УДК 517.5

Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

We show that every homeomorphic solution of the Beltrami equation $\overline{\partial} f = \mu \partial f$ in the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ is a so-called lower Q-homeomorphism with $Q(z) = K_\mu(z)$, where $K_\mu(z)$ is a dilatation quotient of this equation. On this basis, we develop the theory of the boundary behavior and the removability of singularities of these solutions.

Показано, що будь-який гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі $\overline{\partial} f = \mu\, \partial f$ класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ є так званим нижнім Q-гомеоморфізмом з $Q(z) = K_\mu(z)$, де $K_\mu(z)$ — дилатаційне відношення цього рівняння. На цій основі розвинено теорію граничної поведінки та усунення сингулярностей таких розв'язків.

1. Введение. В этой статье приведены приложения ранее полученных авторами результатов по так называемым нижним Q-гомеоморфизмам из монографии [1] к исследованию граничного поведения решений уравнений Бельтрами с вырождением.

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. связное и открытое подмножество $\mathbb{C}$ и $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ почти всюду (п. в.) в D. ***Уравнением Бельтрами*** называется уравнение вида

$$f_{\overline{z}} = m(z) f_z, \tag{1}$$

где $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется ***комплексным коэффициентом***, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

— ***дилатационным отношением*** уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется ***вырожденным***, если $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$.

Теоремы существования гомеоморфных решений класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ были доказаны для многих вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, монографии [1, 2], а также обзоры [3, 4] и библиографию в них).

Непрерывное отображение γ открытого подмножества Δ действительной оси $\mathbb{R}$ или окружности в D называется ***штриховой линией*** (см., например, раздел 6.3 в [1]). Напомним, что любое открытое множество Δ в $\mathbb{R}$ состоит из счетного набора попарно непересекающихся интервалов. Это дает основания для термина „штриховая линия".

Пусть задано семейство Γ штриховых линий γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\varrho\colon \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называют ***допустимой*** для Γ (пишут $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int\limits_\gamma \varrho\, ds \geqslant 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{2}$$

Конформным модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^2(z)\, dm(z),$$

где $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$. Говорят, что свойство P имеет место для почти всех (п. в.) $\gamma \in \Gamma$, если подсемейство всех линий в Γ, для которых P не верно, имеет нулевой модуль (ср. с [5]). Также говорят, что измеримая по Лебегу функция $\varrho : \mathbb{C} \to [0,\infty]$ является ***обобщенно допустимой*** для Γ (пишут $\varrho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$), если (2) имеет место для п. в. $\gamma \in \Gamma$ (см., например, раздел 9.2 в [1]).

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга квазиконформности в [6]. Для заданных областей D и D' в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и измеримой функции $Q\colon D \to (0,\infty)$ гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ является ***нижним Q-гомеоморфизмом в точке*** z_0, если

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \ \geqslant \inf_{\varrho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\varrho^2(x)}{Q(x)}\, dm(x)$$

для каждого кольца

$$R_\varepsilon = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \colon \varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

где

$$d_0 = \sup_{z \in D} |z - z_0|,$$

и Σ_ε — семейство всех пересечений окружностей

$$S(r) = S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| = r\}, \quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0),$$

с областью D (см. [7] или гл. 9 в монографии [1]).

Это понятие может быть распространено на случай $z_0 = \infty \in \overline{D}$ стандартным способом путем применения инверсии T относительно единичной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$, $T(x) = z/|z|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$. Назовем гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ ***нижним Q-гомеоморфизмом в*** $\infty \in \overline{D}$, если $F = f \circ T$ является нижним Q_*-гомеоморфизмом с $Q_* = Q \circ T$ в 0. Также будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **нижним Q-гомеоморфизмом на** ∂D, если f является нижним Q-гомеоморфизмом в любой точке $z_0 \in \partial D$.

Далее покажем, что каждое гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ является нижним Q-гомеоморфизмом с $Q(z) = K_\mu(z)$ и, таким образом, вся теория граничного поведения в [7] (см. также главу 9 в [1]) может быть применена к таким решениям. Другими словами, на плоскости это справедливо для любых гомеоморфизмов с конечным искажением по Иванцу (см., например, монографии [1, 2] и библиографию в них). Последний факт имеет важное значение при изучении краевых задач для уравнений Бельтрами с вырождением (см., например, [8]).

2. Предварительные замечания. Напомним сначала следующие топологические понятия. Область $D \subset \mathbb{C}$ назовем ***локально связной в точке*** $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0 существует окрестность $V \subseteq U$ точки z_0

такая, что $V \cap D$ связно. Заметим, что каждая жорданова область D в $\mathbb{C}$ является локально связной в любой точке из ∂D (см., например, [9, с. 66]).

Будем говорить, что ∂D ***слабо плоская в точке*** $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0 и любого числа $P > 0$ существует окрестность $V \subset U$ точки z_0 такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P$$

для всех континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Здесь и далее $\Delta(E, F; D)$ — семейство всех путей $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, соединяющих E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ для всех $t \in (a, b)$. Назовем границу ∂D ***слабо плоской***, если она слабо плоская в каждой точке из ∂D.

Будем также говорить, что точка $z_0 \in \partial D$ является ***сильно достижимой***, если для любой окрестности U точки z_0 существуют компакт E в D, окрестность $V \subset U$ точки z_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Границу ∂D назовем ***сильно достижимой***, если любая точка $z_0 \in \partial D$ является сильно достижимой.

Здесь, в определениях сильно достижимых и слабо плоских границ, можно в качестве окрестностей U и V точки z_0 использовать только круги (замкнутые или открытые) с центром в точке z_0 или только окрестности z_0 из какой-либо другой фундаментальной системы окрестностей точки z_0. Эти понятия могут быть естественным образом продолжены на случай $\overline{\mathbb{C}}$ и $z_0 = \infty$. Тогда мы должны использовать соответствующие окрестности ∞.

Легко видеть, что если область D из $\mathbb{C}$ является слабо плоской в точке $z_0 \in \partial D$, то точка z_0 сильно достижима из D. Более того, было доказано, что если область D из $\mathbb{C}$ является слабо плоской в точке $z_0 \in \partial D$, то D локально связна в z_0 (см., например, лемму 5.1 в [7] или лемму 3.15 в [1]).

Понятия сильно достижимых и слабо плоских граничных точек области в $\mathbb{C}$ определены в [10] и являются локализацией и обобщением соответствующих понятий, введенных в [11, 12] (ср. со свойствами P_1 и P_2 по Вяйсяля в [13] и также с квазиконформной достижимостью и квазиконформной плоскостностью по Някки в [14]). Многие теоремы о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений и их обобщений имеют место при условии, что границы являются слабо плоскими. Условие сильной достижимости играет аналогичную роль для непрерывного продолжения отображений на границу. В частности, недавно авторами были доказаны следующие важные утверждения (см. теорему 10.1 (лемму 6.1) в [7] либо теорему 9.8 (лемму 9.4) в [1]).

Предложение 1. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{C}$, $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция и $f\colon D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в ∂D. Предположим, что область D является локально связной на ∂D, а область D' имеет* (*сильно достижимую*) *слабо плоскую границу. Если*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\| Q\|_1(z_0, r)} = \infty \qquad \forall z_0 \in \partial D$$

для некоторого $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, *где* $d(z_0) = \sup_{z \in D} |z - z_0|$ *и*

$$\| Q\|_1(z_0, r) = \int\limits_{D \cap S(z_0, r)} Q(z)\, ds,$$

то f *имеет* (*непрерывное*) *гомеоморфное продолжение* $\overline{f}$ *на* $\overline{D}$, *которое отображает* $\overline{D}$ (*в*) *на* $\overline{D'}$.

Здесь, как обычно, через $S(z_0, r)$ обозначена окружность $|z - z_0| = r$.

Область $D \subset \mathbb{C}$ называется ***областью квазиэкстремальной длины*** (сокращенно **QED-областью**) [15], если

$$M(\Delta(E, F; \overline{\mathbb{C}}) \leqslant K \cdot M(\Delta(E, F; D))$$

для некоторого $K \geqslant 1$ и для всех пар непересекающихся континуумов E и F в D.

Известно (см., например, теорему 10.12 в [13]), что

$$M(\Delta(E, F; \mathbb{C})) \geqslant \frac{2}{\pi} \log \frac{R}{r}$$

для всех множеств E и F в $\mathbb{C}$, пересекающих все окружности $S(z_0, \rho)$, $\rho \in (r, R)$. Следовательно, QED-области имеют слабо плоскую границу. В одном из примеров [1] (раздел 3.8) показано, что обратное утверждение не верно даже для односвязных областей на плоскости.

Область $D \subset \mathbb{C}$ называется ***равномерной областью***, если любая пара точек z_1 и $z_2 \in D$ может быть соединена спрямляемой кривой γ в D такой, что

$$s(\gamma) \leqslant a| z_1 - z_2|$$

и

$$\min_{i=1,2} s(\gamma(z_i, z)) \leqslant bd(z, \partial D)$$

для всех $z \in \gamma$, где $\gamma(z_i, z)$ — часть кривой γ с концами в точках z_i и z (см. [16]). Известно, что каждая равномерная область является QED-областью, но существуют QED-области, которые не являются равномерными (см. [15]). Ограниченные выпуклые области и ограниченные области с гладкими границами дают простые примеры равномерных областей и, следовательно, QED-областей, а также областей со слабо плоскими границами.

Замкнутое множество $X \subset \mathbb{C}$ называется ***нуль-множеством экстремальной длины*** (сокращено **NED-множеством**), если

$$M(\Delta(E, F; \mathbb{C})) = M(\Delta(E, F; \mathbb{C} \backslash X))$$

для каждой пары непересекающихся континуумов E и $F \subset \mathbb{C} \backslash X$.

***Замечание* 1.** Известно, что если $X \subset \mathbb{C}$ является NED-множеством, то

$$| X| = 0$$

и X не разделяет локально $\mathbb{C}$ (см. [17]), т. е.

$$\dim X \leqslant 0,$$

и, следовательно, всюду разрывно [18, с. 22, 104]. Обратно, если множество $X \subset \mathbb{C}$ замкнуто и имеет нулевую длину,

$$H^1(X) = 0,$$

то X является NED-множеством [17]. Здесь $H^1(X)$ обозначает одномерную меру Хаусдорфа (длину) множества X в $\mathbb{C}$. Отметим также, что дополнение NED-множества в $\mathbb{C}$ — частный случай QED-области.

Кроме того, $C(X, f)$ обозначает ***предельное множество*** отображения $f\colon D \to \to \overline{\mathbb{C}}$ для множества $X \subset \overline{D}$,

$$C(X, f)\colon = \left\{ w \in \overline{\mathbb{C}}\colon w = \lim_{k\to\infty} f(z_k),\ z_k \to z_0 \in X,\ z_k \in D \right\}.$$

Заметим, что включение $C(\partial D, f) \subseteq \partial D'$ имеет место для любого гомеоморфизма $f\colon D \to D'$ (см., например, предложение 13.5 в [1]).

3. Основная теорема.

Теорема 1. *Пусть f — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Тогда f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in \overline{D}$ с $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Доказательство. Пусть B — множество (борелевское) всех точек z из D, в которых f имеет полный дифференциал с $J_f(z) \neq 0$. Известно, что B можно представить в виде объединения счетного набора борелевских множеств $B_l,\ l = = 1, 2, \ldots,$ таких, что $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами (см., например, лемму 3.2.2 в [19]). Без потери общности можно считать, что B_l попарно не пересекаются. Пусть B_* — множество всех точек $z \in D$, где f имеет полный дифференциал с $f_z = 0$.

Заметим, что по известной теореме Геринга – Лехто – Меньшова множество $B_0 = = D \setminus (B \cup B_*)$ имеет нулевую меру Лебега в $\mathbb{C}$ [20, 21]. Следовательно, по теореме 2.11 в [22] (см. также лемму 9.1 в [1]) $l(\gamma \cap B_0) = 0$ для п. в. штриховых линий γ в D. Покажем также, что $l(f(\gamma) \cap f(B_0)) = 0$ для п. в. окружностей γ с центром в точке z_0.

Последнее следует из абсолютной непрерывности f на замкнутых поддугах $\gamma \cap D$ для п. в. окружностей γ. Действительно, класс $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ является инвариантным относительно локально квазиизометрических преобразований независимой переменной (см., например, теорему 1.1.7 в [23]), и функции из $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ абсолютно непрерывны на линиях (см., например, теорему 1.1.3 в [23]). Применяя, например, преобразование координат $\log(z - z_0)$, убеждаемся в абсолютной непрерывности на п. в. окружностях γ с центром в точке z_0.

Таким образом, $l(\gamma_* \cap f(B_0)) = 0$, где $\gamma_* = f(\gamma)$, для п. в. окружностей γ с центром в точке z_0. Пусть теперь $\varrho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, $\varrho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, где Γ — совокупность всех штриховых линий, образованных пересечениями всех окружностей γ с центром в точке z_0. Пусть $\varrho \equiv 0$ вне D и

$$\varrho(z)\ :\ = \varrho_*(f(z))\,(|f_z| + |f_{\bar z}|) \quad \text{для п. в.} \quad z \in D.$$

Согласно теореме 3.2.5 из [19] имеем (при $m = 1$)

$$\int\limits_\gamma \varrho\, ds \geqslant \int\limits_{\gamma_*} \varrho_*\, ds_* \geqslant 1 \qquad \text{для п. в.} \qquad \gamma \in \Gamma,$$

так как $l(f(\gamma)\cap f(B_0))=0$, а также $l(f(\gamma)\cap f(B_*))=0$ для п. в. $\gamma\in\Gamma$ вследствие абсолютной непрерывности f на п. в. $\gamma\in\Gamma$. Следовательно, $\varrho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$.

С другой стороны, получаем неравенство

$$\int\limits_{D}\frac{\varrho^2(x)}{K_\mu(z)}\,dm(z)\leqslant\int\limits_{f(D)}\varrho_*^2(w)dm(w),$$

поскольку $\varrho(z)=0$ на B_*. Следовательно,

$$M(f\Gamma)\ \geqslant\inf_{\varrho\in\operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{D}\frac{\varrho^2(z)}{K_\mu(z)}\,dm(z),$$

т. е. f действительно является нижним Q-гомеоморфизмом с $Q(z)=K_\mu(z)$.

4. Об устранении изолированных особенностей. В силу теоремы 1, согласно теореме 4.1 из [7] или теореме 9.3 и следствию 6.2 из [1] (см. также следствие 5.2 из [24]), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $z_0\in D$ и f — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в $D\setminus\{z_0\}$. Предположим, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rk_\mu(r)}=\infty,$$

где $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(z_0,\partial D)$ и $k_\mu(r)$ — среднее значение дилатационного отношения K_μ на окружности $|z-z_0|=r$. Тогда f имеет гомеоморфное продолжение в D по непрерывности в $\overline{\mathbb{C}}$.

Отсюда, в частности, получаем следующие следствия.

***Следствие* 1.** *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и f — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в $D\setminus\{z_0\}$. Если*

$$k_\mu(r)=O\left(\log\frac{1}{r}\right)\quad \textit{при}\quad r\to 0,$$

то f имеет непрерывное продолжение в D.

***Следствие* 2.** *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $x_0\in D$ и f — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в $D\setminus\{z_0\}$. Если*

$$k_\mu(r)=O\left(\log\frac{1}{r}\log\log\frac{1}{r}\ldots\log\ldots\log\frac{1}{r}\right)\quad \textit{при}\quad r\to 0,$$

то f имеет непрерывное продолжение в D.

5. Непрерывное продолжение на границу. В силу теоремы 1, согласно теореме 6.1 из [7] или лемме 9.4 из [1], получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, $z_0\in\partial D$ и $f\colon D\to D'$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Предположим, что область D локально связна в $z_0\in\partial D$ и $\partial D'$ сильно достижима по крайней мере в одной точке предельного множества $C(z_0,f)$. Если*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dr}{\|K_\mu\|_1(r)}=\infty, \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup_{z\in D} |z - z_0|$ *и*

$$\|K_\mu\|_1(r) = \int\limits_{D\cap S(z_0,r)} K_\mu\, ds,$$

то f *продолжается в точку* z_0 *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{C}}$.

В частности, справедливо следующее следствие леммы 1.

***Следствие* 3.** *Пусть* D *и* D' — QED-*области в* $\mathbb{C}$, $z_0 \in \partial D$ *и* $f\colon D \to D'$ — *гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса* $W^{1,1}_{\rm loc}$. *Если имеет место* (3), *то* f *продолжается в точку* z_0 *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Аналогично, в силу теоремы 1, а также теоремы 8.1 в [7] или теоремы 9.5 в [1], справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* D — *область в* $\mathbb{C}$, $X \subset D$ *и* f — *гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса* $W^{1,1}_{\rm loc}$. *Предположим, что* X *и* $C(X, f)$ — NED-*множества. Если*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|K_\mu\|_1(r)} = \infty,$$

где

$$0 < \varepsilon_0 < d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$$

и

$$\|K_\mu\|_1(r) = \int\limits_{|z-z_0|=r} K_\mu(z)\, |dz|,$$

то f *продолжимо в точку* z_0 *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{C}}$.

6. Продолжение обратных отображений на границу. Основой для доказательства продолжимости обратных отображений гомеоморфных решений уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ является следующая лемма о предельных множествах.

Лемма 2. *Пусть* D *и* D' — *области в* $\mathbb{C}$, z_1 *и* z_2 — *различные точки на* ∂D, $z_1 \neq \infty$, *и* $f\colon D \to D'$ — *гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса* $W^{1,1}_{\rm loc}$. *Предположим, что функция* K_μ *интегрируема на штриховых линиях*

$$D(r) = \{z \in D\colon |z - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r)$$

для некоторого множества E *чисел* $r < |z_1 - z_2|$ *положительной линейной меры. Если* D *локально связна в* z_1 *и* z_2 *и* $\partial D'$ *слабо плоская, то*

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) = \varnothing.$$

В силу теоремы 1 лемма 2 следует из леммы 9.1 в [7] или леммы 9.5 в [1].

Как непосредственное следствие леммы 2 имеем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* D *и* D' — *области в* $\mathbb{C}$, D *локально связна на* ∂D *и* $\partial D'$ *слабо плоская. Если* $f\colon D \to D'$ — *гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *с* $K_\mu \in L^1(D)$, *то* f^{-1} *имеет продолжение в* $\overline{D'}$ *по непрерывности в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. По теореме Фубини множество

$$E = \{r \in (0, d)\colon K_\mu|_{D(r)} \in L^1(D(r))\}$$

имеет положительную линейную меру, так как $K_\mu \in L^1(D)$.

***Замечание* 2.** Достаточно предполагать в теореме 4, что K_μ интегрируема только в окрестности ∂D.

Кроме того, в силу теоремы 1 получаем по теореме 9.2 из [7] или по теореме 9.7 из [1] следующий результат.

Теорема 5. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, D локально связна на ∂D, $\partial D'$ слабо плоская и $f\colon D \to D'$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с коэффициентом μ таким, что*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu\|_1(z_0,r)} = \infty \qquad \forall z_0 \in \partial D,$$

где $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, $d(z_0) = \sup_{z\in D} |z - z_0|$ и

$$\|K_\mu\|_1(z_0,r) = \int\limits_{D(z_0,r)} K_\mu \, ds$$

— L_1-норма K_μ над $D(z_0,r) = \{z \in D\colon |z - z_0| = r\} = D \cap S(z_0,r)$. Тогда существует продолжение f^{-1} в $\overline{D'}$ по непрерывности в $\overline{\mathbb{C}}$.

7. Гомеоморфное продолжение на границу. Комбинируя лемму 1 и теорему 5, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{C}$ и $f\colon D \to D'$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Предположим, что область D локально связна на ∂D и область D' имеет слабо плоскую границу. Если*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu\|_1(z_0,r)} = \infty \quad \forall z_0 \in \partial D \tag{4}$$

для некоторого $\delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, где $d(z_0) = \sup_{z\in D} |z - z_0|$ и

$$\|K_\mu\|_1(z_0,r) = \int\limits_{D\cap S(z_0,r)} K_\mu \, ds,$$

то f имеет продолжение по непрерывности на $\overline{D}$, которое гомеоморфно отображает $\overline{D}$ на $\overline{D'}$.

В частности, из теоремы 6 получаем следующее обобщение известной теоремы Геринга – Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между QED-областями (ср. с [15]).

***Следствие* 4.** *Пусть D и D' — ограниченные области со слабо плоскими границами $\mathbb{C}$ и $f\colon D \to D'$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Если условие* (4) *справедливо в каждой точке $z_0 \in \partial D$, то f имеет гомеоморфное продолжение $f\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Согласно теореме 1 имеем также следующее утверждение (см. теорему 10.3 в [7] или теорему 9.10 в [1]).

Теорема 7. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $X \subset D$ и $f\colon D\setminus\{X\} \to \to \overline{\mathbb{C}}$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Предположим, что X и $C(X,f)$ —* NED-*множества. Если условие* (4) *справедливо в* *каждой точке* $z_0 \in X$ *для* $\delta(z_0) < \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$, *где*

$$\|K_\mu\|_1(z_0, r) = \int\limits_{|z-z_0|=r} K_\mu(z)\,|dz|,$$

то f *имеет гомеоморфное продолжение на* D.

***Замечание* 3.** В частности, заключение теоремы 7 справедливо, если X является замкнутым множеством с

$$H^1(X) = 0 = H^1(C(X, f)).$$

8. О некоторых интегральных условиях. Напомним теоремы о взаимосвязи между некоторыми интегральными условиями из [25].

Для любой неубывающей функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ ***обратная функция*** $\Phi^{-1} \colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ может быть определена следующим образом:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t) \geqslant \tau} t\,.$$

Здесь инфимум равен ∞, если $\{t \in [0, \infty] \colon \Phi(t) \geq \tau\} = \varnothing$. Заметим, что функция Φ^{-1} также неубывающая.

***Замечание* 4.** Непосредственно из определения становится очевидно, что

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) \leqslant t \qquad \forall\, t \in [0, \infty] \tag{5}$$

с равенством в (5), за исключением интервалов постоянства функции $\Phi(t)$.

Далее интеграл в (7) понимается как интеграл Лебега – Стилтьеса, а интегралы в (6) и (8) – (11) как обычные интегралы Лебега. В (6) и (7) доопределяем интегралы ∞, если $\Phi(t) = \infty$, соответственно $H(t) = \infty$ для всех $t \geqslant T \in [0, \infty)$.

Теорема 8. *Пусть* $\Phi \colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ *— неубывающая функция и*

$$H(t) = \log \Phi(t).$$

Тогда из равенства

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H'(t)\,\frac{dt}{t} = \infty \tag{6}$$

следует равенство

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \frac{dH(t)}{t} = \infty \tag{7}$$

и (7) *эквивалентно равенству*

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H(t)\frac{dt}{t^2} = \infty \tag{8}$$

для некоторого $\Delta > 0$, *а* (8) *эквивалентно каждому из равенств*

$$\int\limits_{0}^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \infty \tag{9}$$

для некоторого $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \tag{10}$$

для некоторого $\Delta_* > H(+0)$ *и*

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{11}$$

для некоторого $\delta_* > \Phi(+0)$.

Кроме того, (6) *эквивалентно* (7) *и, следовательно, условия* (6) – (11) *эквивалентны, если* Φ *в дополнение абсолютно непрерывна. В частности, условия* (6) – (11) *эквивалентны, если* Φ *выпукла и не убывает.*

***Замечание* 5.** Дадим несколько пояснений. В правых частях равенств (6) – (11) мы имеем в виду $+\infty$. Если $\Phi(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$, то $H(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$ и мы завершаем определение $H'(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$. Обратим внимание на то, что (7) и (8) исключают принадлежность t_* интервалу интегрируемости, потому что в противном случае левые части в (7) и (8) либо равны $-\infty$, либо неопределены. Поэтому можно считать, что в (6) – (9) $\Delta > t_0$, где $t_0 \colon = \sup_{\Phi(t)=0} t$, $t_0 = 0$, если $\Phi(0) > 0$, и $\delta < 1/t_0$, соответственно.

Теорема 9. *Пусть* $Q \colon \mathbb{D} \to [0, \infty]$ *— измеримая функция такая, что*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \Phi(Q(z))\, dxdy < \infty, \tag{12}$$

где $\Phi \colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ *— неубывающая выпуклая функция такая, что*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty$$

для некоторого $\delta_0 > \Phi(0)$. *Тогда*

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{rq(r)} = \infty, \tag{13}$$

где $q(r)$ *— среднее значение функции* $Q(z)$ *на окружности* $|z| = r$.

Здесь $\mathbb{D}$ обозначает единичный круг в $\mathbb{C}$. Объединяя теоремы 8 и 9, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 5.** *Если* $\Phi \colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ *— неубывающая выпуклая функция и* $Q \colon \mathbb{D} \to [0, \infty]$ *удовлетворяет* (12), *то каждое из условий* (6) – (11) *влечет* (13).

9. Об отображениях, квазиконформных в среднем. Интегральные условия типа

$$\int\limits_{D} \Phi(K(x))\, dm(x) < \infty$$

часто применяются в теории отображений (см., например, монографию [1] и приведенную в ней библиографию) .

Комбинируя теорему 9 с леммой 1 и теоремой 6, получаем следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{C}$ такие, что D локально связна на ∂D, а D' имеет слабо плоскую* (*сильно достижимую*) *границу. Предположим, что $f\colon D \to D'$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами* (1) *класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ такое, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty$$

для выпуклой неубывающей функции $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$. Если

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{14}$$

для некоторого $\delta_0 > \Phi(0)$, то f имеет гомеоморфное (*непрерывное*) *продолжение $\overline{f}$ на $\overline{D}$, которое отображает $\overline{D}$ на* (*в*) $\overline{D'}$.

***Замечание* 6.** В частности, заключение о гомеоморфном продолжении справедливо для областей D и D' с гладкими границами и для выпуклых областей. Отметим также, что по теореме 8 условие (14) можно заменить каждым из условий (6) – (10). Пример, приведенный в следующем пункте, показывает, что каждое из данных условий является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения f на границу.

10. Необходимые условия для продолжимости.

Теорема 11. *Пусть $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ — выпуклая неубывающая функция такая, что*

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} < \infty \tag{15}$$

для некоторого $\delta_* \in (\tau_0,\infty)$, где $\tau_0\colon = \Phi(0)$. Тогда существует диффеоморфное решение f уравнения Бельтрами (1), *отображающее проколотый единичный круг $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ на кольцо $\mathfrak{R} = \{\zeta\in\mathbb{C}\colon 1<|\zeta|<R\}$ такое, что*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty, \tag{16}$$

которое не может быть продолжено по непрерывности в начало координат.

Согласно известному критерию выпуклости (см., например, предложение 5 в I.4.3 из [26]), отношение $[\Phi(t)-\Phi(0)]/t$ не убывает. По условию (15) функция Φ не может быть постоянной. Таким образом, доказательство теоремы 11 сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ — неубывающая функция такая, что*

$$\Phi(t) \geqslant Ct \qquad \forall t\in[T,\infty]$$

для некоторого $C>0$ и $T\in(0,\infty)$ и выполняется (15). *Тогда существует диффеоморфное решение f уравнения Бельтрами* (1) *в проколотом единичном круге $\mathbb{D}\setminus\{0\}$, отображающее его на кольцо $\mathfrak{R} = \{\zeta\in\mathbb{C}\colon 1<|\zeta|<R\}$ и такое, что* (16) *имеет место, но f не может быть продолжено по непрерывности в начало координат.*

Доказательство. Отметим, что по условию (15)

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} < \infty \quad \forall \delta \in (\tau_0, \infty), \tag{17}$$

так как $\Phi^{-1}(\tau) > 0$ для всех $\tau > \tau_0$ и $\Phi^{-1}(\tau)$ не убывает. Тогда, применяя линейное преобразование $\alpha\Phi + \beta$ с $\alpha = 1/C$ и $\beta = T$ (см., например, (8)), можно считать, что

$$\Phi(t) \geqslant t \quad \forall t \in [0, \infty). \tag{18}$$

Конечно, мы можем считать, что $\Phi(t) = t$ для всех $t \in [0,1)$, так как значения Φ в $[0,1)$ не дают информации о $K_\mu(z) \geqslant 1$. Ясно, что из (17) следует, что $\Phi(t) < \infty$ для всех $t < \infty$ (см. (8), ср. с (11)).

Теперь заметим, что функция $\Psi(t) \colon = t\Phi(t)$ строго возрастает, $\Psi(1) = \Phi(1)$ и $\Psi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Следовательно, функциональное уравнение

$$\Psi(K(r)) = \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2 \quad \forall r \in (0,1]\ , \tag{19}$$

где $\gamma = \Phi^{1/2}(1) \geqslant 1$, разрешимо с $K(1) = 1$ и строго убывающей непрерывной функцией $K(r)$, $K(r) < \infty$, $r \in (0,1]$, и $K(r) \to \infty$ при $r \to 0$. Логарифмируя (19), получаем равенство

$$\log K(r) + \log \Phi(K(r)) = 2 \log \frac{\gamma}{r}$$

и, используя (18), имеем

$$K(r) \leqslant \frac{\gamma}{r}.$$

Тогда в силу (19) и (5)

$$K(r) \geqslant \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right).$$

Далее, мы определяем следующее отображение проколотого единичного круга $\mathbb{D} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \frac{z}{|z|}\,\varrho(|z|),$$

где

$$\varrho(t) = \exp\{I(t)\}, \qquad I(t) = \int\limits_0^t \frac{dr}{rK(r)}\ .$$

Далее,

$$I(t) = \int\limits_0^t \frac{dr}{rK(r)} \leqslant \int\limits_0^t \frac{dr}{r\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)} = \int\limits_{\frac{\gamma}{t}}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} \quad \forall t \in (0,1],$$

где $\gamma/t \geqslant \gamma \geqslant 1 > \Phi(0) = 0$. Следовательно, по условию (17)

$$I(t) \leqslant I(1) = \int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} < \infty \quad \forall t \in (0,1].$$

Отметим, что $f \in C^1(\mathbb{D} \setminus \{0\})$, так как $K(r)$ непрерывна. Следовательно, f локально квазиконформно в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Легко вычислить касательное и радиальное искажения при отображении f на сфере $|z| = \rho,\ \rho \in (0,1)$:

$$\delta_\tau(z) = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{\exp\left\{\int_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho},$$

$$\delta_r(z) = \frac{\partial |f(z)|}{\partial |z|} = \frac{\exp\left\{\int_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho K(\rho)}.$$

Мы видим, что $\delta_r(z) \leqslant \delta_\tau(z)$, так как $K(\rho) \geqslant 1$. Следовательно, в силу сферической симметрии f является диффеоморфным решением уравнения Бельтрами (1) с комплексным коэффициентом μ таким, что

$$K_\mu(z) = \frac{\delta_\tau(z)}{\delta_r(z)} = K(|z|)$$

во всех точках $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ (см., например, подраздел I.4.1 в [27]). Таким образом, из (19) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} \Phi(K(|z|))\, dm(z) =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 \frac{\Psi(K(r))}{rK(r)}\, r^2\, dr = 2\pi\gamma^2 \int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \ \leqslant\ M:\ = 2\pi\gamma^2 I(1) < \infty\ .$$

С другой стороны, вдоль каждой радиальной линии $z/|z| = \eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1$, $f(z) \to \eta$ при $|z| \to 0$, т. е. мы не имеем определенного предела f при $z \to 0$. Легко видеть, что

$$\lim_{z \to 0} |f(z)| = \lim_{t \to 0} \varrho(t) = e^0 = 1\ ,$$

т. е. f отображает проколотый единичный круг $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |\zeta| < R = e^{I(1)}$.

***Замечание* 7.** Области $D = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ и $D' = \mathfrak{R}:\ = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon 1 < |\zeta| < R\}$ имеют слабо плоские границы, условие (16) выполняется, однако f не может быть продолжено по непрерывности на границу. Таким образом, условие (14) в теореме 10 является необходимым.

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009.
2. *Astala K., Iwaniec T., Martin G. J.* Elliptic differential equations and quasiconformal mappings in the plane // Princeton Math. Ser. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. – **48**.
3. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – 2010. – **7**, № 4. – P. 467 – 515.
4. *Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation // Handbook in Complex Analysis: Geometric Function Theory. – 2005. – **2**. – P. 555 – 597.
5. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171 – 219.

6. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
7. *Ковтонюк Д., Рязанов В.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5**, № 2. – С. 159 – 184.
8. *Dybov Yu.* On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equat. – 2010. – **55**, № 12. – P. 1099 – 1116.
9. *Wilder R. L.* Topology of manifolds. – New York: Amer. Math. Soc., 1949.
10. *Ковтонюк Д., Рязанов В.* К теории границ пространственных областей // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины, 2006. – **13**. – С. 110 – 120.
11. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Q-homeomorphisms // Contemp. Math. – 2004. – **364**. – P. 193 – 203.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2005. – **30**. – P. 49 – 69.
13. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
14. *Näkki R.* Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1970. – **484**. – P. 1 – 50.
15. *Gehring F. W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – **45**. – P. 181 – 206.
16. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1978/1979. – **4**. – P. 384 – 401.
17. *Väisälä J.* On the null-sets for extremal distances // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. – 1962. – **322**. – P. 1 – 12.
18. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1948.
19. *Federer H.* Geometric measure theory. – Berlin: Springer, 1969.
20. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. Math. – 1959. – **272**. – P. 1 – 9.
21. *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – P. 75 – 85.
22. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – **104**. – P. 291 – 306.
23. *Maz'ya V.* Sobolev classes. – Berlin: Springer, 1985.
24. *Ignat'ev A. A., Ryazanov V. I.* Finite mean oscillation in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2005. – **2**, № 3. – P. 403 – 424.
25. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2010. – **7**, № 1. – P. 73 – 87.
26. *Bourbaki N.* Functions of a real variable. – Berlin: Springer, 2004.
27. *Reshetnyak Yu. G.* Space mappings with bounded distortion // Transl. Math. Monographs. – 1989. – **73**.

Получено 28.01.11