УДК 517.98 + 517.954

Ю. В. Богданский (Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ”, Киев)

ЛАПЛАСИАН ПО МЕРЕ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В L_2-ВЕРСИИ

We propose a version of the Laplace operator for functions on a Hilbert space with measure. In terms of this operator, we investigate the Dirichlet problem for the Poisson equation.

Запропоновано варіант оператора Лапласа для функцій на гільбертовому просторі з мірою. В термінах вказаного оператора досліджено задачу Діріхле для рівняння Пуассона.

Классический конечномерный лапласиан изначально появился в задачах математической физики в виде
$$\Delta u = \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, u). \tag{1}$$
Отсутствие в бесконечномерных пространствах инвариантной меры и задание классического лапласиана в виде $(\Delta u)(x) = j(u''(x))$ ($j(A) = \operatorname{tr} A$; более общо $j(A) = \operatorname{tr} CA$, $C \geqslant 0$) инициировало различные версии бесконечномерного обобщения лапласиана для функций на гильбертовом пространстве H, основанные на его представлении в виде $(\Delta u)(x) = j(u''(x))$, где j — неотрицательный линейный функционал, определенный на пространстве самосопряженных линейных ограниченных операторов в H (или на некотором его подпространстве) (см., например, работы [1 – 5]).

Начиная с 90-х годов прошлого века появилась серия работ, посвященных различным „существенно бесконечномерным” версиям лапласиана (см., например, работы [6 – 8]). Предлагаемая в настоящей работе версия обобщения оператора Лапласа не исключает конечномерный случай, является вариантом обобщения естественного его задания в форме (1) и, насколько известно автору, ранее не исследовалась.

В качестве применения предложенной в статье версии оператора Лапласа рассмотрена задача Дирихле. При этом для определенного класса замкнутых поверхностей коразмерности 1 предложен альтернативный подход построения поверхностной меры.

1. Лапласиан по мере в L_2-версии. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство ($\dim H \leqslant \infty$); μ — конечная (неотрицательная) борелевская мера на H. Условимся говорить, что (вещественнозначная) функция f (соответственно, векторное поле $\mathbf{X}$), определенная на всем H, принадлежит классу $C_b^1 = C_b^1(H)$ (соответственно, $C_b^1(H;H)$), если f (соответственно, $\mathbf{X}$) имеет в каждой точке $x \in H$ сильную производную, которая вместе с самой f (соответственно, с $\mathbf{X}$) непрерывна и ограничена на всем H; пусть также $C_b = C_b(H)$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на H. По аналогии определяется $C_b(H;H)$.

Пусть G — ограниченная область в H с границей $S = \partial G$. Символом $C^1(G)$ обозначим семейство функций в G, допускающих продолжение на все H до функций класса C_b^1, а символом $C_0^1(G)$ — семейство функций из $C^1(G)$, носители которых лежат в G. Аналогично определяем $C(G)$ и $C_0(G)$; $C(G;H)$, $C^1(G;H)$.

Через $L_2(G)$ обозначим пространство интегрируемых с квадратом измеримых функций на G по отношению к мере $\mu|_G$. Аналогично определяется гильбертово пространство $L_2(G;H)$ квадратично интегрируемых векторных полей на G. При этом норму в $L_2(G;H)$ задаем и обозначаем согласно формуле $|||\mathbf{Z}|||^2 = \int_G \|\mathbf{Z}(x)\|^2 d\mu$, а интегрируемость векторного поля трактуем по Бохнеру (см., например, [9]).

Предложение 1. *Пусть G — область в H, для которой $\mu(\partial G) = 0$. Тогда $C_0^1(G)$ плотно в $L_2(G)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $\alpha > 0$ и любого борелевского множества $A \subset G \setminus (\partial G)_\alpha$ (здесь и в дальнейшем C_α — α-окрестность множества C) индикатор j_A множества A аппроксимируется в $L_2(G)$ функциями из $C_0^1(G)$. При этом вследствие радоновости меры μ в качестве A можно взять компакт.

Зафиксируем $\delta > 0$. Тогда найдется $\beta \in \left(0; \dfrac{\alpha}{2}\right)$ такое, что $\mu(A_{2\beta} \setminus A) < \delta$ (A замкнуто, а потому $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$). Отсюда следует существование множества B — объединения конечного числа шаров радиуса β: $B = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k(x_k;\beta)$, для которого $A \subset B \subset B_\beta \subset A_{2\beta} \subset G$, и достаточно для каждого $\varepsilon \in \left(0; \dfrac{\beta}{2}\right)$ уметь строить функцию $u \in C_0^1(G)$, для которой $|u(x) - 1| < \varepsilon$ для $x \in B$; $u(x) = 0$ вне $B_{2\varepsilon}$.

Для одного шара $B(x_k;\varepsilon) = \{x \mid \|x - x_k\| < \varepsilon\}$ возьмем функцию $v_k(x) = h(\|x - x_k\|)$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(t) = 1$ при $t \leqslant \varepsilon$, $h(t) = 0$ при $t > 2\varepsilon$, $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть $f(\vec{y}) = \max\{y_1, \ldots, y_m\}$ — функция на $\mathbb{R}^m$. Тогда $f \in C(\mathbb{R}^m)$; $f(\vec{0}) = 0$. Пусть $g \in C^1(\mathbb{R}^m)$ и при этом $g(\vec{0}) = f(\vec{0}) = 0$; $|g(\vec{y}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$ для каждого $\vec{y} \in \{\vec{y} \mid 0 \leqslant y_k \leqslant 1, k = 1, \ldots, m\}$. Тогда $u(x) = g(v_1(x), \ldots, v_m(x))$ удовлетворяет требуемым условиям.

В дальнейшем всегда будем предполагать

$$\mu(\partial G) = 0. \tag{2}$$

Для функций $u \in C^1(G)$ определено векторное поле $\mathbf{grad}\, u \in C(G;H)$, что позволяет определить на $L_2(G)$ оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \to L_2(G;H)$ с областью определения $C^1(G)$.

Пусть граница S области G представляет собой гладкое вложенное в H подмногообразие коразмерности 1 (см., например, [10]). Обозначим через $\mathbf{n}$ векторное поле класса C_b^1 на H, которое является продолжением поля единичной внешней нормали границы S.

Пусть $\Phi_t^{\mathbf{n}}$ — поток векторного поля $\mathbf{n}$; семейство мер μ_t определим равенством $\mu_t(A) = \mu(\Phi_t^{\mathbf{n}} A)$ для всех борелевских множеств $A \in \mathfrak{B}(H)$. Семейство мер μ_t слабо сходится к мере μ при $t \to 0$. В дальнейшем будем предполагать дифференцируемость меры μ вдоль поля $\mathbf{n}$ в следующем смысле: семейство знакопеременных мер $\dfrac{1}{t}(\mu_t - \mu)$ слабо фундаментально при $t \to 0$, т. е. для всех $f \in C_b$ существует $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \left(\int_H f d\mu_t - \int_H f d\mu\right)$, что, в силу слабой полноты пространства борелевских мер на H, приводит к существованию (знакопеременной) борелевской меры ϑ такой, что для всех $f \in C_b$ $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \left(\int_H f d\mu_t - \int_H f d\mu\right) = \int_H f d\vartheta$,

$\vartheta = d_{\mathbf{n}}\mu$. При этом предполагается, что $\vartheta \prec \mu$, т. е. существует логарифмическая производная $\rho_\mu^{\mathbf{n}} = \dfrac{d\vartheta}{d\mu}$.

Существование такого векторного поля $\mathbf{n}$ постулируется и представляет собой дополнительное условие на гладкость границы S. В дальнейшем кратко говорим о „*согласовании S с мерой μ*" (соответствующее поле нормали $\mathbf{n}$ назовем „*согласованным с мерой μ*"). Далее, при дополнительных условиях на меру μ будет доказана замыкаемость оператора $\mathbf{grad}$ (см. п. 3). Дополнительное условие (2), в силу предложения 1, позволяет корректно ввести оператор $\operatorname{div} = -(\mathbf{grad})^*\colon L_2(G;H) \to \to L_2(G)$. Лапласиан определим формулой $\Delta = \operatorname{div} \circ \overline{\mathbf{grad}}$.

2. Интегрирование по частям. Пусть G — ограниченная область в H с гладкой границей $S = \partial G$, согласованной с мерой μ. Пусть также выполнено условие (2).

Предложение 2. *Пусть $u \in C_b^1$. Тогда имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} u d\mu = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u(x), \mathbf{n}(x)) d\mu + \int\limits_G u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}} d\mu. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $u \in C_b^1$. Тогда для $t \neq 0$ имеем:

$$\frac{1}{t}\left(\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} u d\mu - \int\limits_G u d\mu\right) = \frac{1}{t}\left(\int\limits_G u(\Phi_t^{\mathbf{n}} x) d\mu_t - \int\limits_G u d\mu\right) =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_G (u(\Phi_t^{\mathbf{n}} x) - u(x)) d\mu_t + \frac{1}{t}\left(\int\limits_G u d\mu_t - \int\limits_G u d\mu\right). \tag{4}$$

Докажем, что второе слагаемое в правой части равенства (4) стремится к $\int_G u d\vartheta$ при $t \to 0$. Действительно, из согласования границы S и меры μ следует справедливость для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ равенства $\vartheta(A) = = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(\mu_t(A) - \mu(A))$, а потому для функции $v = u \cdot j_G$ (здесь j_G — индикатор G) имеем $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\left(\int_H v d\mu_t - \int_H v d\mu\right) = \int_H v d\vartheta$.

Теперь рассмотрим первое слагаемое в правой части (4). При $t \to 0$ функции $g_t(x) = \dfrac{1}{t}(u(\Phi_t^{\mathbf{n}} x) - u(x)) \to (\mathbf{grad}\, u(x), \mathbf{n}(x)) = g_0(x)$; $g_t \cdot j_G \to g_0 \cdot j_G$ поточечно; g_t равномерно ограничены на H. Поскольку для каждого $A \in \mathfrak{B}(H)$ $\mu_t(A) \to \to \mu(A)$, $t \to 0$, в силу теоремы 1.2.19 [11] имеет место равенство $\int_H g_0 \cdot j_G d\mu = = \lim_{t\to 0} \int_H g_t \cdot j_G d\mu_t$.

Таким образом, существует предел правой части равенства (4), равный $\int_G (\mathbf{grad}\, u(x), \mathbf{n}(x)) d\mu + \int_G u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}} d\mu$, откуда следует существование производной $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} u d\mu$ и равенство (3).

В случае, когда u является первым интегралом векторного поля $\mathbf{n}$, формула (3) упрощается и принимает вид $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} u d\mu = \int_G u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}} d\mu$. Отметим, что последняя формула, как следует из предыдущих рассуждений, остается в силе и в случае, когда u является ограниченной непрерывной функцией в H, постоянной на траекториях поля $\mathbf{n}$.

Цель последующих рассуждений — построение на S поверхностной меры σ, ассоциированной с исходной мерой μ, и получение варианта формулы интегрирования по частям.

Лемма 1. *Пусть $S = \partial G$ согласована с мерой μ. Тогда существует $\mathbf{n}$ — продолжение на H поля единичной внешней нормали S такое, что для любой функции $f \in C(S)$ (соответственно, $f \in C^1(S)$) существует $\hat{f}$ — продолжение f на все H, для которого $\hat{f} \in C_b$ (соотвественно, $\hat{f} \in C_b^1$) и $\hat{f}$ постоянна на траекториях поля $\mathbf{n}$.*

Доказательство. Векторное поле ищем в виде $\mathbf{n}(x) = \varphi(x)\mathbf{n}_1(x)$, где $\mathbf{n}_1$ — векторное поле, существование которого гарантировано определением согласования S с мерой μ, а φ — гладкая функция на H. Более точно, если $\Phi(t, x)$ — поток поля $\mathbf{n}_1$, то для $y \in S$ задаем $\mathbf{n}(\Phi(t, y)) = \mathbf{n}_1(\Phi(t, y))h(t)$, где $h(s) = 1$ при $s \in [-\delta; \delta]$, $h(s) = 0$ вне $(-2\delta; 2\delta)$ при некотором $\delta > 0$. При этом продолжение $\hat{f}$ формируется по формуле $\hat{f}(\Phi(t, y)) = f(y)h\left(\dfrac{t}{3}\right)$, $y \in S$, а для тех $x \in H$, которые не представимы в виде $x = \Phi(t, y)$, $y \in S$, полагаем $\mathbf{n}(x) = 0$, $\hat{f}(x) = 0$. Заметим, что путем уменьшения $\delta > 0$ носитель векторного поля $\mathbf{n}$ можно поместить в заранее заданную окрестность границы S.

Непрерывность и ограниченность функции $\hat{f}$ очевидны, и единственную сложность представляет обоснование ее непрерывной дифференцируемости и ограниченности производной $\hat{f}'$ в случае, когда $f \in C^1(S)$.

Гладкость потока $\Phi(t, x)$ по совокупности переменных следует, например, из теоремы 1 [10, с. 90], а анализ доказательства той же теоремы приводит к выводу о том, что частные производные потока $\Phi(t, x)$ по обеим переменным равномерно ограничены на множестве $\{\langle t; x\rangle\} = [-t_0; t_0] \times H$.

Для $x \in \operatorname{supp} \hat{f}$ определим $t(x)$ формулой $\Phi(t(x), x) \in S$. Существование и единственность такого $t(x)$ следует из приведенной выше конструкции $\hat{f}$. В силу теоремы о неявной функции $t(\cdot)$ является функцией класса C^1 (при этом учитывается тот факт, что S — вложенное в H гладкое многообразие). Стандартные выкладки приводят к формуле

$$\mathbf{grad}\, t(x) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t(x), x)\right)^* \mathbf{n}_1(\Phi(t(x), x)). \tag{5}$$

Положим $\Psi(x) = \Phi(t(x), x)$. Тогда Ψ — отображение класса C^1 и при этом

$$\Psi'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t(x), x) \cdot t'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t(x), x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t(x), x) + \mathbf{n}_1(\Phi(t(x), x)) \cdot t'(x).$$

В силу (5) получаем

$$\Psi'(x) = \Big(I - \mathbf{n}_1(\Phi(t(x), x))\big(\mathbf{n}_1(\Phi(t(x), x))\big)^*\Big) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t(x), x).$$

Поэтому существует константа C, для которой при всех $x \in \operatorname{supp} \hat{f}$ имеем $\|\Psi'(x)\| \leqslant$ $\leqslant C \left\|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(t(x), x)\right\|$.

Если g — функция из C_b^1, ограничение которой на S и есть f, то $\hat{f}(x) = g(\Psi(x))$ и, следовательно, $\hat{f} \in C_b^1$ наряду с g.

***Замечание* 1.** Векторное поле $\mathbf{n} = \varphi \cdot \mathbf{n}_1$, полученное при доказательстве леммы 1, также согласовано с мерой μ, и при этом $\rho_\mu^{\mathbf{n}} = \varphi \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}_1} + \mathbf{n}_1\varphi$.

Действительно, если Φ_t — поток векторного поля $\mathbf{n}_1$, то согласованность поля $\mathbf{n}_1$ с мерой μ эквивалентна равенству

$$\int\limits_H (f \circ \Phi_t - f) d\mu = -\int\limits_0^t ds \int\limits_H (f \circ \Phi_s) \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}_1} d\mu, \tag{6}$$

справедливому для всех $f \in C_b$. Подходящей аппроксимацией $f \in C_b$ функциями из класса C_b^1 доказывается, что равенство (6), а поэтому и определяющее $\rho_\mu^{\mathbf{n}_1}$ равенство $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \displaystyle\int_H f d\mu_t = \int_H f \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}_1} d\mu$, достаточно проверять лишь для $f \in C_b^1$. Для функций $f \in C_b^1$ $\displaystyle\int_H f \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}_1} d\mu = -\int_H \mathbf{n}_1 f d\mu$, откуда в силу равенства $-\displaystyle\int_H \mathbf{n} f d\mu = -\int_H (\mathbf{n}_1(\varphi f) - f \cdot \mathbf{n}_1\varphi) d\mu = \int_H (\varphi \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}_1} + \mathbf{n}_1\varphi) f d\mu$ следует согласование поля $\mathbf{n}$ с мерой μ.

Пусть векторное поле $\mathbf{n}$ выбрано в соответствии с леммой 1.

Для каждой ограниченной непрерывной функции f на S определим число

$$I_{\mathbf{n}}(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} \hat{f} d\mu = \int\limits_G \hat{f} \rho_\mu^{\mathbf{n}} d\mu. \tag{7}$$

$I_{\mathbf{n}}$ — линейный функционал на пространстве $C(S)$. Он неотрицателен в силу первого равенства в (7) и имеет свойство: из поточечной монотонной сходимости $f_m \searrow 0$ следует $I_{\mathbf{n}}(f_m) \searrow 0$, $m \to \infty$, в силу второго равенства. Поэтому, как следует из схемы Даниэля построения интеграла Лебега (см. [12, с. 150]), существует и притом единственная мера σ на борелевской σ-алгебре в S, для которой $I_{\mathbf{n}}(f) = \displaystyle\int_S f d\sigma$ для всех $f \in C(S)$.

Однако функционал $I_{\mathbf{n}}$ и мера σ формально зависят от выбора поля нормали $\mathbf{n}$.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие*

$$\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{8}$$

где S_ε — ε-окрестность поверхности S. Пусть $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — два векторных поля класса C_b^1 на H, которые являются продолжениями поля единичной внешней нормали на S. Пусть, далее, f_k, $k = 1, 2$, — ограниченные непрерывные функции на H, постоянные на траекториях векторного поля $\mathbf{n}_k$, представляющие собой продолжение заданной на S функции g. Тогда

$$I_{\mathbf{n}_1}(g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}_1} G} f_1 d\mu = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}_2} G} f_2 d\mu = I_{\mathbf{n}_2}(g). \tag{9}$$

Доказательство. В [13] доказано, что в условиях леммы имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\Phi_t^{\mathbf{n}_1}G)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\Phi_t^{\mathbf{n}_2}G).$$

Это следует из соотношения $\mu((\Phi_t^{\mathbf{n}_1}G)\Delta(\Phi_t^{\mathbf{n}_2}G))=o(t)$ при $t\to 0$, откуда также следует равенство

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}_1}G} f_1 d\mu=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}_2}G} f_1 d\mu. \tag{10}$$

Если функция $g=f_1|_S=f_2|_S$ равномерно непрерывна на S, то $\sup_{x\in S_\varepsilon}|f_1(x)-f_2(x)|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, поэтому

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}_2}G}(f_1-f_2)d\mu=0. \tag{11}$$

Таким образом, в силу равенства (10) для равномерно непрерывных на S функций g формула (9) установлена. Но этого достаточно для совпадения соответствующих мер на S, поэтому равенство (9) имеет место для всех ограниченных непрерывных функций g на S.

Тем самым на S корректно определена (конечная) поверхностная мера σ и для непрерывных ограниченных на S функций имеет место равенство

$$\int\limits_S g d\sigma=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G}\hat{g}d\mu=\int\limits_G \hat{g}\rho_\mu^{\mathbf{n}}d\mu. \tag{12}$$

Из (11) также следует, что для равномерно непрерывных в окрестности S функций u имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}}G}u d\mu=\int\limits_S u d\sigma, \tag{13}$$

а для функций класса C_b^1, в силу предложения 2

$$\int\limits_S u d\sigma=\int\limits_G(\mathbf{grad}\, u(\cdot),\mathbf{n}(\cdot))d\mu+\int\limits_G u\rho_\mu^{\mathbf{n}}d\mu. \tag{14}$$

Итак, получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная область в H, граница которой $S=\partial G$ согласована с мерой μ и выполнено условие $\mu(S_\varepsilon)=O(\varepsilon)$. Тогда на S существует и притом единственная конечная борелевская мера σ, для которой имеют место равенства* (12) (*здесь $\hat{g}$ — продолжение g на H, построенное согласно лемме* 1). *При этом для равномерно непрерывных в окрестности S функций u выполнено равенство* (13), *а для функций класса C_b^1 имеет место формула* (14).

***Замечание* 2.** Классический конечномерный вариант формулы (14) в случае инвариантной меры эквивалентен формуле Гаусса–Остроградского.

3. Исследование оператора grad. Напомним, что вектор $a\in H$ называется допустимым сдвигом меры μ, если $\mu_a\prec\mu$, где $\mu_a(A)=\mu\{x-a\mid x\in A\}$ (для всех борелевских множеств $A\in\mathfrak{B}(H)$).

Наложим на меру μ дополнительное условие $(*)$: пусть существуют $a \in H$, $a \neq 0$, и $\delta > 0$ такие, что для каждого $s \in (0;\delta)$ вектор sa является допустимым сдвигом меры μ и при этом функции $\dfrac{d\mu_{sa}}{d\mu}$ равномерно относительно $s \in (0;\delta)$ ограничены (в существенном) на шарах в H, т. е. для каждого $r \geqslant 0$ существует $C > 0$ такое, что при всех $\langle s;x\rangle \in (0;\delta) \times \{x \mid \|x\| \leqslant r\}$ выполнено неравенство $\left|\dfrac{d\mu_{sa}}{d\mu}\right| \leqslant C$ почти всюду.

Предложение 3. *Пусть мера μ удовлетворяет условию $(*)$. Тогда существует $C_1 > 0$ такое, что для всех $u \in C_0^1(G)$ имеет место неравенство $\|u\|_{L_2(G)} \leqslant \leqslant C_1 |||\,\mathbf{grad}\,u|||_{L_2(G;H)}$.*

Доказательство. Не теряя общности можно считать, что $\|a\| = d$, где $d = = \operatorname{diam} G$, $\delta = 1$. Тогда для всех $x \in G$, $u \in C_0^1(G)$ имеем $u(x+a) = 0$ (доопределяя u вне G нулем), поэтому для $x \in G$ $-u^2(x) = 2\displaystyle\int_0^1 u(x+sa)(\mathbf{grad}\,u(x+sa), a)ds$,

$$\int\limits_H u^2 d\mu \leqslant 2\int\limits_H d\mu \int\limits_0^1 |u(x+sa)| \cdot |(\mathbf{grad}\,u(x+sa), a)| ds =$$

$$= 2\int\limits_0^1 ds \int\limits_H |u(x)| \cdot |(\mathbf{grad}\,u(x), a)| \frac{d\mu_{sa}}{d\mu}(x) d\mu \leqslant$$

$$\leqslant 2Cd \cdot \|u\|_{L_2(G)} \cdot |||\,\mathbf{grad}\,u|||_{L_2(G;H)}.$$

Отсюда $\|u\|_{L_2(G)} \leqslant 2Cd|||\,\mathbf{grad}\,u|||_{L_2(G;H)}$.

Пусть в дальнейшем мера μ удовлетворяет условиям:

1) для меры μ выполнено условие $(*)$;

2) существует полная в H система векторов, вдоль которых μ L_2-дифференцируема (т. е. таких векторов $h \in H$, для которых $d_h\mu \prec \mu$ и соответствующая плотность $\rho_\mu^h \in L_2(H)$).

Примером такой меры является гауссова мера, корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H [11]. Анализ выполнения условий 1, 2 для других классов мер в бесконечномерном гильбертовом пространстве автором не проводился.

Относительно области G далее предполагается следующее:

3) ∂G согласована с мерой μ;

4) $\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Предложение 4. *Пусть, дополнительно, $\rho_\mu^{\mathbf{n}}|_G \in L_2(G)$. Тогда оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \to L_2(G;H)$ (с областью определения $C^1(G)$) замыкаем.*

Доказательство. Пусть $u_m \in C^1(G)$, $u_m \to 0$, $\mathbf{grad}\,u_m \to \mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$. Полагая $\delta = \displaystyle\int_G \|\mathbf{Z}(\cdot)\|^2 d\mu > 0$, выбираем $\varepsilon > 0$ так, что $\displaystyle\int_{G\setminus S_\varepsilon} \|\mathbf{Z}(\cdot)\|^2 d\mu > \frac{\delta}{2}$.

Пусть $\varphi \in C_0^1(G)$ такова, что $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ и при этом $\varphi(x) = 0$ при $x \in S_{\varepsilon/2}$, $\varphi(x) = 1$ при $x \in G \setminus S_\varepsilon$. Тогда $\varphi u_m \to 0$ (в $L_2(G)$), $\mathbf{grad}\,\varphi u_m = \varphi\,\mathbf{grad}\,u_m + + u_m\,\mathbf{grad}\,\varphi \to \varphi\mathbf{Z}$. При этом $|||\varphi\mathbf{Z}||| > \sqrt{\delta/2} > 0$ и потому, не теряя общности, можно считать, что $u_m \in C_0^1(G)$, причем $\operatorname{supp} u_m \subset G \setminus S_{\varepsilon/2}$.

Но тогда, в силу (14), для любого согласованного с мерой μ поля нормали $\mathbf{n}_1$ имеем $0 = \int_S u_m d\sigma = \int_G (\mathbf{grad}\, u_m(\cdot), \mathbf{n}_1(\cdot))d\mu + \int_G u_m \rho_\mu^{\mathbf{n}_1} d\mu$. Если при этом $\rho_\mu^{\mathbf{n}_1}|_G \in L_2(G)$, то второе слагаемое стремится к 0 при $m \to \infty$, а первое — к $\int_G (\mathbf{Z}, \mathbf{n}_1)d\mu$. Согласно замечанию 1 в качестве поля $\mathbf{n}_1$ можно взять поле $\varphi{\cdot}h+\psi{\cdot}\mathbf{n}$, где $\varphi, \psi \in C_b^1$, $\operatorname{supp}\psi \subset S_\delta$, $\operatorname{supp}\varphi \subset G \setminus S_\delta$, $\delta > 0$ и мера μ L_2-дифференцируема вдоль h. Тогда $\rho_\mu^{\mathbf{n}_1}|_G \in L_2(G)$ и при $\delta \in (0; \varepsilon/2)$ получим равенство $\int_G (\mathbf{Z}, \varphi h)d\mu = 0$.

Поэтому в силу условий 2 – 4, наложенных на меру и область в данном пункте, Z ортогонально в $L_2(G; H)$ всем возможным линейным комбинациям индикаторов открытых подмножеств в G (с векторными коэффициентами), которые плотны в $L_2(G; H)$. Получили противоречие с исходным допущением.

4. Оператор следа. Пусть $u \in C^1(G)$, $\varphi \in C_0^1(G)$, $\varphi(x) = 1$ для $x \in G \setminus S_\varepsilon$. Тогда в силу предложения 3 $\|u\varphi\| \leqslant C_1 |||\,\mathbf{grad}(u\varphi)|||$, причем константа C_1 не зависит от выбора φ.

Далее $|||\,\mathbf{grad}(u\varphi)||| \leqslant \|(u\|\,\mathbf{grad}\,\varphi\|)\|_{L_2(G)} + \|(\varphi\|\,\mathbf{grad}\,u\|)\|_{L_2(G)}$. Второе слагаемое в правой части последнего неравенства оценивается сверху $|||\,\mathbf{grad}\,u|||$. Выбирая специальным образом последовательность φ_m, можно для любого $k > 1$ обеспечить выполнение условий: для всех m $\varphi_m(x) \geqslant 0$, $\varphi_m(x) = 1$ при $x \in \Phi_{-1/m}^{\mathbf{n}} G$, $\|\,\mathbf{grad}\,\varphi_m(x)\| \leqslant km$. Следовательно,

$$\int_G |u| \cdot \|\,\mathbf{grad}\,\varphi_m\| d\mu \leqslant km \int_{G \setminus \Phi_{-1/m}^{\mathbf{n}} G} |u| d\mu,$$

$$\int_G |u \cdot \varphi_m| d\mu \leqslant C_1 \left(\int_G \varphi \|\,\mathbf{grad}\,u\| d\mu + km \int_{G \setminus \Phi_{-1/m}^{\mathbf{n}} G} |u| d\mu \right).$$

Предельным переходом, учитывая произвольность $k > 1$, получаем

$$\|u\|_{L_1(G)} \leqslant C_1 \left(|||\,\mathbf{grad}\,u|||_{L_1(G;H)} + \|u|_S\|_{L_1(S)} \right). \tag{15}$$

Здесь $|||\mathbf{Z}|||_{L_1(G;H)} = \int_G \|\mathbf{Z}(x)\| d\mu$.

Пусть, далее, $\rho_\mu^{\mathbf{n}}|_G \in L_\infty(G)$, $u \in C^1(G)$. Тогда в силу (15) имеем

$$\|u|_S\|_{L_2(S)} = \left(\int_S u^2 d\sigma \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_G \left| \left(\mathbf{grad}\left(u^2\right), \mathbf{n} \right) \right| d\mu \right)^{1/2} + \left(\int_G |u^2 \rho_\mu^{\mathbf{n}}| d\mu \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\|u\| + \tilde{C} |||\,\mathbf{grad}\,u||| \tag{16}$$

(константы C, $\tilde{C}$ от функции $u \in C^1(G)$ не зависят!).

Определение 1. *Оператором следа* $\gamma\colon L_2(G) \to L_2(S)$ *с областью определения* $D\big(\overline{\mathbf{grad}}\big)$ *назовем продолжение оператора* $C^1(G) \ni u \mapsto u|_S$, *корректное в силу* (16).

Неравенство (16) для $u \in D\big(\overline{\mathbf{grad}}\big)$ переходит в следующее:

$$\|\gamma(u)\| \leqslant C\|u\| + \tilde{C}|||\overline{\mathbf{grad}}u|||, \tag{17}$$

а при предельном переходе из (15) получаем

$$\|u\|_{L_1(G)} \leqslant C_1\Big(|||\overline{\mathbf{grad}}\,u|||_{L_1(G;H)} + \|\gamma(u)\|_{L_1(S)}\Big). \tag{18}$$

5. Задача Дирихле. Как и в п. 1, определим операторы

$$\operatorname{div} = -(\mathbf{grad})^*\colon L_2(G;H) \to L_2(G), \qquad \Delta = \operatorname{div}\circ\overline{\mathbf{grad}}$$

и поставим первую краевую задачу поиска функции $u \in D(\Delta)$, для которой

$$\Delta u = f, \quad f \in L_2(G), \tag{19}$$

$$\gamma(u) = g, \quad g \in \gamma(D(\Delta)). \tag{20}$$

Задачу (19), (20) можно свести к задаче (19) – (21) с условием

$$\gamma(u) = 0 \tag{21}$$

(берем любое $v \in D(\Delta)$, для которого $g = \gamma(v)$, и переходим к $u_1 = u - v$).

Уравнение (19), вследствие плотности $C_0^1(G)$ в $L_2(G)$ (см. предложение 1), эквивалентно равенству $\displaystyle\int_G \big(\overline{\mathbf{grad}}u, \mathbf{grad}\,\varphi\big)d\mu = -\int_G f\varphi d\mu$, которое должно выполняться для всех $\varphi \in C_0^1(G)$. Обозначим через W замыкание $\big\{\mathbf{grad}\,\varphi \mid \varphi \in C_0^1(G)\big\}$ в $L_2(G;H)$. Очевидно, $W \subset \operatorname{Im}\big(\overline{\mathbf{grad}}\big)$.

В условиях предложения 3 функционал $\alpha\colon\ \mathbf{grad}\,\varphi \mapsto -\displaystyle\int_G f\varphi d\mu$ ограничен на плотном в W линейном многообразии $\big\{\mathbf{grad}\,\varphi \mid \varphi \in C_0^1(G)\big\}$. Поэтому по теореме Рисса существует $\mathbf{Z} \in W$ такое, что $\alpha(\mathbf{grad}\,\varphi) = \displaystyle\int_G (\mathbf{Z}, \mathbf{grad}\,\varphi)d\mu$.

Если последовательность $\varphi_m \in C_0^1(G)$ такова, что $\mathbf{grad}\,\varphi_m \to \mathbf{Z}$, то в силу предложения 3 существует $\lim\varphi_m = u$. Значит $\mathbf{Z} = \overline{\mathbf{grad}}u$, а в силу неравенства (17) $\gamma(u) = \lim\varphi_m|_S = 0$.

Для проверки единственности решения задачи (19), (20) заметим, что уравнение $\Delta u = 0$ равносильно уравнению $\overline{\mathbf{grad}}u = \mathbf{0}$. Если, дополнительно, $\gamma(u) = 0$, то существует последовательность $u_m \in C^1(G)$ такая, что $u_m \to u$ в $L_2(G)$, $\mathbf{grad}\,u_m \to \overline{\mathbf{grad}}u$ в $L_2(G;H)$, $u_m|_S \to 0$ в $L_2(S)$. Отсюда следует сходимость указанных последовательностей в соответствующих пространствах $L_1(G)$, $L_1(G;H)$, $L_1(S)$, и в силу неравенства (18) приходим к нулевому решению.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1 – 4 *из п.* 3 *и* $\rho_\mu^{\mathbf{n}}|_G \in L_\infty(G)$. *Тогда задача Дирихле* (19), (20) *имеет и притом единственное решение.*

***Замечание* 3.** Можно доказать, что условие (8) в формулировке леммы 2 и в последующем тексте излишне и его можно заменить более слабым условием (2).

1. *Gross L.* Potential theory on Hilbert space // J. Funct. Anal. – 1967. – **1**. – P. 123 – 181.
2. *Далецкий Ю. Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, № 4. – С. 3 – 54.
3. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
4. *Немировский А. С., Шилов Г. Е.* Об аксиоматическом описании оператора Лапласа для функций на гильбертовом пространстве // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, № 3. – С. 79 – 85.
5. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781 – 784.
6. *Accardi L., Smolianov O. G.* On Laplacians and traces // Conf. Sem. Univ. Bari. – 1993. – **250**. – P. 1 – 25.
7. *Accardi L., Barhoumi A., Ouerdiane H.* A quantum approach to Laplace operators // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2006. – **9**. – P. 215 – 248.
8. *Accardi L., Ji U. C., Saito K.* Exotic Laplacians and associated stohastic processes // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2009. – **12**. – P. 1 – 19.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
10. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 204 с.
11. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. – Москва; Ижевск: РХД, 2008. – 544 с.
12. *Богачев В. И.* Основы теории меры. – Москва; Ижевск: РХД, 2006. – Т. 2. – 680 с.
13. *Богданський Ю. В.* Бездивергентний варіант формули Гаусса – Остроградського на нескінченно-вимірних многовидах // Наук. вісті НТУУ „КПІ”. – 2008. – № 4. – С. 132 – 138.

Получено 22.02.11,
после доработки — 24.07.11