УДК 519.21

О. В. Іванов, І. М. Савич (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ПРО АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ОЦІНКИ КОЕНКЕРА – БАССЕТА ПАРАМЕТРА НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З СИЛЬНО ЗАЛЕЖНИМ ШУМОМ

We prove that, under certain regularity conditions, the asymptotic distribution of the Koenker – Bassett estimator coincides with the asymptotic distribution of the integral of the indicator process generated by a random noise weighted by the gradient of the regression function.

Доказано, что при некоторых условиях регулярности асимптотическое распределение оценки Коенкера – Бассета совпадает с асимптотическим распределением интеграла от порожденного случайным процессом индикаторного процесса, взвешенного градиентом функции регрессии.

Вступ. Математичні моделі спостережень „сигнал плюс шум” мають велику сферу застосувань у різних галузях природничих та соціальних наук, таких як теорія турбулентності, метеорологія, гідрологія, геофізика, статистична радіофізика, хімічна кінетика, економетрика, фінанси, соціологія тощо.

Вивчення випадкових процесів з кореляцією, яка збігається з гіперболічною швидкістю, тобто процесів з неінтегровними коваріаційними функціями, призводить до складних імовірнісних та статистичних задач. Протягом останніх двох десятиріч спостерігається прогрес у теоретичному осмисленні явища сильної залежності. З іншого боку, нещодавні прикладні дослідження підтвердили, що дані наукових областей, згаданих вище, демонструють сильну залежність (див. роботи [1 – 3], які містять огляди та бібліографію з тематики сильної залежності, розпочатої ще в [4]).

Для оцінювання параметрів таких нелінійних моделей регресії можна використовувати оцінку, запропоновану в [5]. Вона є оцінкою невідомого параметра β-квантиля спостережень. Величина $\beta \in (0,1)$ визначається за розподілом випадкового шуму. Таким чином, можна вважати дану нелінійну модель моделлю квантильної регресії. Цій тематиці присвячено багато праць (див., наприклад, [6 – 8]).

1. Опис моделі. Основні припущення і позначення. У даній статті розглядається нелінійна регресійна модель

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

де $g(t,\tau)$ — дійсна неперервна за сукупністю змінних $(t,\tau) \in R_+^1 \times \Theta^c$ функція, $\Theta \subset R^q$ — відкрита обмежена опукла множина параметрів, яка містить θ. Відносно $\varepsilon(t)$ припустимо наступне:

A₁. $\varepsilon(t)$, $t \in R^1$, — локальний функціонал від гауссівського стаціонарного процесу $\xi(t)$, тобто $\varepsilon(t) = G(\xi(t))$; $G(x)$, $x \in R^1$; — борелівська функція, до того ж

$$E\varepsilon(0) = 0, \quad E\varepsilon^2(0) < \infty.$$

A$_2$. $\xi(t)$, $t \in R^1$, — дійсний неперервний у середньому квадратичному вимірний стаціонарний гауссівський процес, який визначено на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$. Коваріаційна функція (к. ф.) $\xi(t)$ має вигляд $\mathrm{E}\,\xi(t)\xi(0) = \mathrm{B}(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (1/2, 1)$, де $L(t)$ — повільно змінна на нескінченності функція, а $\mathrm{E}\xi(t) = 0$, $\mathrm{E}\xi^2(t) = \mathrm{B}(0) = 1$.

Позначимо через $F(x)$ функцію розподілу (ф. р.) $\varepsilon(0)$.

A$_3$. $F(0) = \beta, \beta \in (0,1)$.

Введемо функцію $\rho_\beta(x) = \begin{cases} \beta x, & x \ge 0, \\ (\beta - 1)x, & x < 0, \end{cases}$ $\beta \in (0,1)$.

Означення 1. *Оцінкою Коенкера – Бассета невідомого параметра* $\theta \in \Theta$, *одержаною за спостереженнями* $X(t)$, $t \in [0, T]$, *виду* (1) *та функцією втрат* $\rho_\beta(x)$, $x \in R^1$, *називається будь-який випадковий вектор* $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(X(t),\ t \in [0,T]) \in \Theta^c$, *для якого*

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \inf_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \qquad Q_T(\tau) = \int_0^T \rho_\beta\left(X(t) - g(t,\tau)\right) dt.$$

Зауважимо, що за введених умов оцінка Коенкера – Бассета існує (див., наприклад, роботи [9 – 11]).

Оскільки $\mathrm{P}(X(t) < g(t,\theta)) = \mathrm{P}(\varepsilon(t) < 0) = \mathrm{P}(\varepsilon(0) < 0) = \beta$, то модель спостережень (1) можна інтерпретувати як нелінійну квантильну регресію. Дійсно, $\hat{\theta}_T$ є оцінкою невідомого параметра θ β-квантилів $g(t,\theta)$ спостережень $X(t)$, $t \in [0,T]$.

A$_4$. Випадкова величина $\varepsilon(0)$ має обмежену щільність $p(x) = F'(x)$, яка задовольняє умову $|p(x) - p(0)| \le H|x|$, $p(0) > 0$, де $H < \infty$ — деяка стала.

Припустимо, що функція $g(t,\tau)$ двічі неперервно диференційовна по $\tau \in \Theta^c$, та введемо позначення $g_i(t,\tau) = \dfrac{\partial}{\partial \tau_i} g(t,\tau)$, $g_{il}(t,\tau) = \dfrac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_l} g(t,\tau)$, $d_T^2(\theta) = \operatorname{diag}\left(d_{iT}^2(\theta)\right)_{i=1}^q$, $d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t,\theta)dt$, $d_{il,T}^2(\tau) = \int_0^T g_{il}^2(t,\tau)\,dt$, $\tau \in \Theta^c$, i, $l = \overline{1,q}$. Будемо вважати, що $\underline{\lim}_{T\to\infty} T^{-1/2} d_{iT}(\theta) > 0$, $i = \overline{1,q}$. Ці границі можуть дорівнювати і нескінченності.

Виконаємо заміну змінних у функції регресії $u = T^{-1/2} d_T(\theta)(\tau - \theta)$ та позначимо $h(t,u) = g(t, \theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta) u)$, вважаючи, що θ є істинним значенням параметра. При цьому параметрична множина Θ переходить у $\tilde{U}_T(\theta) = T^{-1/2} U_T(\theta)$, де $U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta - \theta)$. Після такої заміни оцінка Коенкера – Бассета $\hat{\theta}_T$ переходить у нормований вектор $\bar{u}_T = T^{-1/2} d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$.

Позначимо

$$h_i(t,u) = g_i\left(t, \theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta) u\right),$$

$$h_{il}(t,u) = g_{il}\left(t, \theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta) u\right), \quad i,l = \overline{1,q},$$

$$Q_T^*(u) = Q_T\left(\theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta) u\right), \quad u \in \tilde{U}_T^c(\theta), \qquad V(r) = \left\{u \in R^q : \|u\| < r\right\},$$

$$\Phi_T(u_1,u_2) = \int_0^T \left(h(t,u_1) - h(t,u_2)\right)^2 dt,$$

$$\Phi_T^{(i)}(u_1,u_2) = \int_0^T \left(h_i(t,u_1) - h_i(t,u_2)\right)^2 dt, \quad i = \overline{1,q}, \quad u_1, u_2 \in \tilde{U}_T^c(\theta),$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^+(t) + \varepsilon^-(t),$$

де

$$\varepsilon^+(t) = \varepsilon(t)\chi\{\varepsilon(t) \ge 0\}, \quad \varepsilon^-(t) = \varepsilon(t)\chi\{\varepsilon(t) < 0\}.$$

$\mathbf{B_1}$. Для достатньо великих T $(T > T_0)$

$$\sup_{\tau \in \Theta^c} \sup_{0 \le t \le T} |g_i(t,\tau)| d_{iT}^{-1}(\theta) \le k^i T^{-1/2}, \tag{2}$$

$$\sup_{\tau \in \Theta^c} d_{il,T}(\tau) d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \le k^{il} T^{-1/2}. \tag{3}$$

З умов (2) та (3) для довільних $r \ge 0$, $i, l = \overline{1,q}$ випливають нерівності

$$\sup_{u \in V^c(r) \bigcap \tilde{U}_T^c(\theta)} \sup_{0 \le t \le T} |h_i(t,u)| d_{iT}^{-1}(\theta) \le k^{(i)}(r) T^{-1/2}, \tag{4}$$

$$\sup_{u \in V^c(r) \bigcap \tilde{U}_T^c(\theta)} d_{il,T}\left(\theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta) u\right) d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \le k^{(il)}(r) T^{-1/2}. \tag{5}$$

У свою чергу, як показано в [12], із (4) випливає нерівність

$$\sup_{u_1,u_2 \in V^c(r) \bigcap \tilde{U}_T^c(\theta)} T^{-1} \Phi_T(u_1,u_2) \|u_1 - u_2\|^{-2} \le k(r) < \infty, \tag{6}$$

а з (5) — нерівність

$$\sup_{u_1,u_2 \in V^c(r) \bigcap \tilde{U}_T^c(\theta)} \Phi_T^{(i)}(u_1,u_2) d_{iT}^{-2}(\theta) \|u_1 - u_2\|^{-2} \le \tilde{k}^{(i)}(r), \quad i = \overline{1,q}. \tag{7}$$

Припустимо, що для довільного $r > 0$ існує $\Delta(r) > 0$ таке, що для $T > T_0$

$$\inf_{u \in \tilde{U}_T^c(\theta) \setminus V^c(r)} T^{-1} E Q_T^*(u) \ge E\varepsilon^+(0) + \Delta(r), \tag{8}$$

до того ж для деяких $r_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ $\Delta(r_0) \ge (2 + \delta_0) E\varepsilon^+(0)$.

У роботі [13] доведено, що якщо виконуються умови $\mathbf{A_1} - \mathbf{A_3}$, $\mathbf{B_1}$ та умова розрізнення параметрів (8), то для довільного $r > 0$

$$\mathrm{P}\left(\|\bar{u}_T\| \geq r\right) = O(B(T)) \quad \text{при} \quad T \to \infty . \tag{9}$$

Останнє співвідношення є деякою підсиленою властивістю слабкої консистентності оцінки Коенкера – Бассета.

Позначимо $I_T(\theta) = \left(d_{iT}^{-1}(\theta)\, d_{lT}^{-1}(\theta) \int_0^T g_i(t,\theta) g_l(t,\theta)\, dt \right)_{i,l=1}^q$, $\lambda_{\min}(I_T(\theta))$ — найменше власне число $I_T(\theta)$.

B$_2$. $\lambda_{\min}(I_T(\theta)) \geq \lambda_0 > 0$ для $T > T_0$.

Нехай S^1 — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин R^1. Розглянемо на (R^1, S^1) сім'ю комплексних матричних мір $\mu_T(d\lambda,\theta) = \mu_T(\lambda,\theta)d\lambda$ з матричними щільностями відносно міри Лебега $\mu_T(\lambda,\theta) = \left(\mu_T^{kl}(\lambda,\theta)\right)_{k,l=1}^q$,

$$\mu_T^{kl}(\lambda,\theta) = g_T^k(\lambda,\theta)\overline{g_T^l(\lambda,\theta)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| g_T^k(\lambda,\theta) \right|^2 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g_T^l(\lambda,\theta) \right|^2 d\lambda \right)^{-1/2},$$

$$g_T^k(\lambda,\theta) = \int_0^T e^{i\lambda t} g_k(t,\theta)\, dt .$$

Означення 2 [4, 14 – 17]. *Якщо сім'я мір* $\mu_T(d\lambda,\theta)$ *при* $T \to \infty$ *слабко збігається до невід'ємно означеної матричної міри* $\mu(d\lambda,\theta)$, *то міра* $\mu(d\lambda,\theta)$ *називається спектральною мірою функції регресії* $g(t,\theta)$.

Це означає, що для будь-якої обмеженої та неперервної дійсної функції $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in R^1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\mu_T(\lambda,\theta)\, d\lambda \xrightarrow[T\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\mu(d\lambda,\theta) , \tag{10}$$

елементами $\mu^{kl}(d\lambda,\theta)$ матриці $\mu(d\lambda,\theta)$ є комплексні заряди обмеженої варіації та матриця $\mu(A,\theta)$ невід'ємно означена для будь-якої множини $A \in S^1$.

Означення 3 [14]. *Дійсна функція* $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in R^1$, *називається* μ*-припустимою, якщо вона інтегровна за мірою* μ, *тобто всі елементи матриці* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\mu(d\lambda,\theta)$ *набувають скінченних значень, та виконується* (10) *за умови слабкої збіжності* μ_T *до* μ.

B$_3$. (i) Існує $\mu(d\lambda,\theta)$ — спектральна міра функції регресії $g(t,\theta)$.

(ii) Спектральна щільність (с. щ.) $f(\lambda)$, $\lambda \in R^1$, випадкового процесу $\xi(t)$ є μ-припустимою.

За умов $\lim_{T\to\infty} d_{kT}^2(\theta) = \infty$, $\sup_{0\leq t\leq T} |g_k(t,\theta)| = o\left(d_{kT}^2(\theta)\right)$, $T \to \infty$, $k = \overline{1,q}$, компоненти $\mu^{kl}(d\lambda,\theta)$ визначаються із співвідношень

$$R^{kl}(s) = \lim_{T\to\infty} d_{kT}^{-1}(\theta)\, d_{lT}^{-1}(\theta) \int_0^T g_k(t+s,\theta) g_l(t,\theta)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} \mu^{kl}(d\lambda, \theta), \quad k, l = \overline{1,q},$$

за додаткового припущення неперервності матриці $R(s) = (R^{kl}(s))_{k,l=1}^{q}$ в нулі [14].

Якщо б к. ф. $B(t) = \mathrm{E}\,\xi(t)\xi(0)$ була абсолютно інтегровною на R^1 (випадок слабкої залежності $\xi(t)$), то процес $\xi(t)$, $t \in R^1$, мав би обмежену та неперервну с.щ. f і для $\varphi = f$ виконувалось би (10). Якщо с. щ. f обмежена та міра μ точок її розриву дорівнює нулю, збіжність (10) також має місце (див., наприклад, [18]).

З іншого боку, якщо к.ф. B не інтегровна (випадок сильної залежності $\xi(t)$), а с.щ. f існує, то вона може втрачати властивість обмеженості, тому граничний перехід у (10) для $\varphi = f$ треба обґрунтовувати. Деякі достатні умови μ-припустимості с.щ. f наведено у роботі [19].

2. Формулювання теореми. Нехай e — довільний напрям у R^q та $\tau \in \Theta$. Зауважимо, що якщо функції $g_i(t,\tau)$ належать $C([0,T] \times \Theta^c)$, $i = 1, \ldots, q$, то можливість однобічного диференціювання за довільним напрямком під знаком інтеграла $Q_T(\tau) = \int_0^{\mathrm{T}} \rho_\beta(X(t) - g(t,\tau))\, dt$ випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність.

Позначимо $\dfrac{\partial}{\partial e} Q_T(\tau) = \lim_{\lambda \to 0+} \dfrac{Q_T(\tau + \lambda e) - Q_T(\tau)}{\lambda}$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial e} Q_T(\tau) = \int_0^{\mathrm{T}} \langle \nabla g(t,\tau), e \rangle \big(\chi\{X(t) * g(t,\tau)\} - \beta \big)\, dt,$$

де $*$ позначає $\le$, якщо $\langle \nabla g(t,\tau), e \rangle \ge 0$, і $<$, якщо $\langle \nabla g(t,\tau), e \rangle < 0$.

Нехай d_0 — відстань між θ та $R^q \setminus \Theta$. Якщо відбувається подія $\left\{ \left\| \hat{\theta}_T - \theta \right\| < r \right\}$ та $r < d_0$, то для довільного напрямку e $\dfrac{\partial}{\partial e} Q_T(\hat{\theta}_T) \ge 0$. Це зауваження буде використано при доведенні теореми 1.

Нехай $e^1, \ldots, e^q$ — додатні напрямки координатних осей. Розглянемо вектори $Q_T^{\pm}(\tau)$ з координатами

$$Q_{iT}^{\pm}(\tau) = d_{iT}^{-1}(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial(\pm e^i)} \right) Q_T(\tau) =$$

$$= \pm d_{iT}^{-1}(\theta) \int_0^T g_i(t,\tau) \big(\chi\{X(t) * g(t,\tau)\} - \beta \big)\, dt, \quad i = \overline{1,q}.$$

Зауважимо, що

$$Q_T^{+}(\tau) = -Q_T^{-}(\tau) =$$

$$= d_T^{-1}(\theta)\int_0^T \nabla g(t,\tau)\big(\chi\{X(t)<g(t,\tau)\}-\beta\big)\,dt \quad \text{майже напевно}$$

для детермінованого τ, але $Q_T^{+}(\hat{\theta}_T)$ може не збігатися з $-Q_T^{-}(\hat{\theta}_T)$.

Введемо також вектори $\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\tau)$ з координатами

$$\mathrm{E}\,Q_{iT}^{\pm}(\tau) = \pm d_{iT}^{-1}(\theta)\int_0^T g_i(t,\tau)\big(F\big(g(t,\tau)-g(t,\theta)\big)-\beta\big)\,dt, \quad i=\overline{1,q}.$$

Завдяки умові $\mathbf{A_3}$, очевидно, $\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\theta)=0$.

Позначимо $\Lambda_T(\theta)=I_T^{-1}(\theta)$.

Теорема 1. *Нехай виконано умови* $\mathbf{A_1}-\mathbf{A_4}$, $\mathbf{B_1}-\mathbf{B_3}$ *та оцінка Коенкера – Бассета* $\hat{\theta}_T$ *є консистентною в сенсі* (9). *Тоді асимптотичний при* $T\to\infty$ *розподіл вектора* $d_T(\theta)(\hat{\theta}_T-\theta)$ *збігається з асимптотичним розподілом, якщо він існує, вектора* $-p^{-1}(0)\Lambda_T(\theta)Q_T^{+}(\theta)$.

Встановлення, наприклад, асимптотичної нормальності $Q_T^{+}(\theta)$ є досить складною задачею. За умов теореми 1 одне таке твердження, при доведенні якого використовується центральна гранична теорема для кратних стохастичних інтегралів і діаграмна техніка, сформульовано в [20].

3. Допоміжні твердження. При доведенні наступного факту використовується метод фрагментації параметричної множини, який належить Хьюберу [21, 22]. Введемо позначення

$$Q_T^{*\pm}(u) = Q_T^{\pm}\left(\theta+T^{1/2}d_T^{-1}(\theta)u\right),$$

$$z_T^{\pm}(\theta,u) = \left\|Q_T^{*\pm}(u)-Q_T^{*\pm}(0)-\mathrm{E}\,Q_T^{*\pm}(u)\right\|\left(1+\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{*\pm}(u)\right\|\right)^{-1}.$$

Лема 1. *При виконанні умов* $\mathbf{A_1}-\mathbf{A_4}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ *для довільного* $\varepsilon>0$ *та достатньо малих* $r>0$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{u\in V^c(r)\bigcap \tilde{U}_T^c(\theta)} z_T^{\pm}(\theta,u)>\varepsilon\right)\xrightarrow[T\to\infty]{} 0. \tag{11}$$

Доведення проведемо для величини $z_T^{+}(\theta,u)$. Припустимо, для простоти, що $r=1$ та супремум у (11) задано у кубі $C_0=\left\{u:\|u\|_0=\max_{1\le i\le q}|u_i|\le 1\right\}\supset V^c(1)$. Виконаємо покриття куба C_0 за допомогою $N_0=O(\ln T)$ кубів $C_{(1)},\ldots,C_{(N_0)}$ таким чином. Нехай $p\in(0,1)$ — деяке число. Побудуємо концентричну систему множин

$$C^{(m)} = \left\{u:\ \|u\|_0 \in \left[(1-p)^{m+1}, (1-p)^m\right]\right\}, \quad m = \overline{0,\, m_0 - 1},$$

$$C^{(m_0)} = \left\{u:\ \|u\|_0 < (1-p)^{m_0}\right\}.$$

Покриємо кожну з множин $C^{(m)}$ однаковими кубами зі стороною

$$a_m = (1-p)^m - (1-p)^{m+1} = p(1-p)^m$$

та пронумеруємо ці куби. Вони формують необхідне покриття $C_{(1)}, \ldots, C_{(N_0-1)}$, $C_{(N_0)} \equiv C^{(m_0)}$. Виберемо $m_0 = m_0(T)$ з умови R^q, $C^{(m)}$, $\gamma \in (1/2, 1)$.

Зауважимо, що $\|\cdot\|_0$ — відстань від $C_{(l)}$ до 0 — є $r(l) = (1-p)T^{-\gamma \cdot m \cdot \tilde{m}_0^{-1}}$, та $\|\cdot\|_0$ — діаметр $C_{(l)}$ — дорівнює $a(l) = pT^{-\gamma m \tilde{m}_0^{-1}}$ для деякого $m = m(l)$, $l = \overline{1, N_0 - 1}$. Більш того, якщо куб $C_{(l)}$ є елементом покриття множини $C^{(m)}$, то $a(l) = a_m$. Кількість кубів $C_{(l)}$ покриття кожної множини $C^{(m)}$ можна зробити незалежною від m і, відповідно, від T. Щоб у цьому переконатися, розглянемо будь-який октант у R^q. Об'єм тієї частини множини $C^{(m)}$, що лежить у цьому октанті, складає $(1-p)^{mq} - (1-p)^{(m+1)q}$, а об'єм куба $C_{(l)}$ дорівнює $a^q(l) = p^q(1-p)^{mq}$. Таким чином, максимальна „кількість" кубів $C_{(l)}$, що покривають частину $C^{(m)}$, яка знаходиться в даному октанті, дорівнює

$$\left((1-p)^{mq} - (1-p)^{(m+1)q}\right)p^{-q}(1-p)^{-mq} = \left(1-(1-p)^q\right)p^{-q}.$$

З того, що $m_0 = O(\ln T)$, випливає, що $N_0 = O(\ln T)$ також. Отже, маємо

$$\mathrm{P}\left(\sup_{u \in C_0} z_T^+(\theta, u) > \varepsilon\right) \le \sum_{l=1}^{N_0} \mathrm{P}\left(\sup_{u \in C_{(l)}} z_T^+(\theta, u) > \varepsilon\right). \tag{12}$$

Оцінимо кожен доданок у (12). Загальний елемент матриці похідних $D_T(u)$ відображення $u \mapsto \mathrm{E}\, Q_T^{*+}(u)$ має вигляд

$$D_T^{il}(u) = \frac{\partial}{\partial u_l} \mathrm{E}\, Q_{iT}^{*+}(u) =$$

$$= T^{1/2} d_{iT}^{-1}(\theta)\, d_{lT}^{-1}(\theta) \int_0^T h_{il}(t,u)\left[F\left(h(t,u) - h(t,0)\right) - \beta\right] dt +$$

$$+ T^{1/2} d_{iT}^{-1}(\theta)\, d_{lT}^{-1}(\theta) \int_0^T h_i(t,u) h_l(t,u) p\left(h(t,u) - h(t,0)\right) dt =$$

$$= {}_1D_T^{il}(u) + {}_2D_T^{il}(u).$$

Беручи до уваги (5), (6) та нерівність $\sup_{x\in R^1} p(x) = p_0 < \infty$, для $\|u\| < r$ отримуємо

$$T^{-1/2}\left|{}_1D_T^{il}(u)\right| \le T^{1/2} d_{iT}^{-1}(\theta)\, d_{lT}^{-1}(\theta)\, d_{il,T}\left(\theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta)u\right)\times$$

$$\times\left(T^{-1}\int_0^T \left[F\left(h(t,u)-h(t,0)\right)-F(0)\right]^2 dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le k^{(il)}(r) p_0 k^{1/2}(r)\|u\|. \tag{13}$$

З іншого боку,

$$\left|T^{-1/2}\,{}_2D_T^{il}(u) - p(0)I_{il}(\theta)\right| \le$$

$$\le p_0 d_{iT}^{-1}(\theta)\, d_{lT}^{-1}(\theta)\left[\left(\Phi_T^{(i)}(u,0)\right)^{1/2}\left(\Phi_T^{(l)}(u,0)\right)^{1/2} +\right.$$

$$\left. + d_{iT}(\theta)\left(\Phi_T^{(l)}(u,0)\right)^{1/2} + d_{lT}(\theta)\left(\Phi_T^{(i)}(u,0)\right)^{1/2}\right] +$$

$$+ d_{iT}^{-1}(\theta)\, d_{lT}^{-1}(\theta)\left|\int_0^T g_i(t,\theta) g_l(t,\theta)\left(p\left(h(t,u)-h(t,0)\right)-p(0)\right)dt\right|. \tag{14}$$

З (7) випливає, що доданки у квадратних дужках обмежені величиною

$$p_0\left[\left(\tilde{k}^{(i)}(r)\right)^{1/2}\left(\tilde{k}^{(l)}(r)\right)^{1/2} + \left(\tilde{k}^{(l)}(r)\right)^{1/2} + \left(\tilde{k}^{(i)}(r)\right)^{1/2}\right]\|u\|.$$

Для останнього доданка (14), використовуючи умови $\mathbf{A_4}$, (4) та нерівність (6), знаходимо мажоранту

$$HT^{1/2}\, d_{iT}^{-1}(\theta)\sup_{0\le t\le T}|g_i(t,\theta)|\left(T^{-1/2}\Phi_{2T}^{1/2}(u,0)\right) \le Hk^{(i)}(r)k^{1/2}(r)\|u\|. \tag{15}$$

За формулою Тейлора

$$T^{-1/2}\,\mathrm{E}\,Q_{iT}^{*+}(u) = \sum_{l=1}^{q} T^{-1/2} D_T^{il}(u^{(i)})\,u_l, \quad \left\|u^{(i)}\right\| < \|u\|, \quad i = \overline{1,q}.$$

Позначимо $H_T = \left(T^{-1/2} D_T^{il}(u^{(i)})\right)_{i,l=1}^{q}$. Тоді, як ми довели, $H_T = p(0)I_T(\theta) +$ $+ M_T$, де $M_T^{il} \underset{u\to 0}{\to} 0$, $i, l = \overline{1,q}$, рівномірно по T. Очевидно,

$$H_T' H_T = p^2(0) I_T^2(\theta) + \left(p(0)\left(M_T' I_T(\theta) + I_T(\theta) M_T\right) + M_T' M_T\right).$$

Використовуючи властивість власних чисел суми двох симетричних матриць (див. [23, с. 101 – 103]), маємо

$$\left|\lambda_{\min}(H_T' H_T) - p^2(0)\lambda_{\min}(I_T^2(\theta))\right| \le$$

$$\leq q\left(p(0)\max_{1\leq i,l\leq q}\left|\left(M_T' I_T(\theta)+I_T(\theta)M_T\right)^{il}\right|+\max_{1\leq i,l\leq q}\left|\left(M_T' M_T\right)^{il}\right|\right) =$$

$$= O\left(\|u\|\right).$$

Таким чином, за умови $\mathbf{B_2}$ матриця $H_T' H_T$ додатно означена рівномірно по $T > T_0$ для достатньо малих u (для простоти припустимо, що для $u \in C_0$) та для деякого $k_0 > 0$

$$\left\|T^{-1/2}\,\mathrm{E}\,Q_T^{*+}(u)\right\|^2 = \left\langle H_T' H_T u, u\right\rangle \geq k_0^2\,\|u\|_0^2,$$

або

$$\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{*+}(u)\right\| \geq k_0 T^{1/2}\,\|u\|_0. \tag{16}$$

Нехай $l \neq N_0$ та $v \in C_{(l)}$ — довільна точка. Тоді, використовуючи (16), можна записати

$$\sup_{u\in C_{(l)}} z_T^{+}(\theta,u) \leq \left(\sup_{u\in C_{(l)}} M_T^{(l)}(\theta,u,v)+L_T^{(l)}(\theta,v)\right)\left(1+k_0 T^{1/2} r(l)\right)^{-1},$$

де

$$M_T^{(l)}(\theta,u,v)=\sum\nolimits_{\lambda=1}^{4} M_{\lambda T}^{(l)}(\theta,u,v),$$

$$M_{1T}^{(l)}(\theta,u,v) = \left\|d_T^{-1}(\theta)\int_0^T \nabla h(t,u)\left(\chi\left\{X(t)<h(t,u)\right\}-\chi\left\{X(t)<h(t,v)\right\}\right)dt\right\|,$$

$$M_{2T}^{(l)}(\theta,u,v) = \left\|d_T^{-1}(\theta)\int_0^T \left(\nabla h(t,u)-\nabla h(t,v)\right)\left(\chi\left\{X(t)<h(t,v)\right\}-\beta\right)dt\right\|,$$

$$M_{3T}^{(l)}(\theta,u,v) = \left\|d_T^{-1}(\theta)\int_0^T \nabla h(t,u)\left[F\left(h(t,u)-h(t,0)\right)-F\left(h(t,v)-h(t,0)\right)\right]dt\right\|,$$

$$M_{4T}^{(l)}(\theta,u,v) = \left\|d_T^{-1}(\theta)\int_0^T \left(\nabla h(t,u)-\nabla h(t,v)\right)\left[F\left(h(t,v)-h(t,0)\right)-\beta\right]dt\right\|,$$

$$L_T^{(l)}(\theta,v) = \left\|d_T^{-1}(\theta)\int_0^T \left[\nabla h(t,v)\left(\chi\left\{X(t)<h(t,v)\right\}-\beta\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ \nabla h(t,0)\left(\chi\left\{\varepsilon(t)<0\right\}-\beta\right)-\nabla h(t,v)\left(F\left(h(t,v)-h(t,0)\right)-\beta\right)dt\right]\right\|.$$

З огляду на (7) для $u \in C_{(l)}$ отримуємо

$$T^{-1/2} M_{2T}^{(l)}(\theta, u, v) \ \le \ \bar{\beta}\left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta) \Phi_T^{(i)}(u, v) \right)^{1/2} \ \le \ k_1 a(l)\,, \tag{17}$$

де

$$k_1 \ = \ \bar{\beta}\left(\sum_{i=1}^{q} \tilde{k}^{(i)}(1) \right)^{1/2}, \quad a(l) = pT^{-\gamma m \tilde{m}_0^{-1}}\,, \quad \bar{\beta} = \max\left\{ \beta, 1-\beta \right\}.$$

Більш того, відповідно до (4), (6) та умови $\mathbf{A_4}$

$$T^{-1/2} M_{3T}^{(l)}(\theta, u, v) \le$$

$$\le T^{-1/2} p_0 \Phi_{2T}^{1/2}(u, v)\left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{2}(\theta + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta) u) d_{iT}^{-2}(\theta) \right)^{1/2} \ \le \ k_2 a(l)\,, \tag{18}$$

де

$$k_2 \ = \ p_0 k^{1/2}(1) \left(\sum_{i=1}^{q} \left(k^{(i)}(1) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Аналогічно до попередньої нерівності

$$T^{-1/2} M_{4T}^{(l)}(\theta, u, v) \le$$

$$\le \ p_0 T^{-1/2} \Phi_{2T}^{1/2}(v, 0)\left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta) \Phi_T^{(i)}\left(u, v \right) \right)^{1/2} \ \le \ k_3 a(l)\,, \tag{19}$$

де

$$k_3 \ = \ p_0 k^{1/2}(1) \left(\sum_{i=1}^{q} \tilde{k}^{(i)}(1) \right)^{1/2}.$$

Оцінимо $M_{1T}^{(l)}(\theta, u, v)$. Для довільного $u \in C_{(l)}$ позначимо

$$\chi\left\{ X(t) < h(t,u) \right\} \ = \ \chi\left\{ \varepsilon(t) < h(t,u) - h(t,0) \right\} \ = \ \chi_u\,, \quad \bar{\chi} = 1 - \chi\,.$$

Тоді з тотожності $\chi_u \bar{\chi}_v = \left(1 - \bar{\chi}_u\right)\left(1 - \chi_v\right) = 1 - \bar{\chi}_u - \chi_v + \bar{\chi}_u \chi_v$ випливає

$$|\chi_u - \chi_v| \ = \ |1 - \bar{\chi}_u - \chi_v| \ = \ |\chi_u \bar{\chi}_v - \bar{\chi}_u \chi_v| \ = \ \left(\chi_u \bar{\chi}_v\right) \vee \left(\bar{\chi}_u \chi_v\right) \le$$

$$\le \chi\left\{ \inf_{u \in C_{(l)}} h(t,u) - h(t,0) \le \varepsilon(t) \le \sup_{u \in C_{(l)}} h(t,u) - h(t,0) \right\} \ \equiv \ \chi_l(t)\,. \tag{20}$$

Таким чином, використовуючи (4), маємо

$$T^{-1/2} M_{1T}^{(l)}(\theta, u, v) \ \le$$

$$\leq T^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\left(\int_0^T h_i(t,u)\left[\chi\{X(t)<h(t,u)\}-\chi\{X(t)<h(t,v)\}\right]dt\right)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq T^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\left(\int_0^T h_i(t,u)\chi_l(t)dt\right)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq T^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\left(\sup_{0\leq t\leq T}|h_i(t,u)|\right)^2\right)^{1/2}\int_0^T \chi_l(t)dt \leq$$

$$\leq k_4 T^{-1}\int_0^T \chi_l(t)dt\,, \quad k_4=\left(\sum_{i=1}^{q}\left(k^{(i)}(1)\right)^2\right)^{1/2}. \tag{21}$$

Використовуючи (4), запишемо

$$T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\,\chi_l(t)dt =$$

$$= T^{-1}\int_0^T\left(F\left(\sup_{u\in C_{(l)}} h(t,u)-h(t,0)\right)-F\left(\inf_{u\in C_{(l)}} h(t,u)-h(t,0)\right)\right)dt \leq$$

$$\leq p_0 T^{-1}\int_0^T \sup_{u_1,u_2\in C_{(l)}}|h(t,u_1)-h(t,u_2)|\,dt \leq$$

$$\leq p_0 T^{-1}\int_0^T \sup_{u_1,u_2\in C_{(l)}}\left(\sum_{i=1}^{q} T^{1/2}d_{iT}^{-1}(\theta)|h_i(t,u)|\,\|u_1-u_2\|\right)dt\,,$$

де $u=u_1+\eta(u_2-u_1)$, $\eta\in(0,1)$. Отже,

$$T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\,\chi_l(t)\,dt \leq p_0\sum_{i=1}^{q} T^{-1/2}d_{iT}^{-1}(\theta)\sup_{u\in C_{(l)}}\sup_{0\leq t\leq T}|h_i(t,u)|\,a(l) \leq k_5 a(l)\,, \tag{22}$$

де

$$k_5 = p_0 q^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{q}\left(k^{(i)}(1)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Оцінки (17) – (19), (21), (22) показують, що існують константи k_6, k_7 такі, що

$$\mathrm{P}\left(\sup_{u\in C_{(l)}} M_T^{(l)}(\theta,u,v)\left(1+k_0T^{1/2}r(l)\right)^{-1} > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left(k_6 T^{-1}\int_0^T\left(\chi_l(t)-\mathrm{E}\,\chi_l(t)\right)dt > \frac{\varepsilon}{2}r(l)-k_7 a(l)\right). \tag{23}$$

Величина $\dfrac{\varepsilon}{2} r(l) - k_7 a(l) = \left(\dfrac{\varepsilon}{2}(1-p) - k_7 p \right) T^{-\gamma m \tilde{m}_0^{-1}} > 0$, якщо p вибрати достатньо малим. Таким чином, імовірність (23) оцінюється за нерівністю Чебишова величиною

$$4k_6^2 T^{2\gamma m \tilde{m}_0^{-1} - 2} \left(\varepsilon(1-p) - 2k_7 p \right)^{-2} \int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}\left(\chi_l(t), \chi_l(s) \right) dt\, ds \,. \tag{24}$$

Оскільки в гільбертовому просторі $L_2(R^1, \varphi(x)\,dx)$, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, розклад функції $\chi_l(t)$ за поліномами Чебишова – Ерміта має вигляд

$$\chi_l(t) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(t)}{m!} H_m(\xi(t)), \quad c_0(t) = E\chi_l(t)\,,$$

$$c_m(t) = \int_{R^1} \chi \left\{ \inf_{u \in C_{(l)}} h(t,u) - h(t,0) \le G(x) \le \sup_{u \in C_{(l)}} h(t,u) - h(t,0) \right\} \times$$

$$\times H_m(x)\, \varphi(x)\, dx\,, \quad m \ge 1\,,$$

то

$$\operatorname{cov}\left(\chi_l(t), \chi_l(s) \right) \;=\; \mathrm{E}\,\chi_l(t)\chi_l(s) - \mathrm{E}\,\chi_l(t)\,\mathrm{E}\,\chi_l(s) \;=$$

$$=\; \mathrm{E} \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m(t) c_k(s)}{m!\,k!} H_m(\xi(t))\, H_k(\xi(s)) - c_0(t) c_0(s) \;=$$

$$=\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m(t) c_m(s)}{m!} B^m(t-s)\,.$$

Далі, використовуючи нерівність $ab \le \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 \right)$, парність функції $B(t)$ та рівність $B(0) = 1$, отримуємо

$$T^{-2} \int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}\left(\chi_l(t), \chi_l(s) \right) dt\, ds \;=\; T^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^T \frac{c_m(t) c_m(s)}{m!} B^m(t-s)\, dt\, ds \;\le$$

$$\le\; T^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^T \frac{c_m^2(t)}{m!} B^m(t-s)\, dt\, ds \;\le\; T^{-2} \int_0^T \int_0^T \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2(t)}{m!} \right) B(t-s)\, dt\, ds\,. \tag{25}$$

Зауважимо, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2(t)}{m!} \;=\; D\chi_l(t) \;\le\; \mathrm{E}\,\chi_l(t)\,, \tag{26}$$

Продовжуючи оцінки (25), (26), отримуємо

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T \operatorname{cov}\left(\chi_l(t),\chi_l(s)\right)dt\,ds \;\le\; T^{-2}\int_0^T\int_0^T \mathrm{E}\,\chi_l(t)B(t-s)\,dt\,ds \;\le$$

$$\le\; 2\left(T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\,\chi_l(t)\,dt\right)\left(T^{-1}\int_0^T B(s)\,ds\right).$$

Для першого інтеграла останнього добутку правильною є оцінка (22), а за теоремою з [24, с. 65]

$$T^{-1}\int_0^T B(s)ds \;=\; O\left(B(T)\right). \tag{27}$$

Разом з (24) це мажорує ймовірність (23) величиною

$$k_8 L(T) T^{\gamma m \tilde{m}_0^{-1} - \alpha}\,, \tag{28}$$

яка збігається до 0 при $T \to \infty$ зі степеневою швидкістю, якщо $\alpha > \gamma$.

Позначимо

$$L_{1i}(t) = \left(h_i(t,v) - h_i(t,0)\right)\left(\chi\left\{X(t) < h(t,v)\right\} - \beta\right),$$

$$L_{2i}(t) \;=\; h_i(t,0)\left(\chi\left\{X(t) < h(t,v)\right\} - \chi\left\{\varepsilon(t) < 0\right\}\right), \quad i = \overline{1,q}\,.$$

Тоді

$$L_T^{(l)}(\theta,v) \;=\; \left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\left(\int_0^T \sum_{\lambda=1}^{2}\left(L_{\lambda i}(t) - \mathrm{E}\,L_{\lambda i}(t)\right)dt\right)^2\right)^{1/2},$$

$$\mathrm{P}_1 \;=\; \mathrm{P}\left(L_T^{(l)}(\theta,v)\left(1 + k_0 T^{1/2} r(l)\right)^{-1} > \frac{\varepsilon}{2}\right) \;\le$$

$$\le\; 8\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\left(\sum_{\lambda=1}^{2}\mathrm{E}\left(\int_0^T\left(L_{\lambda i}(t) - \mathrm{E}\,L_{\lambda i}(t)\right)dt\right)^2\right)\left(\varepsilon k_0\right)^{-2} T^{-1} r^{-2}(l)\,.$$

Оцінимо величину

$$\mathrm{E}\left(\int_0^T\left(L_{1i}(t) - \mathrm{E}\,L_{1i}(t)\right)dt\right)^2 \;=\; \int_0^T\int_0^T \operatorname{cov}\left(L_{1i}(t), L_{1i}(s)\right)dt\,ds\,. \tag{29}$$

Оскільки

$$\mathrm{E}\,L_{1i}^2(t) \;=\; \left(h_i(t,v) - h_i(t,0)\right)^2 \mathrm{E}\left(\chi\left\{\varepsilon(t) < h(t,v) - h(t,0)\right\} - \beta\right)^2 \;\le$$

$$\le\; \overline{\beta}^2\left(h_i(t,v) - h_i(t,0)\right)^2 \;<\; \infty\,,$$

то для функції $L_{1i}(t)$ справедливим є розклад у просторі $L_2(R^1, \varphi(x)\,dx)$:

$$L_{1i}(t) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(t,v)}{m!} H_m(\xi(t)), \quad c_0(t,v) = \mathrm{E}\, L_{1i}(t),$$

$$c_m(t,v) \;=\; \big(h_i(t,v) - h_i(t,0)\big) \times$$

$$\times \int_{R^1} \big(\chi\{G(x) < h(t,v) - h(t,0)\} - \beta\big) H_m(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad m \geq 1.$$

Тоді, як і вище,

$$\operatorname{cov}\big(L_{1i}(t), L_{1i}(s)\big) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m(t,v) c_m(s,v)}{m!} B^m(t-s).$$

Зауважимо також, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2(t,v)}{m!} \;=\; DL_{1i}(t) \;\leq\; \mathrm{E}\, L_{1i}^2(t) \;\leq\; \overline{\beta}^2 \big(h_i(t,v) - h_i(t,0)\big)^2.$$

Продовжуючи оцінку (29), отримуємо

$$\int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}\big(L_{1i}(t), L_{1i}(s)\big)\, dt\, ds \;\leq$$

$$\leq\; \overline{\beta}^2 \int_0^T \int_0^T \big(h_i(t,v) - h_i(t,0)\big)^2 B(t-s) dt ds \;\leq$$

$$\leq\; 2T\overline{\beta}^2 \Phi_T^{(i)}(v,0) \left(T^{-1} \int_0^T B(s)\, ds \right).$$

Далі, з (27) маємо, що (29) мажорується величиною $k_9 T^{1-\alpha} \Phi_T^{(i)}(v,0) L(T)$.

Оцінимо $\mathrm{E}\left(\int_0^T \big(L_{2i}(t) - \mathrm{E}\, L_{2i}(t)\big)\, dt \right)^2$. Нехай $C_{(l)}$ — елемент покриття множини $C^{(m)}$. Введемо позначення $M \equiv \bigcup_{k=m}^{m_0} C^{(k)}$. Тоді за аналогією з (20)

$$\big|\chi\{\varepsilon(t) < h(t,v) - h(t,0)\} - \chi\{\varepsilon(t) < 0\}\big| \;\leq$$

$$\leq\; \chi\left\{ \inf_{v \in M} h(t,v) - h(t,0) \leq \varepsilon(t) \leq \sup_{v \in M} h(t,v) - h(t,0) \right\} \;\equiv\; \chi_M(t).$$

Отже, $|L_{2i}(t)| \leq |h_i(t,0)| \chi_M(t)$. Оскільки

$$\mathrm{E}\, L_{2i}^2(t) \;\leq\; h_i^2(t,0)\, \mathrm{E}\, \chi_M(t) \;\leq$$

$$\leq\; h_i^2(t,0) \left[F\left(\sup_{v \in M} h(t,v) - h(t,0) \right) - F\left(\inf_{v \in M} h(t,v) - h(t,0) \right) \right] \;\leq$$

$$\leq p_0 h_i^2(t,0) \sup_{v_1, v_2 \in M} \left| h(t,v_1) - h(t,v_2) \right| < \infty ,$$

то має місце розклад функції $L_{2i}(t)$ в $L_2(R^1, \varphi(x)\,dx)$:

$$L_{2i}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m(t,v)}{m!} H_m(\xi(t)), \quad \tilde{c}_0(t,v) = \mathrm{E} L_{2i}(t),$$

$$\tilde{c}_m(t,v) = h_i(t,0) \int_{R^1} \left(\chi\left\{ G(x) < h(t,v) - h(t,0) \right\} - \chi\left\{ G(x) < 0 \right\} \right) H_m(x)\, \varphi(x)\, dx ,$$

$$m \geq 1 .$$

З огляду на те, що

$$\mathrm{E} \left(\int_0^T \left(L_{2i}(t) - \mathrm{E} L_{2i}(t) \right) dt \right)^2 = \int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}\left(L_{2i}(t), L_{2i}(s) \right) dt\, ds , \tag{30}$$

$$\operatorname{cov}\left(L_{2i}(t), L_{2i}(s) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m(t,v) \tilde{c}_m(s,v)}{m!} B^m(t-s) ,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m^2(t,v)}{m!} = D L_{2i}(t) \leq \mathrm{E} L_{2i}^2(t) ,$$

отримуємо

$$\int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}\left(L_{2i}(t), L_{2i}(s) \right) dt ds \leq$$

$$\leq p_0 \int_0^T \int_0^T h_i^2(t,0) \sup_{v_1, v_2 \in M} \left| h(t,v_1) - h(t,v_2) \right| B(t-s)\, dt\, ds \leq$$

$$\leq 2 p_0 T \int_0^T h_i^2(t,0) \sup_{v_1, v_2 \in M} \left| h(t,v_1) - h(t,v_2) \right| dt \left(T^{-1} \int_0^T B(s)\, ds \right) .$$

За умови (4)

$$\int_0^T h_i^2(t,0) \sup_{v_1, v_2 \in M} \left| h(t,v_1) - h(t,v_2) \right| dt \leq$$

$$\leq \int_0^T h_i^2(t,0) \sup_{v_1, v_2 \in M} \left(\sum_{i=1}^{q} T^{1/2} d_{iT}^{-1}(\theta) \left| h_i(t,\tilde{v}) \right| \left\| v_1 - v_2 \right\| \right) dt \leq$$

$$\leq 2 \left(a(l) + r(l) \right) \left(\sum_{i=1}^{q} T^{1/2} d_{iT}^{-1}(\theta) \sup_{v \in M} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| h_i(t,v) \right| \right) d_{iT}^2(\theta) \leq$$

$$\leq \left(2 \sum_{i=1}^{q} k^{(i)}(1) \right) \left(a(l) + r(l) \right) d_{iT}^2(\theta) ,$$

тобто (30) мажорується величиною $k_{10}\left(a(l)+r(l)\right)d_{iT}^2(\theta)T^{1-\alpha}L(T)$.

Таким чином, завдяки (7)

$$\mathrm{P}_1 \le 8T^{1-\alpha}\left(\varepsilon k_0\right)^{-2}T^{-1}r^{-2}(l)L(T)\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\Big(k_9\Phi_T^{(i)}(v,0)+k_{10}d_{iT}^2(\theta)\left(a(l)+r(l)\right)\Big)\right] \le$$

$$\le 8T^{-\alpha}\left(\varepsilon k_0\right)^{-2}r^{-2}(l)L(T)\times$$

$$\times\left[k_9\left(\sum_{i=1}^{q}\tilde{k}^{(i)}(1)\right)\left(a(l)+r(l)\right)^2+k_{10}q\left(a(l)+r(l)\right)\right] \le$$

$$\le k_{11}T^{-\alpha}L(T)\Big[\left(a(l)+r(l)\right)^2r^{-2}(l)+\left(a(l)+r(l)\right)r^{-2}(l)\Big] =$$

$$= k_{11}T^{-\alpha}L(T)\Big[(1-p)^{-2}+(1-p)^{-2}T^{\gamma m\tilde{m}_0^{-1}}\Big] \le k_{12}T^{\gamma m\tilde{m}_0^{-1}-\alpha}L(T). \qquad (31)$$

Отже, P_1 оцінюється величиною $k_{12}T^{\gamma m\tilde{m}_0^{-1}-\alpha}L(T)$, яка збігається до нуля при $T\to\infty$ зі степеневою швидкістю при $\alpha>\gamma$.

Отже, (28) та (31) показують, що для $l=1,\ldots,N_0-1$ та деякого $m = m(l) < m_0$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{u\in C_{(l)}} z_T^+(\theta,u)>\varepsilon\right) = O\Big(L(T)T^{\gamma m\tilde{m}_0^{-1}-\alpha}\Big).$$

Розглянемо випадок, коли $l=N_0$. Очевидно,

$$\mathrm{P}\left(\sup_{u\in C_{(N_0)}} z_T^+(\theta,u)>\varepsilon\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\sup_{\|u\|_0<T^{-\gamma m_0\tilde{m}_0^{-1}}}\left\|Q_T^{*+}(u)-Q_T^{*+}(0)-\mathrm{E}\,Q_T^{*+}(u)\right\|>\varepsilon\right).$$

Запишемо вираз, що стоїть під знаком норми, у вигляді суми векторів $\nu_1(\theta,u) + \nu_2(\theta,u) + \nu_3(\theta,u)$, де

$$\nu_1(\theta,u) = d_T^{-1}(\theta)\int_0^T\left(\nabla h(t,u)-\nabla h(t,0)\right)\left(\chi\left\{X(t)<h(t,u)\right\}-\beta\right)dt,$$

$$\nu_2(\theta,u) = d_T^{-1}(\theta)\int_0^T\nabla h(t,0)\left(\chi\left\{X(t)<h(t,u)\right\}-\chi\left\{\varepsilon(t)<0\right\}\right)dt,$$

$$\nu_3(\theta,u) \;=\; -d_T^{-1}(\theta)\int_0^T \nabla h(t,u)\big[\,F\big(\,h(t,u)-h(t,0)\big)-\beta\,\big]\,dt\,.$$

Легко бачити, що для $\|u\|_0 < T^{-\gamma m_0 \tilde m_0^{-1}}$

$$\|\nu_1(\theta,u)\| \le \bar\beta T^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\Phi_T^{(i)}(u,0)\right)^{1/2} \le$$

$$\le \bar\beta T^{1/2-\gamma m_0 \tilde m_0^{-1}}\left(\sum_{i=1}^{q}\tilde k^{(i)}(1)\right)^{1/2} \;=\; k_{13}T^{1/2-\gamma m_0 \tilde m_0^{-1}}\,, \tag{32}$$

$$\|\nu_3(\theta,u)\| \le p_0\Phi_T^{1/2}(u,0)\left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)d_{iT}^{2}(\theta+T^{1/2}d_T^{-1}(\theta)u)\right)^{1/2} \le$$

$$\le k_{14}T^{1/2-\gamma m_0 \tilde m_0^{-1}}\,. \tag{33}$$

Якщо $\gamma > 1/2$, то для $T > T_0$ показники степеня у (32) та (33) від'ємні, і залишається оцінити ймовірність $(\varepsilon' < \varepsilon)$

$$\mathrm{P}_2 \;\equiv\; \mathrm{P}\left(\sup_{\|u\|_0 < T^{-\gamma m_0 \tilde m_0^{-1}}}\|\nu_2(\theta,u)\| > \varepsilon'\right).$$

Зауважимо, що

$$\|\nu_2(\theta,u)\| =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\left(\int_0^T h_i(t,0)\big(\chi\{\varepsilon(t) < h(t,u)-h(t,0)\}-\chi\{\varepsilon(t)<0\}\big)\,dt\right)^2\right)^{1/2}. \tag{34}$$

Тоді за аналогією з (20)

$$\big|\chi\{\varepsilon(t) < h(t,u)-h(t,0)\}-\chi\{\varepsilon(t)<0\}\big| \le$$

$$\le \chi\left\{\inf_{\|u\|_0 < T^{-\gamma m_0 \tilde m_0^{-1}}} h(t,u)-h(t,0) \le \varepsilon(t) \le \sup_{\|u\|_0 < T^{-\gamma m_0 \tilde m_0^{-1}}} h(t,u)-h(t,0)\right\} \;\equiv\; \chi_{N_0}(t)\,.$$

Продовжуючи (34), маємо

$$\|\nu_2(\theta,u)\| \le \left(\sum_{i=1}^{q} d_{iT}^{-2}(\theta)\left(\int_0^T |h_i(t,0)|\,\chi_{N_0}(t)\,dt\right)^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le T^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{q}\left(T^{1/2}d_{iT}^{-1}(\theta)\sup_{0\le t\le T}|h_i(t,0)|\right)^2\right)^{1/2}\int_0^T \chi_{N_0}(t)\,dt \le$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{q} \left(k^{(i)}(1) \right)^2 \right)^{1/2} T^{-1/2} \int_0^T \chi_{N_0}(t)\, dt \;=\; k_{15} T^{-1/2} \int_0^T \chi_{N_0}(t)\, dt\,.$$

Отже,

$$\mathrm{P}_2 \;\leq\; \mathrm{P}\left(k_{15} T^{-1/2} \int_0^T \chi_{N_0}(t)\, dt > \varepsilon' \right). \tag{35}$$

Аналогічно до оцінки (22) отримуємо оцінку

$$T^{-1/2} \int_0^T \mathrm{E}\,\chi_{N_0}(t)\, dt \;\leq\; k_{16} T^{1/2} a(N_0) \;=\; k_{16}\, p\, T^{1/2 - \gamma m_0 \tilde{m}_0^{-1}}\,. \tag{36}$$

Продовжуючи (35), для $\varepsilon'' < \varepsilon'$ маємо

$$\mathrm{P}_2 \;\leq\; \mathrm{P}\left(k_{15} T^{-1/2} \int_0^T \left(\chi_{N_0}(t) - \mathrm{E}\,\chi_{N_0}(t) \right) dt > \varepsilon'' \right) \leq$$

$$\leq (\varepsilon'')^{-2}\, k_{15}^2 T^{-1} \int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}\left(\chi_{N_0}(t), \chi_{N_0}(s) \right) dt\, ds\,.$$

Оскільки в гільбертовому просторі $L_2(R^1, \varphi(x)\, dx)$ має місце розклад

$$\chi_{N_0}(t) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m(t)}{m!} H_m(\xi(t))\,,$$

$$\tilde{c}_m(t) \;=\; \int_{R^1} \chi \left\{ \inf_{\|u\|_0 < T^{-\gamma m_0 \cdot \tilde{m}_0^{-1}}} h(t,u) - h(t,0) \leq G(x) \leq \sup_{\|u\|_0 < T^{-\gamma m_0 \cdot \tilde{m}_0^{-1}}} h(t,u) - h(t,0) \right\} \times$$

$$\times H_m(x)\, \varphi(x)\, dx\,, \quad m \geq 0\,,$$

то

$$T^{-1} \int_0^T \int_0^T \operatorname{cov}\left(\chi_{N_0}(t), \chi_{N_0}(s) \right) dt\, ds \;\leq\; T^{-1} \int_0^T \int_0^T \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m^2(t)}{m!} \right) B(t-s)\, dt\, ds \;\leq$$

$$\leq T^{-1} \int_0^T \int_0^T \mathrm{E}\,\chi_{N_0}(t) B(t-s)\, dt\, ds \;\leq\; 2 \int_0^T \mathrm{E}\,\chi_{N_0}(t)\, dt \left(T^{-1} \int_0^T B(s)\, ds \right).$$

Далі, для першого інтеграла використовуємо оцінку (36), а для другого — (27), отже,

$$P_2 \;\leq\; k_{17} L(T) T^{1 - \alpha - \gamma m_0 \tilde{m}_0^{-1}}\,.$$

Ця величина збігається до нуля при $T \to \infty$, якщо $\alpha + \gamma > 1$.

Лему 1 доведено.

Покладемо $\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}\left(\hat{\theta}_T\right)=\left(\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\tau)\right)\Big|_{\tau=\hat{\theta}_T}$.

Лема 2. *При виконанні умов теореми* 1 *для довільного* $\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}\left(\left\|Q_T^{\pm}(\theta)+\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)\right\|>\varepsilon\right)\xrightarrow[T\to\infty]{}0\,. \tag{37}$$

Доведення. Для достатньо малого $r>0$ маємо

$$\mathrm{P}\left(z_T^{\pm}(\theta,\bar{u}_T)>\varepsilon\right)=$$

$$=\mathrm{P}\left(z_T^{\pm}(\theta,\bar{u}_T)>\varepsilon,\,\|\bar{u}_T\|\le r\right)+\mathrm{P}\left(z_T^{\pm}(\theta,\bar{u}_T)>\varepsilon,\,\|\bar{u}_T\|>r\right)=\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2\,.$$

Із співвідношення (11) випливає, що $\mathrm{P}_1\le\mathrm{P}\left(\sup\limits_{u\in V^c(r)\bigcap\tilde{U}_T^c(\theta)}z_T^{\pm}(\theta,u)>\varepsilon\right)\underset{T\to\infty}{\to}0$,

а із конзистентності оцінки $\hat{\theta}_T$ маємо $\mathrm{P}_2\underset{T\to\infty}{\to}0$.

Таким чином, оскільки $Q_T^{*\pm}(\bar{u}_T)=Q_T^{\pm}(\theta+T^{1/2}\,d_T^{-1}(\theta)\bar{u}_T)=Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)$, отримуємо

$$\left\|Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)-Q_T^{\pm}(\theta)-\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)\right\|\left(1+\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)\right\|\right)^{-1}\xrightarrow[T\to\infty]{p}0\,. \tag{38}$$

Якщо відбулася подія $\left\{\left\|\hat{\theta}_T-\theta\right\|<r\right\}$ для деякого $r<d_0$, то $Q_{iT}^{\pm}(\hat{\theta}_T)\ge0$, $i=\overline{1,q}$, і з (38) випливає

$$\frac{Q_{iT}^{+}(\hat{\theta}_T)-\left(Q_{iT}^{+}(\theta)+\mathrm{E}\,Q_{iT}^{+}(\hat{\theta}_T)\right)}{1+\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)\right\|}\xrightarrow[T\to\infty]{p}0\,, \tag{39}$$

$$\frac{Q_{iT}^{-}(\hat{\theta}_T)+\left(Q_{iT}^{+}(\theta)+\mathrm{E}\,Q_{iT}^{+}(\hat{\theta}_T)\right)}{1+\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)\right\|}\xrightarrow[T\to\infty]{p}0\,. \tag{40}$$

В свою чергу з (39), (40) для довільного $\varepsilon>0$ маємо

$$\mathrm{P}\left(\left\|Q_T^{\pm}(\theta)+\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)\right\|\le\left(1+\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{\pm}(\hat{\theta}_T)\right\|\right)\varepsilon\right)\xrightarrow[T\to\infty]{}1\,. \tag{41}$$

З (41) випливає, що $\mathrm{P}\left(X^{+}(\theta)\right)\underset{T\to\infty}{\to}1$, де

$$X^{+}(\theta)=\left\{\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat{\theta}_T)\right\|\le\frac{\varepsilon+\left\|Q_T^{+}(\theta)\right\|}{1-\varepsilon}\right\}. \tag{42}$$

Доведемо обмеженість за ймовірністю вектора $\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat{\theta}_T)$. Маємо

$$\mathrm{P}\left(\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat{\theta}_T)\right\|>M\right)=\mathrm{P}\left(\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat{\theta}_T)\right\|>M,\,X^{+}(\theta)\right)+$$

$$+\,\mathrm{P}\left(\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat{\theta}_T)\right\|>M,\,\overline{X^{+}(\theta)}\right)\le\mathrm{P}\left(\left\|Q_T^{+}(\theta)\right\|>M(1-\varepsilon)-\varepsilon\right)+\mathrm{P}\left(\overline{X^{+}(\theta)}\right), \tag{43}$$

де $\overline{X^+(\theta)}$ — доповнення до події $X^+(\theta)$.

Позначимо $\eta(t) = \chi\{\varepsilon(t) < 0\} - \beta$, $t \in R^1$. Тоді $Q_{iT}^{\pm}(\theta) = d_{iT}^{-1}(\theta) \times \times \int_0^T g_i(t,\theta)\eta(t)\,dt$ майже напевно, $i = \overline{1,q}$. Оцінимо ймовірність $\mathrm{P}\left(\left\|Q_T^+(\theta)\right\| > > M(1-\varepsilon) - \varepsilon\right)$.

Очевидно,

$$\mathrm{E}\left\|Q_T^+(\theta)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{q} \mathrm{E}(d_{iT}^{-1}(\theta) \int_0^{\mathrm{T}} g_i(t,\theta)\eta(t)\,dt)^2 ,$$

$$\mathrm{E}(Q_{iT}^+(\theta))^2 = d_{iT}^{-2}(\theta) \int_0^T\int_0^T g_i(t,\theta) g_i(s,\theta) B_\eta(t-s)\,dt\,ds , \quad i = \overline{1,q} ,$$

де $B_\eta(t-s) = \mathrm{E}\,\eta(t)\eta(s) = \operatorname{cov}\left(\chi\{\varepsilon(t)<0\}, \chi\{\varepsilon(s)<0\}\right)$. Далі, очевидно також, що

$$\operatorname{cov}\left(\chi\{\varepsilon(t)<0\}, \chi\{\varepsilon(s)<0\}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} B^m(t-s) ,$$

$$C_m = \int_{-\infty}^{\infty} \chi\{G(x)<0\} H_m(x)\varphi(x)\,dx , \quad m \ge 1 ,$$

$$\mathrm{E}\left(Q_{iT}^+(\theta)\right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} d_{iT}^{-2}(\theta) \int_0^T\int_0^T g_i(t,\theta) g_i(s,\theta) B^m(t-s)\,dt\,ds .$$

Оскільки за умовою теореми 1 $\alpha > 1/2$, то $B^2(\cdot) \in L_1(R^1)$ та відповідна с. щ. $f_2(\lambda)$, $\lambda \in R^1$, неперервна та обмежена. Більш того, всі згортки $f_m(\lambda) = = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} B^m(t)\,dt$, $m \ge 2$, мають таку ж властивість. Крім цього, $f_m(\lambda) \le \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B^m(t)\,dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B^2(t)\,dt$, $m \ge 2$, тобто $\sup_{m\ge 2} \max_{\lambda \in R^1} f_m(\lambda) \le \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B^2(t)\,dt$ та

$$d_{iT}^{-2}(\theta) \int_0^T\int_0^T g_i(t,\theta) g_i(s,\theta) B^m(t-s)\,dt\,ds =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_m(\lambda) \left|\int_0^T e^{i\lambda t} g_i(t,\theta)\,dt\right|^2 d\lambda}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_0^T e^{i\lambda t} g_i(t,\theta)\,dt\right|^2 d\lambda} \le \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t) dt , \quad m \ge 2 .$$

Бачимо, що

$$\mathrm{E}(Q_{iT}^{+}(\theta))^2 \le C_1^2 d_{iT}^{-2}(\theta) \int_0^T\int_0^T g_i(t,\theta)g_i(s,\theta)B(t-s)\,dt\,ds + \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t)\,dt \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!}\right),$$

до того ж $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} = D\chi\{\varepsilon(t)<0\} - C_1^2 = \beta - \beta^2 - C_1^2$.

Оскільки с. щ. $f(\lambda)$ має в нулі порядок $\lambda^{\alpha-1}$ (див. [25]) і $1-\alpha<1/2$, то $2(1-\alpha)<1$, тобто функція $f^2(\lambda)$ інтегровна в околі нуля $\lambda\in(-1,1)$. Крім цього, $\max_{|\lambda|\ge 1} f(\lambda) \le \Lambda_f < \infty$, як це випливає з [25, с. 277]. Це означає, що для $|\lambda|\ge 1$ $f^2(\lambda) \le \left(\max_{|\mu|\ge 1} f(\mu)\right) f(\lambda) \le \Lambda_f f(\lambda)$ і $f(\cdot)\in L_1(R^1)\bigcap L_2(R^1)$. За тотожністю Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} B^2(t)\,dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\,d\lambda. \tag{44}$$

Зауважимо далі, що завдяки умові $\mathbf{B_3}$,

$$d_{iT}^{-2}(\theta) \int_0^T\int_0^T g_i(t,\theta)g_i(s,\theta)B(t-s)\,dt\,ds =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left(\left| \int_0^T e^{i\lambda t} g_i(t,\theta)\,dt \right|^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T e^{i\lambda t} g_i(t,\theta)\,dt \right|^2 d\lambda \right)^{-1} \right) d\lambda =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu_T^{ii}(d\lambda,\theta) \xrightarrow[T\to\infty]{} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{ii}(d\lambda,\theta). \tag{45}$$

Із співвідношень (44), (45) отримуємо, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $T_0 = T_0(\varepsilon)>0$ таке, що для $T>T_0$

$$\mathrm{E}\left\|Q_T^{+}(\theta)\right\|^2 \le 2\pi C_1^2 \left(\sum_{i=1}^{q} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\mu^{ii}(d\lambda,\theta) + \varepsilon \right) + 2\pi(\beta-\beta^2-C_1^2)q \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\,d\lambda.$$

Це означає, що вектор $Q_T^{+}(\theta)$ обмежений за ймовірністю, а разом з ним вектор $\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat\theta_T)$ також обмежений за ймовірністю.

Відповідно до (41) для довільного $\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}\left(\left\|Q_T^{+}(\theta) + \mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat\theta_T)\right\| > \varepsilon\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\left\|Q_T^{+}(\theta) + \mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat\theta_T)\right\| > \varepsilon(1+M)^{-1}\left(1+\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat\theta_T)\right\|\right), \left\|\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat\theta_T)\right\| \le M\right) +$$

$$+ \mathrm{P}\left(\left\|\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat\theta_T)\right\| > M\right) \le$$

$$\leq \mathrm{P}\left(\left\| Q_T^+(\theta) + \mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T)\right\| > \varepsilon (1+M)^{-1}\left(1 + \left\|\mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T)\right\|\right)\right) +$$

$$+ \mathrm{P}\left(\left\|\mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T)\right\| > M\right),$$

звідки і випливає (37).

Лему 2 доведено.

Лема 3. *За умов теореми* 1 *для довільного* $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(\left\|\mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T) - p(0) I_T(\theta) d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta)\right\| > \varepsilon\right) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0. \qquad (46)$$

Доведення. Якщо величина $\bar u_T = T^{-1/2} d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta)$ є малою, то з нерівності (16) та обмеженості за ймовірністю випадкового вектора $\mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T)$ випливає, що вектор $d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta) = T^{1/2}\bar u_T$ також обмежений за ймовірністю. Дійсно, із (16) та конзистентності $\hat\theta_T$ випливає, що для достатньо малих $r > 0$

$$\mathrm{P}\left(T^{1/2}\|\bar u_T\| > M\right) \leq \mathrm{P}\left(\left\|\mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T)\right\| > k_0 M\right) + P\left(\|\bar u_T\| > r\right) \xrightarrow[T, M\to\infty]{} 0.$$

Використовуючи позначення, які було введено раніше, маємо

$$T^{-1/2}\,\mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T) = T^{-1/2}\,\mathrm{E}\, Q_T^{*+}(\bar u_T) H_T \bar u_T,$$

$$\mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T) - p(0) I_T(\theta) d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta) = \left(H_{1T} + H_{2T} - p(0) I_T(\theta)\right) T^{1/2}\bar u_T,$$

де матриці $H_{kT} = \left(T^{-1/2}{}_k D_T^{il}(u^{(i)})\right)_{i,l=1}^q$, $k = 1,2$, $\left\|u^{(i)}\right\| \leq \|\bar u_T\|$, $i = \overline{1,q}$, означені, як і матриця H_T, за аналогією з матрицями $T^{-1/2}{}_k D_T(u^{(i)})$, $k = 1,2$.

Нерівності (13) – (15) показують, що

$$\left\|\mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T) - p(0) I_T(\theta) d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta)\right\| \leq$$

$$\leq \left\| H_{1T} d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta)\right\| + \left\|\left(H_{2T} - p(0) I_T(\theta)\right) d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta)\right\| \leq$$

$$\leq k_{18}\|\bar u_T\| \left\| d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta)\right\|.$$

Твердження леми випливає з обмеженості за ймовірністю вектора $d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta)$.

Лему 3 доведено.

4. Доведення теореми 1. Із співвідношень (37) та (46) для довільного $\varepsilon > 0$ знаходимо

$$\mathrm{P}\left(\left\| p^{-1}(0)\Lambda_T(\theta) Q_T^+(\theta) + d_T(\theta)(\hat\theta_T - \theta)\right\| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left(\left\| p^{-1}(0)\Lambda_T(\theta)\left(Q_T^+(\theta) + \mathrm{E}\, Q_T^+(\hat\theta_T)\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right) +$$

$$+\ \mathrm{P}\left(\left\| p^{-1}(0)\Lambda_T(\theta)\,\mathrm{E}\,Q_T^{+}(\hat{\theta}_T) - d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0\,.$$

Теорема 1 випливає, наприклад, із теореми [26, с. 117].

1. *Beran J.* Statistics for long-memory processes. – New York: Chapman and Hall, 1994.
2. *Leonenko N. N.* Limit theorems for random fields with singular spectrum. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.
3. *Doukhan P., Oppenheim G., Takku M. S.* Theory and applications of long-range dependence. – Boston: Birkhäuser, 2003.
4. *Grenander U., Rozenblatt M.* Statistical analysis of stationary time series. – New York: John Wiley and Sons, 1957. – 300 p.
5. *Bassett G., Koenker R.* Regression quantile // Econometrica. – 1978. – **46**. – P. 33 – 50.
6. *Іванов О. В., Орловський І. В.* Асимптотична нормальність оцінок Коенкера – Бассета у нелінійних моделях регресії // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2005. – Вип. 72. – С. 30 – 41.
7. *Орловський І. В.* Конзистентність оцінок Коенкера – Бассета у нелінійних моделях регресії // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2004. – № 3 (35). – С. 144 – 150.
8. *Kukush A. G., Beirlant J., Goegebeur Y.* Nonparametric estimation of conditional quantiles // Dept. Appl. Econ. – Belgium: K. V. Leuven, 2005. – Res. Rept OR 0557.
9. *Jennrich R. I.* Asymptotic properties of non-linear least squares estimators // Ann. Math. Statist. – 1969. – **40**. – P. 633 – 643.
10. *Pfanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika. – 1969. – **14**. – P. 249–272.
11. *Шметтерер Л.* Введение в математическую статистику. – М.: Наука, 1976.
12. *Ivanov A. V.* Asymptotic theory of nonlinear regression. – Dordrecht: Kluwer Acad. Press, 1997.
13. *Савич І. М.* Конзистентність квантильних оцінок у моделях регресії з сильно залежним шумом // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2010. – № 82. – С. 128 – 136.
14. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 383 с.
15. *Холево А. С.* Об оценках коэффициентов регрессии // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – **14**. – С. 78 – 101.
16. *Холево А. С.* Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии // Теория вероятностей и ее применения. –1971. – **16**. – С. 724 – 728.
17. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical analysis of random fields. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 244 p.
18. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
19. *Іванов О. В., Савич І. М.* μ -Припустимість спектральної щільності сильно залежного випадкового шуму у нелінійних моделях регресії // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2009. – № 1. – С. 143 – 148.
20. *Ivanov A. V., Savych I. N.* Asymptotic properties of Koenker – Bassett estimator in the regression model with long-range dependence // Int. Conf. „Modern Stochastics: Theory and Applications II", Kyiv, 7–10 Sept., 2010. – P. 88.
21. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984.
22. *Huber P. J.* The behaviour of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions // Proc. 5 th Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability. – Berkeley: Unif. Clif. Press., 1967. – Vol. 1. – P. 221 – 233.
23. *Wilkinson J. H.* The algebraic eigenvalue problem. – Oxford: Clarendon Press, 1962. – 662 p.
24. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985.
25. *Anh V. V., Knopova V. P., Leonenko N. N.* Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence // Austral. and N. Z. J. Statist. – 2004. – **46**, № 2. – P. 275 – 296.
26. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. – М.: Наука, 1968. – 548 с.

Одержано 18.02.10,
після доопрацювання — 23.06.11