 & -\operatorname{Im} a_2^2 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Тоді рівняння в (21) набере вигляду

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \tilde{v}_2(y) = \tilde{v}'_1(y),$$

де $\tilde{v}_2(y) = v_2(A^2 y) \in H^2(\tilde{\Omega}_2)$, $\tilde{v}'_1(y) = v_1(A^2 y) \in H^{m-3}(\tilde{\Omega}_2)$.

Застосовуючи оператор $\dfrac{\partial}{\partial y_1} - i \dfrac{\partial}{\partial y_2}$ до обох частин попереднього рівняння, отримуємо задачу

$$\Delta \tilde{v}_2(y) = \Big(\frac{\partial}{\partial y_1} - i \frac{\partial}{\partial y_2} \Big) \tilde{v}'_1(y) \in H^{m-4}(\tilde{\Omega}_2), \quad v_2|_{\partial\tilde{\Omega}_2} = \tilde{V}_2(y) \in H^{m-5/2}(\partial\tilde{\Omega}_2), \tag{23}$$

де $\tilde{V}_2(y) = V_2(A^2 y) \in H^{m-5/2}(\partial\tilde{\Omega}_2)$, а через $\tilde{\Omega}_2$ позначено область, в яку перейшла область Ω після заміни координат (22). З результатів роботи [12, с. 249, 250] випливає, що розв'язок задачі (23) належить простору $H^{m-2}(\tilde{\Omega}_2)$, а отже, $v_2(x) \in \in H^{m-2}(\Omega)$.

Нехай $v_3 = \langle \nabla, a^4 \rangle u$. Виконуючи аналогічні перетворення, можна показати, що $v_3(x) \in H^{m-1}(\Omega)$, як розв'язок задачі $\langle \nabla, a^3 \rangle v_3 = v_2(x) \in H^{m-2}(\Omega)$, $v_3|_{\partial\Omega} = = V_3(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$.

Розглянемо задачу відносно функції u:

$$\langle \nabla, a^4 \rangle u = v_3(x), \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi(x).$$

Виконуючи заміну змінних

$$x = A^4 y, \quad A^4 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_1^4 & -\operatorname{Im} a_1^4 \\ \operatorname{Re} a_2^4 & -\operatorname{Im} a_2^4 \end{pmatrix}$$

і застосовуючи до отриманого оператор $\dfrac{\partial}{\partial y_1} - i \dfrac{\partial}{\partial y_2}$, маємо

$$\Delta \tilde{u}(y) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \tilde{v}_3(y) \in H^{m-2}(\tilde{\Omega}_4), \quad \tilde{u}|_{\partial\tilde{\Omega}_4} = \tilde{\varphi}(y) \in H^{m-1/2}(\partial\tilde{\Omega}_4).$$

Тут $\tilde{u}(y) = u(A^4 y)$, $\tilde{v}_3(y) = v_3(A^4 y) \in H^{m-1}(\tilde{\Omega}_4)$, $\tilde{\Omega}_4$ — область, в яку перетворилась область Ω після останньої заміни координат. Звідси $\tilde{u} \in H^m(\tilde{\Omega}_4)$ або $u \in \in H^m(\Omega)$.

Теорему 2 буде доведено, якщо ми обґрунтуємо невиродженість перетворень $A^j,\ j = 1, \ldots, 4$.

Оскільки еліптичність оператора L еквівалентна комплекснозначності та лінійній незалежності компонент усіх векторів $a^j = (a_1^j, a_2^j),\ j = 1, \ldots, 4$, саме еліптичність рівняння (1) гарантує невиродженість перетворень A^j.

Вважатимемо, що перетворення A^j вироджене, тобто

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_1^j & -\operatorname{Im} a_1^j \\ \operatorname{Re} a_2^j & -\operatorname{Im} a_2^j \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

звідки $\dfrac{\operatorname{Re} a_1^j}{\operatorname{Re} a_2^j} = \dfrac{\operatorname{Im} a_1^j}{\operatorname{Im} a_2^j} = t_j \in \mathbb{R}^1$. Отже, $a^j = a_2^j(t_j, 1)$, а рівняння з комплексним вектором a^j перетворюється в рівняння з дійсним вектором $b^j = (t_j, 1)$, $j = = 1, 2, 3, 4$, що суперечить еліптичності диференціального рівняння (1).

Теорему доведено.

3. Деякі застосування. Задача (1), (2) є допоміжною при дослідженні властивостей задачі (1), (3) та задачі Діріхле (1), (4).

Зауваження. З теореми 1 випливає, що виконання умов (7) є необхідною умовою існування у просторі $H^m(\Omega)$, $m \geq 4$, єдиного розв'язку не лише задачі (1), (2), а і задачі з трьома граничними умовами (1), (3), а також задачі Діріхле (1), (4).

З теореми 2 маємо достатні умови існування розв'язку задачі з трьома граничними умовами (1), (3).

Теорема 3. *Нехай існує функція* $P(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega)$, *яка однозначно визначається за допомогою даних задачі* (1), (3): *функцій* $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega), \sigma(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega)$, *і четвірка* $(P, R, S, T) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega) \times \times H^{m-5/2}(\partial\Omega) \times H^{m-3/2}(\partial\Omega) \times H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $m \geqslant 4$, *задовольняє умови* (7) *для довільного полінома* $Q \in \mathbb{C}[z]$.

Тоді у просторі Соболєва $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 4$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (3), *граничні дані якого пов'язані з функціями* R, S, T *за допомогою співвідношень* (9).

Явні формули для визначення функції $P(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega)$ за допомогою відомих функцій $(R,\, S,\, T) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega) \times H^{m-3/2}(\partial\Omega) \times H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ отримують із розв'язання співвідношень (7) для конкретних областей. У деяких випадках це достатньо зробити для $f(x) = 0$. Дійсно, розв'язок u задачі (1), (2) можна подати у вигляді $u = u_1 + u_2$, де u_1 — розв'язок задачі (1^0) (для $f(x) = 0$), (2), u_2 — розв'язок задачі (1), (2^0) (для $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, $\sigma(x) = 0$, $\chi(x) = 0$). Для будь-якої правої частини $f(x) \in B_{p,k}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ розв'язок u_2 задачі (1), (2^0) існує і належить простору $B_{p,\tilde{L}k}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\tilde{L}^2(\xi) = \sum_{|\alpha| \geq 0} |L^{(\alpha)}(\xi)|^2$ (див. [10], теорема 10.6.7). Існування розв'язку u_1 задачі (1^0), (2) доведено в роботі [4], яка присвячена саме однорідним рівнянням четвертого порядку.

У випадку одиничного круга $K = \{x \in R^2 \colon |x| \leq 1\}$ у роботі [4] отримано явні формули для коефіцієнтів Фур'є функції $P(x)$ та досліджено їх асимптотику (тобто гладкість функції $P(x)$).

Аналогічне твердження отримуємо і для задачі Діріхле (1), (4).

Теорема 4. *Нехай існує пара функцій* $(P,\, R) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega) \times H^{m-5/2}(\partial\Omega)$, *яка однозначно визначена даними задачі* (1), (4): *функціями* $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, *і четвірка* $(P, R, S, T) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega) \times H^{m-5/2}(\partial\Omega) \times H^{m-3/2}(\partial\Omega) \times H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $m \geqslant 4$, *задовольняє умови* (7) *для довільного полінома* $Q \in \mathbb{C}[z]$.

Тоді у просторі Соболєва $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 4$, *існує єдиний розв'язок задачі Діріхле* (1), (4), *граничні дані якого пов'язані з функціями* S, T *співвідношеннями* (9).

У роботі [5] у випадку одиничного круга $\Omega = K = \{x \in R^2 \colon |x| \leq 1\}$ отримано явні формули для визначення пари функцій $(P,\, R) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega) \times H^{m-5/2}(\partial\Omega)$ за допомогою відомих функцій $(S,\, T) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega) \times H^{m-1/2}(\partial\Omega)$.

1. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
2. *Бурский В. П.* Граничные свойства L_2-решений линейных дифференциальных уравнений и двойственность уравнение-область // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 5. – С. 1036 – 1039.
3. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 131 с.
4. *Буряченко Е. А.* Разрешимость краевой задачи с тремя граничными условиями для дифференциальных уравнений четвертого порядка в круге // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2002. – **7**. – С. 17 – 32.
5. *Буряченко Е. А.* Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле в круге для линейных эллиптических уравнений четвертого порядка // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2000. – **5**. – С. 20 – 29.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
7. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 207 с.
8. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
9. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов. – М.: Мир, 1986. – Т.2. – 456 с.
11. *Егоров Ю. В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.
12. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

Одержано 17.03.11,
після доопрацювання — 29.06.11