УДК 519.21

**А. Ю. Пилипенко** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ОБ ОТОБРАЖЕНИИ СКОРОХОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОТРАЖЕНИЕМ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ СКАЧКООБРАЗНОГО ВЫХОДА ИЗ ГРАНИЦЫ*

For a solution of a reflection problem on a half-line similar to the Skorokhod reflection problem but with possible jump-like exit from zero, we obtain an explicit formula and study its properties.

We also construct a Wiener process on a half-line with Wentzell boundary condition as a strong solution of a certain stochastic differential equation.

Отримано явну формулу та досліджено властивості розв'язку задачі відбиття на півпрямій, подібної до задачі відбиття Скорохода, але з можливістю стрибкоподібного виходу з нуля.

Також побудовано вінеровий процес на півпрямій з граничною умовою Вентцеля як сильний розв'язок деякого стохастичного диференціального рівняння.

**Введение.** Рассмотрим линейный оператор второго порядка $L = a(x)\dfrac{d^2}{dx^2} + b(x)\dfrac{d}{dx}$, $x \geq 0$, где $b$ — непрерывная функция, $a$ — непрерывная и положительная функция. Известно, что если $\{T_t,\ t \geq 0\}$ — феллеровская полугруппа в $C_b([0,\infty))$ и ее генератор $A$ является сужением $(L, C_b^2([0,\infty)))$, то функции из $D(A) \subset C_b^2([0,\infty))$ должны удовлетворять граничному условию вида

$$qf(0) + \int\limits_0^\infty (f(x) - f(0))\mu(dx) + \gamma f'(0) + \sigma Lf(0) = 0,$$

где $q \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $\mu$ — мера на $(0,\infty)$. Соответствующее утверждение было получено А. Д. Вентцелем [1] (см. [2] для многомерного случая). Неформально коэффициенты $q$, $\gamma$, $\sigma$ отвечают за „погибание" процесса в нуле, „непрерывное, мгновенное" отражение в нуле и „залипание" в нуле соответственно. Мера $\mu$ отвечает за скачкообразный выход процесса из нуля.

Построениям марковских процессов с граничными условиями Вентцеля посвящено множество работ (см., например, [3–13] и приведенную там библиографию). Отметим отдельно подход А. В. Скорохода [3], который предложил стохастические дифференциальные уравнения, соответствующие граничному условию $f'(0) \equiv 0$, а именно, уравнения вида

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt + \sqrt{a(\xi(t))}dw(t) + dL(t), \quad t \geq 0,$$

где $\xi(t) \geq 0$ при $t \geq 0$,

$$L \text{ — монотонный, непрерывный, } \mathcal{F}_t\text{-согласованный процесс}, \quad L(0) = 0, \qquad (1)$$

$$L(t) = \int\limits_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\xi(s)=0}\, dL(s), \quad t \geq 0. \qquad (2)$$

*Выполнена при частичной поддержке гранта Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф40.1/023.)

Последнее условие означает, что процесс $L$ может возрастать лишь в те моменты времени, когда $\xi$ попадает в $0$.

Отправной точкой для решения описанных выше стохастических уравнений было решение следующей детерминированной задачи. Для непрерывной (неслучайной) функции $w, w(0) \geq 0$, найти такие непрерывные функции $x$ и $L$, что

$$x(t) = w(t) + L(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$L \text{ непрерывна, монотонно не убывает,} \quad L(0) = 0, \tag{4}$$

$$L(t) = \int_0^t \mathbb{I}_{x(s)=0} dL(s), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

$$x(t) \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Известно, что решение проблемы Скорохода (3) – (6) существует, единственно и задается формулами

$$L(t) = (\Gamma w)(t) := - \min_{s\in[0,t]} \{w(s) \wedge 0\},$$

$$x(t) = w(t) + L(t).$$

Отметим также работы С. В. Ануловой [5, 6], в которых диффузии с граничными условиями Вентцеля были получены как слабые решения некоторых стохастических дифференциальных уравнений. Например, если $q = \sigma = 0$, то полугруппа $\{T_t\}$ соответствовала бы уравнению

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt + \sqrt{a(\xi(t))}dw(t) + dL(t) + d\Pi(L(t)), \quad t \geq 0,$$

где $L$ удовлетворяет условиям (4), (5), $\Pi$ — некоторый неубывающий процесс с независимыми приращениями, не зависимый от $w$.

***Замечание* 1.** В работах [5, 6] рассматривалась, вообще говоря, гораздо более общая многомерная ситуация.

Целью данной работы является получение явной формулы и исследование свойств для решения задачи отражения, подобной проблеме Скорохода (3) – (6), но с возможностью скачкообразного выхода из нуля.

В частности, будет доказано, что если $\Pi$ — неубывающий, скачкообразный процесс Леви (с возможно бесконечной мерой Леви), не зависимый от $w$, то существует единственное сильное решение стохастического уравнения

$$d\xi(t) = dw(t) + dL(t) + d\Pi(L(t)), \quad t \geq 0,$$

где $L$ удовлетворяет (4), (5).

При этом будет показано, что пара $(\xi(t), L(t))$, $t \geq 0$, является решением следующей проблемы мартингалов. Процесс

$$f(\xi(t)) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(\xi(s))ds - \left(f'(0) + \int_0^\infty (f(u) - f(0))\mu(du)\right) L(t)$$

является мартингалом для любой $f \in C^2([0,\infty))$, имеющей компактный носитель. Здесь $\mu$ — мера Леви процесса $\Pi$.

**1. О решении одной задачи отражения.** Пусть $C([0,\infty))$ и $D([0,\infty))$ — пространства непрерывных функций и, соответственно, функций, непрерывных справа и имеющих пределы слева. Введем в них топологию с помощью следующих метрик. Положим

$$\rho(f,g) = \sup_{t\geq 0} e^{-t}(|f(t)-g(t)| \wedge 1), \quad f,g \in C([0,\infty)),$$

т. е. топология в $C([0,\infty))$ соответствует равномерной сходимости на компактах.

Пусть $\Lambda$ — множество непрерывных возрастающих функций $\lambda\colon [0;\infty) \to [0;\infty)$ таких, что

$$\|\lambda\| := \sup_{s,t\in[0;\infty), s<t} \log(\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}) < \infty.$$

Положим

$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \left( \inf_{\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda} (\|\lambda_1\| + \|\lambda_2\| + \sup_{t\in[0;n]} |f(\lambda_1(t)) - g(\lambda_2(t))|) \wedge 1 \right)$$

для $f,g \in D([0,\infty))$.

Через $C_0([0,\infty))$ и $D_0([0,\infty))$ обозначим подпространства $C([0,\infty))$ и $D([0,\infty))$, соответственно, функций, удовлетворяющих условию $f(0)=0$.

Пусть $w \in C_0([0,\infty))$ — непрерывная функция, $F \in D_0([0,\infty))$ — возрастающая функция.

Пусть $x_0 \geq 0$. Рассмотрим систему уравнений относительно пары неизвестных функций $(\xi, L)$:

$$\xi(t) = x_0 + w(t) + F(L(t)), \quad t \in [0,\infty), \tag{7}$$

$$L(0) = 0, \quad L \quad \text{монотонно не убывает и непрерывна}, \tag{8}$$

$$\int_0^t \mathbb{I}_{\xi(s)=0} dL(s) = L(t), \quad t\in[0,\infty), \tag{9}$$

$$\xi(t) \geq 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{10}$$

Условие (9) означает, что функция $L$ возрастает лишь в те моменты времени, когда функция $\xi$ попадает в 0.

Систему (7)–(10) будем обозначать через $W(x_0,w,F)$. Если же уравнение (7) заменено на

$$\xi(t) = w(t) + F(L(t)), \quad t\in[0,\infty),$$

где $w \in C([0,\infty))$, $w(0) \geq 0$ ($w(0)$ не обязательно равно нулю), то систему будем обозначать через $W(w,F)$, т. е. $W(w,F) = W(w(0), w(\cdot)-w(0), F)$.

Рассмотрим два важных примера.

***Пример* 1.** Пусть $F(x) = x$. Тогда система (7)–(10) принимает вид

$$\widetilde{\xi}(t) = x_0 + w(t) + \widetilde{L}(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{11}$$

$$\widetilde{L}(0) = 0, \quad \widetilde{L} \quad \text{монотонно не убывает и непрерывна,} \tag{12}$$

$$\int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\widetilde{\xi}(s)=0} d\widetilde{L}(s) = \widetilde{L}(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{13}$$

$$\widetilde{\xi}(t) \geq 0. \tag{14}$$

Данная система впервые была предложена А. В. Скороходом [3]. Решение этой системы существует, единственно и дается формулой

$$\widetilde{L}(t) = \Gamma(x_0 + w(\cdot))(t), \quad \widetilde{\xi}(t) = x_0 + w(t) + \widetilde{L}(t), \tag{15}$$

где

$$(\Gamma f)(t) = -\min_{s \in [0,t]} \{f(s) \wedge 0\}. \tag{16}$$

Задачу Скорохода (11)–(14) будем обозначать через $S(x_0, w)$ или $S(w)$, если вместо (11) рассматривается уравнение $\widetilde{\xi}(t) = w(t) + \widetilde{L}(t)$ с $w(0) \geq 0$, т. е. $S(w) = S(w(0), w(\cdot) - w(0))$.

Известно, что если $w(t)$, $t \geq 0$, является винеровским процессом, то $\widetilde{L}(t)$, $t \geq 0$, — локальное время в нуле отраженного винеровского процесса $\widetilde{\xi}(t)$, $t \geq 0$.

***Пример* 2.** Предположим, что $F(x) = x + \Pi(x)$, где $\Pi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k 1\!\!\mathrm{I}_{(b_k, b_{k+1}]}(x)$, $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $0 < b_1 < \ldots < b_n < b_{n+1} = +\infty$, — скачкообразная неубывающая функция, имеющая конечное число скачков, либо

$$\Pi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1\!\!\mathrm{I}_{(b_k, b_{k+1}]}(x),$$

$0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots$, $0 < b_1 < \ldots < b_n < \ldots$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

В этом случае решение системы $W(x_0, w, F)$ можно получить следующим образом. Пусть $(\widetilde{\xi}, \widetilde{L})$ — решение задачи Скорохода $S(x_0, w)$. Обозначим через $t_1$ момент, в который $\widetilde{L}$ достигает уровня $a_1$. Положим $\xi(t) := \widetilde{\xi}(t)$, $t \in [0, t_1)$, $\xi(t_1) := b_1$. Затем снова будем решать задачу Скорохода при $t \geq t_1$ с начальным условием $\widetilde{\xi}(t_1) = b_1$, $\widetilde{L}(t_1) = 0$ до тех пор пока (новая) функция $\widetilde{L}$ не достигнет уровня $a_2 - a_1$ в некоторый момент $t_2$. Положим $\xi(t) := \widetilde{\xi}(t)$, $t \in [t_1, t_2)$, $\xi(t_2) := b_2 - b_1$. И так далее.

Пусть $\{w(t),\, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, $\{\Pi(t),\, t \geq 0\}$ — не зависимый от $\{w(t),\ t \geq 0\}$ неубывающий процесс Леви с конечной мерой Леви $\mu$. Отметим, что $\Pi(t)$ является составным пуассоновским процессом и представим в виде

$$\Pi(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \psi_n,$$

где $N(t)$, $t \geq 0$, — пуассоновский процесс с интенсивностью $\alpha = \mu((0, \infty))$, $\{\psi_n,\ n \geq 1\}$ — н. о. р. случайные величины, не зависимые от $N(t)$, $t \geq 0$, такие, что $\mathrm{P}(\psi_n \leq x) = \mu((0, x])/\alpha$.

Процесс $\{\Pi(t), t \geq 0\}$ удовлетворяет сформулированным выше условиям примера и решение задачи $W(x_0, w, F)$ с $F(x) = x + \Pi(x)$ можно получить, последовательно решая задачу Скорохода и добавляя необходимые скачки. Несложно также видеть, что процесс $L$ будет локальным временем для $\xi$ в нуле.

Отметим, что если процесс $\Pi$ имеет бесконечную меру Леви, то с вероятностью 1 он имеет бесконечное число скачков на каждом интервале и рассуждения из примера 2 неприменимы.

Основным результатом данного пункта является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Предположим, что* $F \in D_0([0, \infty))$ — *строго возрастающая функция,*

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty.$$

*Тогда существует единственное решение системы* $W(x_0, w, F)$. *При этом*

$$L(t) = F^{(-1)}(\Gamma(x_0 + w(\cdot))(t)), \tag{17}$$

*где отображение* $\Gamma$ *задано в* (16), *а обобщенная обратная функция* $F^{(-1)}$ *задана соотношением*

$$F^{(-1)}(x) = \inf\{y \geq 0\colon F(y) \geq x\}. \tag{18}$$

***Доказательство.*** *Единственность* получается аналогично доказательству Скорохода в случае $F(x) = x$. Действительно, пусть $(\xi_1, L_1)$, $(\xi_2, L_2)$ — два решения. Предположим, что $\xi_1(t) > \xi_2(t)$ для некоторого $t > 0$. Положим $t_0 = \sup\{z \leq t\colon \xi_1(z) \leq \xi_2(z)\}$. Поскольку $F$ — возрастающая функция, то

$$L_1(t) > L_2(t), \quad L_1(t_0) \leq L_2(t_0). \tag{19}$$

Из того, что $\xi_1(s) > \xi_2(s) \geq 0$, $s \in (t_0, t]$, следует, что $L_1(s) = L_1(t)$, $s \in (t_0, t]$. Отсюда с учетом непрерывности $L_1$ следует $L_1(t_0) = L_1(t)$. Это противоречит (19), так как

$$L_1(t_0) = L_1(t) > L_2(t) \geq L_2(t_0) \geq L_1(t_0),$$

что невозможно. Единственность доказана.

*Существование.* Несложно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.** *Пусть* $F \in D([0, \infty))$ — *строго возрастающая функция и*

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty.$$

*Тогда* $F^{(-1)}$ *является непрерывной неубывающей функцией.*

Из леммы 1 и того, что $F(0) = 0$, следует, что функция $L$, определенная в (17), также непрерывна, монотонна, $L(0) = 0$.

Для завершения доказательства теоремы остается проверить (9), (10) для функции $\xi$, определенной в (7).

Пусть $\{q_k\}$ — точки скачков функции $F$,

$$x_k = F(q_k), \quad \widetilde{x}_k = F(q_k-).$$

Заметим, что

$$F^{(-1)}(x) = q_k, \quad x \in [\widetilde{x}_k, x_k], \tag{20}$$

$$F(F^{(-1)}(x)) = \begin{cases} x, & x \notin \cup_k[\widetilde{x}_k, x_k), \\ x_k, & x \in \cup_k[\widetilde{x}_k, x_k), \end{cases}$$

и, в частности,

$$F(F^{(-1)}(x)) \geq x.$$

Поэтому

$$F(L(t)) \geq \Gamma(x_0 + w(\cdot))(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Значит,

$$\xi(t) \geq x_0 + w(t) + \Gamma(x_0 + w(\cdot))(t).$$

Правая часть неотрицательна, более того, она совпадает с $\widetilde{\xi}(t)$ — решением задачи Скорохода (11) – (14). Таким образом, мы доказали, что

$$\xi(t) \geq \widetilde{\xi}(t) \geq 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{21}$$

Проверим (9). Пусть $\xi(t) > 0$ для некоторого $t \in (0, \infty)$. Предположим, что $\widetilde{L}(t) \notin \cup_k[\widetilde{x}_k, x_k)$, где $\widetilde{L}$ определяется из (11) – (14) и задано формулой (15). Тогда

$$F(F^{(-1)}(\Gamma(x_0 + w(\cdot))(t)) = F(F^{(-1)}(\widetilde{L}(t))) = \widetilde{L}(t).$$

Поэтому

$$\xi(t) = \widetilde{\xi}(t). \tag{22}$$

Если $\widetilde{\xi}(t) > 0$, то для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\widetilde{\xi}(s) > 0, \quad s \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon].$$

Из (13) следует, что $\widetilde{L}(t) = \widetilde{L}(t - \varepsilon) - \widetilde{L}(t + \varepsilon)$, т. е.

$$\Gamma(x_0 + w(\cdot))(t) = \Gamma(x_0 + w(\cdot))(t - \varepsilon) = \Gamma(x_0 + w(\cdot))(t + \varepsilon).$$

Поэтому $L(t - \varepsilon) = L(t + \varepsilon)$ и, значит,

$$\int\limits_0^\infty 1\!\!1_{\xi(s)>0} 1\!\!1_{\widetilde{L}(s) \notin \cup_k[\widetilde{x}_k, x_k)} dL(s) = 0.$$

***Замечание* 2.** Из неравенства (21) и справедливости (22) для $t$ таких, что $\widetilde{L}(t) \notin \cup_k(\widetilde{x}_k, x_k)$ и $\xi(t) > 0$, следует утверждение

$$\forall\, t \notin \widetilde{L}^{-1}(\cup_k[\widetilde{x}_k, x_k))\colon \widetilde{\xi}(t) = \xi(t). \tag{23}$$

Если же $\widetilde{L}(t) \in \cup_k[\widetilde{x}_k, x_k)$, то $L(t) \in \cup_k\{q_k\}$ (см. (20)). Поскольку функция $L$ непрерывна, то $\displaystyle\int_{\cup_k\{q_k\}} dL(t) = 0$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^\infty 1\!\!1_{\xi(s)>0} dL(s) = 0.$$

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Пусть $t_k = \inf\{t\colon \widetilde{L}(t) = x_k\}$, $\widetilde{t}_k = \sup\{t\colon \widetilde{L}(t) = \widetilde{x}_k\}$. Тогда несложно проверить, что $\xi(t_k) = 0$, $\xi(t) > 0$ для всех $t \in [\widetilde{t}_k, t_k)$. Более того, $\xi(t) > \widetilde{\xi}(t)$, $t \in [\widetilde{t}_k, t_k)$. Объединяя это с (23), получаем

$$\xi(t) = \widetilde{\xi}(t), \quad t \notin \cup_k[\widetilde{t}_k, t_k),$$

$$\xi(t) > \widetilde{\xi}(t), \quad t \in \cup_k[\widetilde{t}_k, t_k),$$

при этом $\cup_k[\widetilde{t}_k, t_k) = \widetilde{L}^{-1}(\cup_k[\widetilde{x}_k, x_k))$.

**2. Предельное поведение решений.** В данном пункте исследуется непрерывная зависимость решений системы (7) – (10) от функций $w$ и $F$.

Отметим, что функции $F, F^{(-1)}$, $\widetilde{L}$ монотонно неубывающие. Приведем ряд утверждений для композиций монотонных функций из $D([0;\infty))$ или $C([0;\infty))$. Несложно доказать следующие две леммы.

**Лемма 2.** *Справедливо утверждение*

$$\forall\, w_1, w_2 \in C([0,T])\colon \|\Gamma(w_1) - \Gamma(w_2)\|_{C([0,T])} \le \|w_1 - w_2\|_{C([0,T])}.$$

**Лемма 3.** *Пусть $F_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $n \ge 0$, — последовательность неубывающих функций таких, что $F_0 \in C([0,\infty))$ и $F_n(x) \to F_0(x)$, $n \to \infty$, для любого $x \ge 0$. Тогда для любого $T > 0$ имеет место равномерная сходимость*

$$\sup_{x\in[0,T]} |F_n(x) - F_0(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

**Лемма 4.** *Пусть $F_0 \in D_0([0,\infty))$ — монотонно возрастающая функция, $\lim_{x\to+\infty} F_0(x) = +\infty$. Предположим, что последовательность неубывающих функций $\{F_n, n \ge 1\} \subset D_0([0,\infty))$ такова, что $F_n(x) \to F_0(x)$, $n \to \infty$, для каждого $x$, являющегося точкой непрерывности функции $F_0$. Тогда*

$$\forall\, T > 0\colon \sup_{x\in[0,T]} |F_n^{(-1)}(x) - F_0^{(-1)}(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

***Замечание* 4.** Для любого $T > 0$ найдется $n_0$ такое, что $F_n^{(-1)}$ определено на $[0;T]$ для любого $n \ge n_0$.

***Доказательство.*** Поскольку $F_0^{(-1)}$ непрерывна (лемма 1), из леммы 3 следует, что достаточно проверить поточечную сходимость

$$\forall\, x > 0\colon F_n^{(-1)}(x) \to F_0^{(-1)}(x), \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Из предположений о функции $F_0$ следует, что для каждого $x_0 > 0$ существует единственное $y_0 \ge 0$, в котором достигается инфимум $\inf\{y\colon F_0(y) \ge x_0\}$.

Пусть $y_1 > y_0$ — произвольная точка непрерывности функции $F_0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y_1) = F_0(y_1) > F_0(y_0) = x_0.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, F_n^{(-1)}(x_0) \le y_1. \tag{25}$$

Аналогично, если $y_2$ — точка непрерывности $F_0$ такая, что $y_2 < y_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y_2) = F_0(y_2) < x_0.$$

Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} F_n^{(-1)}(x_0) \geq y_2. \tag{26}$$

Из (25), (26) и того, что множество точек разрыва $F_0$ не более чем счетно, следует (24).

Лемма 4 доказана.

Из лемм 2, 4 и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\{F_n,\, n \geq 0\} \subset D_0([0,\infty))$ *— последовательность возрастающих функций,* $\{w_n,\, n \geq 0\} \subset C([0,\infty))$. *Допустим, что*:

1) $w_n(0) \geq 0,\ n \geq 0$;

2) $\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = +\infty,\ n \geq 0$;

3) $\forall\, T > 0\colon\ \max_{t\in[0,T]} |w_n(t) - w_0(t)| \to 0,\ n \to \infty$;

4) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$ *для любой точки* $x \geq 0$, *являющейся точкой непрерывности* $F_0$.

*Пусть* $(\xi_n, L_n)$ *— решение* $W(w_n, F_n)$.

*Тогда для любого* $T > 0$ *имеет место равномерная сходимость*

$$\max_{t\in[0,T]} |L_n(t) - L_0(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

**Лемма 5.** *Пусть* $\{F_n,\, n \geq 0\} \subset D([0,\infty))$ *— последовательность неубывающих функций. Обозначим через* $\{t_k\}$ *множество точек разрыва функции* $F_0$.

*Последовательность* $\{F_n\}$ *сходится к* $F_0$ *в* $D([0,\infty))$ *при* $n \to \infty$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *для каждого* $t$, *являющегося точкой непрерывности функции* $F_0$, *имеет место сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F_0(t);$$

2) *для любого* $t_k$ *существует последовательность* $\{t_{n,k}\}$, $\lim_{n\to\infty} t_{n,k} = t_k$, *такая, что*

$$\Delta F_n(t_{n,k}) \to \Delta F_0(t_k), \quad n \to \infty.$$

Доказательство основывается на определении сходимости в $D$ (см. также [14], § 14).

**Лемма 6.** *Пусть* $\{F_n, n \geq 0\} \subset D_0([0,\infty))$, $\{f_n, n \geq 0\} \subset C([0,\infty))$ *— последовательности неубывающих неотрицательных функций, причем* $\lim_{x\to+\infty} F_0(x) = +\infty$. *Обозначим через* $\{t_{n,k}\}$ *множество разрывов функции* $F_n$, $x_{n,k} = F_n(t_{n,k})$, $\widetilde{x}_{n,k} = F_n(t_{n,k}-)$.

*Предположим, что*:

1) $F_n \to F_0,\ n \to \infty$, *в* $D([0,\infty))$;

2) $f_n \to f_0,\ n \to \infty$, *в* $C([0,\infty))$;

3) *для любого* $k$ *уравнение*

$$f_0(t) = \widetilde{x}_{0,k}$$

*имеет не более одного решения.*

*Тогда* $F_n \circ F_n^{(-1)} \circ f_n \to F_0 \circ F_0^{(-1)} \circ f_0$, $n \to \infty$, *в* $D([0,\infty))$.

***Доказательство.*** Заметим, что

$$F_n \circ F_n^{(-1)}(x) = \begin{cases} x_{n,k}, & x \in [\widetilde{x}_{n,k}; x_{n,k}], \\ x, & x \notin \cup_k [\widetilde{x}_{n,k}, x_{n,k}]. \end{cases} \tag{27}$$

Из леммы 5 следует, что для любого $k$ существует такая последовательность $\{l_n\}$, что

$$\widetilde{x}_{n,l_n} \to \widetilde{x}_{0,k} \text{ и } x_{n,l_n} \to x_{0,k} \text{ при } n \to \infty. \tag{28}$$

Применяя лемму 5 к выражению (27), получаем

$$F_n \circ F_n^{(-1)} \to F_0 \circ F_0^{(-1)}, \quad n \to \infty, \quad \text{в} \quad D([0,\infty)).$$

Проверим условие 2 леммы 5 для последовательности $\{F_n \circ F_n^{(-1)} \circ f_n\}$. Точками разрыва функции $F_0 \circ F_0^{(-1)} \circ f_0$ могут быть лишь решения уравнений вида

$$f_0(t) = \widetilde{x}_{0,k}. \tag{29}$$

Пусть $f_0(t_{0,k}) = \widetilde{x}_{0,k}$. Из того, что $t_{0,k}$ — единственное решение (29) и $f_0$ монотонна, следует, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t_{0,k} - \delta) = f_0(t_{0,k} - \delta) < f_0(t_{0,k}) < f_0(t_{0,k} + \delta) = \lim_{n\to\infty} f_n(t_{0,k} + \delta).$$

Из условия 2 леммы 6 и (28) вытекает, что

$$\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \exists \ t_{n,k} \in (t_{0,k} - \delta; t_{0,k} + \delta)\colon$$

$$f_n(t_{n,k}) = \widetilde{x}_{n,k} \text{ и } f_n(t) < \widetilde{x}_{n,k} \text{ при } t < t_{n,k}.$$

В силу произвольности $\delta > 0$ отсюда следует, что

$$\Delta(F_n \circ F_n^{(-1)} \circ f_n)(t_{n,k}) \to \Delta(F_0 \circ F_0^{(-1)} \circ f_0)(t_{0,k}), \quad n \to \infty.$$

Условие 1 леммы 5 и, соответственно, доказательство леммы 6 вытекают из следующего утверждения.

**Лемма 7.** *Пусть $\{G_n, n \geq 0\}$ — последовательность монотонно неубывающих функций. Предположим, что $G_n(x) \to G_0(x)$, $n \to \infty$, для каждой точки $x$, являющейся точкой непрерывности $G_0$.*

*Пусть*:

1) $G_0$ *непрерывна в* $x_0$,

2) $x_n \to x_0, \ n \to \infty$.

*Тогда* $\lim_{n\to\infty} G_n(x_n) = G_0(x_0)$.

***Доказательство.*** Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем такое $\delta > 0$, что $(x_0 - \delta)$ и $(x_0 + \delta)$ — точки непрерывности $G_0$ и

$$(G_0(x_0 + \delta) - G_0(x_0)) \vee (G_0(x_0) - G_0(x_0 - \delta)) < \varepsilon.$$

Заметим, что начиная с некоторого номера имеет место включение $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Поэтому

$$G_0(x_0 - \delta) = \lim_{n\to\infty} G_n(x_0 - \delta) \leq \varliminf_{n\to\infty} G_n(x_n) \ \leq \varlimsup_{n\to\infty} G_n(x_n) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} G_n(x_0+\delta) = G_0(x_0+\delta).$$

Отсюда следует, что

$$\left|\underline{\lim}_{n\to\infty} G_n(x_n) - G(x_0)\right| \vee \left|\overline{\lim}_{n\to\infty} G_n(x_n) - G(x_0)\right| \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ лемма 7 доказана.

***Следствие* 2.** *Пусть последовательность возрастающих функций* $\{F_n,\ n \geq 0\} \subset D_0([0,\infty))$ *и последовательность* $\{w_n,\ n \geq 0\} \subset C([0,\infty))$, $w_n(0) \geq 0$, *таковы, что*:

1) $F_n \to F_0,\ n \to \infty$, *в* $D([0,\infty))$;

2) $w_n \to w_0,\ n \to \infty$, *в* $C([0,\infty))$;

3) $\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = +\infty,\ n \geq 0$.

*Обозначим через* $\{t_k\}$ *множество точек разрыва функции* $F_0, \widetilde{x}_k := F_0(t_k-)$.

*Предположим, что*:

4) *для любого* $\widetilde{x}_k$ *уравнение*

$$\Gamma(w_0)(t) = \widetilde{x}_k$$

*имеет не более одного решения.*

*Пусть* $(\xi_n, L_n)$ — *решение* $W(w_n, F_n)$.

*Тогда* $\xi_n \to \xi_0$, $n \to \infty$, *в* $D([0,\infty))$.

***Следствие* 3.** *Пусть* $(\xi_n, L_n)$ — *решение* $W(w_n, F_n)$, *где*

$$F_n(x) = x + \Pi(nx), \quad n \geq 1,$$

$\Pi$ — *функция распределения локально конечной атомической меры.*

*Предположим, что* $w_n \to w$, $n \to \infty$, *в* $C([0,\infty))$, $\Pi(+\infty) = +\infty$ *и* $\Pi$ *монотонно возрастает* (*т. е.* $\Pi$ *имеет скачки на каждом интервале*). *Обозначим через* $\{t_k\}$ *множество точек разрыва* $\Pi$, $\widetilde{x}_k = \Pi(t_k-)$. *Допустим, что для любого* $k$ *уравнение*

$$\Gamma w(t) = \widetilde{x}_k$$

*имеет не более одного решения. Тогда*

$$\xi_n \to \xi_0, \quad n \to \infty, \quad \text{в} \quad D([0,\infty)),$$

*где* $\xi_0$ — *решение* $W(w, \Pi)$.

***Доказательство.*** Пусть $\widetilde{F}_n(x) = \dfrac{x}{n} + \Pi(x)$. Заметим, что

$$F_n \circ F_n^{(-1)} = \widetilde{F}_n \circ \widetilde{F}_n^{(-1)}.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться следствием 2.

***Следствие* 4.** *Пусть* $\{w_n\}_{n\geq 0}$ — *последовательность винеровских процессов,* $\{\Pi_n\}_{n\geq 0}$ — *последовательность неубывающих процессов Леви,* $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset [0,\infty)$.

*Допустим, что*:

1) *процессы* $w_0$ *и* $\Pi_0$ *независимы;*

2) $w_n \to w_0,\ n \to \infty$, *почти наверное в* $C([0,\infty))$;

3) $\Pi_n \to \Pi_0,\ n \to \infty$, *почти наверное в* $D([0,\infty))$;

4) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

*Обозначим через* $(\xi_n, L_n)$ *решение* $W(x_n, w_n, F_n)$, *где* $F_n(x) = x+\Pi_n(x)$. *Тогда*

$$\xi_n \to \xi_0,\ n\to\infty, \quad \text{почти наверное в} \quad D([0,\infty));$$

$$L_n \to L_0,\ n\to\infty, \quad \text{почти наверное в} \quad C([0,\infty)).$$

Для доказательства надо воспользоваться следствиями 1 и 2. Условие 4 следствия 2 вытекает из независимости $w_0$, $\Pi_0$ и того, что распределение $\Gamma(x_0 + + w_0(\cdot))(t)$ не имеет атомов в $(0,\infty)$ для любого $t > 0$.

Аналогично, из следствий 1 – 3 можно получить такое утверждение.

***Следствие* 5.** *Пусть* $\{w_n\}_{n\geq 0}$ *— последовательность винеровских процессов,* $\Pi_0$ *— скачкообразный неубывающий процесс Леви* (*отсутствует компонента вида* $at$), $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset [0,\infty)$.

*Допустим, что*:

1) *процессы* $w_0$ *и* $\Pi_0$ *независимы*;

2) $w_n \to w_0,\ n\to\infty$, *почти наверное в* $C([0,\infty))$;

3) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

*Положим* $\Pi_n(t) := \Pi_0(nt),\ F_n(x) = x + \Pi_n(x)$.

*Обозначим через* $(\xi_n, L_n),\ n \geq 1$, *решения* $W(x_n, w_n, F_n),\ n \geq 1$. *Если мера Леви процесса* $\Pi_0$ *бесконечна* (*т. е.* $\Pi_0$ *монотонно возрастающий*), *то*

$$\xi_n \to \xi_0, \quad n\to\infty, \quad \text{почти наверное в} \quad D([0,\infty)),$$

$$L_n \to L_0,\ n\to\infty, \quad \text{почти наверное в} \quad C([0,\infty)),$$

*где* $(\xi_0, L_0)$ *— решение* $W(x_0, w_0, \Pi_0)$.

*Если же мера Леви процесса* $\Pi_0$ *конечна, то*

$$\xi_n(\cdot) \to x_0 + w_0(\cdot) + \Pi_0 \circ \Pi_0^{(-1)} \circ \Gamma(u_0 + w_0(\cdot)),$$

$$n\to\infty, \quad \text{почти наверное в} \quad D([0,\infty)).$$

**3. Построение винеровского процесса на полупрямой с граничными условиями Вентцеля.** Пусть $\{w(t),\, t\geq 0\}$ — винеровский процесс, $\{\Pi(t),\, t\geq 0\}$ — не зависимый от него неубывающий скачкообразный процесс Леви.

Пусть $\pi$ — пуассоновская точечная мера, соответствующая процессу $\Pi$, $\mu$ — мера Леви,

$$\Pi(t) = \int\limits_{[0,t]} \int\limits_0^\infty \lambda\pi(ds, d\lambda),$$

$$E\pi(A\times[t_1,t_2]) = \mu(A)(t_2 - t_1),\ A\in\mathcal{B}((0,\infty)),$$

$$\int\limits_0^\infty \lambda\wedge 1\mu(d\lambda) < \infty.$$

В случае, когда $\mu$ — конечная мера, процесс $\Pi$ имеет ограниченное число скачков на ограниченных интервалах почти наверное, а если $\mu$ — бесконечная мера, то $\Pi$ имеет бесконечное число скачков на любом невырожденном интервале времени почти наверное.

Пусть $(\xi(t), L(t))$, $t \geq 0$, — решение задачи $W(x_0, w, \widetilde{\Pi})$, где $\widetilde{\Pi}(x) = x + \Pi(x)$. Тогда (см. п. 2)

$$\xi(t) = x_0 + w(t) + L(t) + \Pi(L(t)),$$

$$L(t) = \widetilde{\Pi}^{(-1)}(\widetilde{L}(t)) = \widetilde{\Pi}^{(-1)}(\Gamma(x_0 + w(\cdot))(t)),$$

где обобщенная обратная функция $\widetilde{\Pi}^{(-1)}$ задана в (18).

В данном пункте мы покажем, что $\xi(t)$, $t \geq 0$, является решением некоторой проблемы мартингалов, и отождествим процесс $L$ с локальным временем процесса $\xi$ в нуле.

Введем $\sigma$-алгебры:

$$\mathcal{F}_t^w = \sigma(w(s), \quad s \in [0, t]), \quad \mathcal{F}_\infty^w = \cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t^w,$$

$$\mathcal{F}_t^\Pi = \sigma(\Pi(s), \quad s \in [0, t]), \quad \mathcal{F}_\infty^\Pi = \cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t^\Pi, \tag{30}$$

$$\mathcal{F}_t^{\Pi \circ L} = \sigma(\Pi(L(s)), \quad s \in [0, t]), \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^w \cup \mathcal{F}_t^{\Pi \circ L}.$$

**Теорема 2.** *Предположим, что функция $f \in C^2([0; \infty))$ имеет компактный носитель.*

*Тогда процесс*

$$f(\xi(t)) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(\xi(s)) ds - \left( f'(0) + \int_0^\infty (f(u) - f(0)) \mu(du) \right) L(t)$$

*является $\mathcal{F}_t$-мартингалом.*

*В частности, если $f'(0) + \int_0^\infty (f(u) - f(0)) \mu(du) = 0$, то процесс $f(\xi(t)) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(\xi(s)) ds$ является $\mathcal{F}_t$-мартингалом.*

*Кроме того, $L(t)$ является локальным временем процесса $\xi$ в нуле за интервал времени $[0, t]$, т. е.*

$$\varepsilon^{-1} \int_0^t \mathbb{I}_{\{\xi(s) \in [0, \varepsilon]\}} ds \to L(t), \quad \varepsilon \to 0+, \quad \textit{почти наверное.}$$

***Замечание 5.*** Существование и единственность решения даже более общей проблемы мартингалов доказаны в [7, 8]. Теорема 2 показывает, что процесс $\xi$, построенный по $w$ и $\Pi$ указанным в п. 2 способом, действительно является решением проблемы мартингалов.

***Замечание 6.*** Предположим, что $\mu((0; \infty)) = \infty$. Несложно проверить, что между различными экскурсиями процесса $\xi(\cdot)$ с вероятностью 1 найдутся как экскурсии, стартующие из 0, так и экскурсии, стартующие не из 0.

***Доказательство теоремы* 2.** Проверим, во-первых, что $w(t),\ t \geq 0$, является $\mathcal{F}_t$-винеровским процессом. Для этого достаточно доказать, что для любых $s \geq 0$, $t \geq 0$ случайная величина $w(t+s) - w(t)$ не зависит от $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}_t$.

Заметим, что $\widetilde{L}(t)$ является $\mathcal{F}_t^w$-измеримой случайной величиной, а $\widetilde{\Pi}^{(-1)}(L(t))$ — $\mathcal{F}_\infty^\Pi \cup \mathcal{F}_t^w$-измеримой. Поэтому $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty^\Pi \cup \mathcal{F}_t^w$. Из предположений о процессах $w$ и $\Pi$ следует, что $w(t+s) - w(t)$ не зависит от $\mathcal{F}_\infty^\Pi$ и от $\mathcal{F}_t^w$. Поэтому $w(t+s) - w(t)$ не зависит от $\mathcal{F}_\infty^\Pi \cup \mathcal{F}_t^w$, а значит, и от $\mathcal{F}_t$.

Процесс $\widetilde{\Pi}(L(t))$ является неубывающим càdlàg процессом, согласованным с потоком $\mathcal{F}_t$.

Из всего изложенного выше следует, что к процессу $f(\xi(t))$ можно применить формулу Ито:

$$f(\xi(t)) = f(\xi(0)) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\xi(s-))ds + \int_0^t f'(\xi(s-))dL(s) +$$

$$+ \int_0^t f'(\xi(s))dw(s) + \sum_{\xi(s-)\neq\xi(s)} (f(\xi(s)) - f(\xi(s-))).$$

Заметим, что если $\xi(s-) \neq \xi(s)$, то $\xi(s-) = 0$ и

$$f(\xi(s)) - f(\xi(s-)) = f(\Pi(L(s))) - f(0).$$

Кроме того, $f(\xi(s-)) = 0$ в точках роста процесса $L$.

Поскольку процесс $\xi$ имеет не более чем счетное число разрывов, формула Ито принимает вид

$$f(\xi(t)) = f(\xi(0)) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\xi(s))ds + f'(0)L(t) +$$

$$+ \sum_{\xi(s-)\neq\xi(s)} (f(\Pi(L(s))) - f(0)) + \int_0^t f'(\xi(s))dw(s) =$$

$$= f(\xi(0)) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\xi(s))ds + f'(0)L(t) + \int_0^{L(t)}\int_0^\infty (f(u) - f(0))\pi(ds, du).$$

Из предположения о функции $f$ следует, что

$$|f(u) - f(0)| \leq (\sup_v |f'(v)|u) \wedge \sup_v |f(v)| \leq K(u \wedge 1),$$

где $K = \mathrm{const}$.

Следовательно, процесс

$$M(t) = \int_0^t \int_0^\infty (f(u) - f(0))\pi(ds, du) - \int_0^\infty (f(u) - f(0))\mu(du)t$$

является $\mathcal{F}_t^\Pi$-мартингалом, а также $\mathcal{F}_t^\Pi \cup \mathcal{F}_\infty^w$-мартингалом.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что процесс $\{M(L(t)), t \geq \geq 0\}$ удовлетворяет соотношению

$$\forall t_1 \leq t_2 \colon E(M(L(t_2))/\mathcal{F}_{t_1}) = M(L(t_1)) \quad \text{почти наверное.} \tag{31}$$

Заметим, что для любого $t_0 \geq 0$ случайная величина $L(t_0) = \widetilde{\Pi}^{(-1)}(\widetilde{L}(t_0))$ является $\mathcal{F}_t^{\Pi} \cup \mathcal{F}_{\infty}^w$-моментом остановки. Действительно, для любого $t \geq 0$

$$\{\widetilde{\Pi}^{(-1)}(\widetilde{L}(t_0)) \leq t\} = \{\widetilde{\Pi}(t) \geq \widetilde{L}(t_0)\} \in \mathcal{F}_t^{\Pi} \cup \mathcal{F}_{\infty}^w.$$

**Лемма 8.** *Пусть* $(N(t), \mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ — *cádlág мартингал,* $\tau_1$ *и* $\tau_2$ — *конечные моменты остановки,* $\tau_1 \leq \tau_2$,

$$\mathrm{E} \sup_{t \in [0, \tau_2]} |N(t)| < \infty.$$

*Тогда*

$$\mathrm{E}(N(\tau_2)/\mathcal{G}_{\tau_1}) = N(\tau_1) \quad \textit{почти наверное.}$$

Доказательство леммы стандартно. Сначала надо использовать теорему Дуба и получить равенство

$$\mathrm{E}(N(\tau_2 \wedge t_2)/\mathcal{G}_{\tau_1 \wedge t_1}) = N(\tau_1 \wedge t_1) \quad \text{почти наверное}$$

для любых $t_1$, $t_2$, $0 \leq t_1 \leq t_2$, а затем перейти к пределу при $t_2 \uparrow \infty$ и $t_1 \uparrow \infty$.

Применим лемму 8. Пусть $N(t) = M(t)$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^{\Pi} \cup \mathcal{F}_{\infty}^w$, $\tau_i = L(t_i) = = \widetilde{\Pi}^{(-1)}(\widetilde{L}(t_i))$, $i \in \{1, 2\}$, $t_1 \leq t_2$. Заметим, что

$$|M(t)| \leq K \left( \int_0^t \int_0^{\infty} u \wedge 1 \pi(ds, du) + \int_0^{\infty} u \wedge 1 \mu(du) t \right).$$

Поэтому

$$\mathrm{E} \sup_{t \in [0, \tau_2]} |M(t)| = \lim_{n \to \infty} \mathrm{E} \sup_{t \in [0, \tau_2 \wedge n]} |M(t)| \leq$$

$$\leq K \varliminf_{n \to \infty} \mathrm{E} \left( \int_0^{\tau_2 \wedge n} \int_0^{\infty} u \wedge 1 \pi(ds, du) + \left( \int_0^{\infty} u \wedge 1 \mu(du) \right) \tau_2 \wedge n \right) =$$

$$= 2K \int_0^{\infty} u \wedge 1 \mu(du) \lim_{n \to \infty} \mathrm{E} \tau_2 \wedge n =$$

$$= 2K \int_0^{\infty} u \wedge 1 \mu(du) \mathrm{E} \tau_2 = 2K \int_0^{\infty} u \wedge 1 \mu(du) \int_0^{\infty} \mathrm{E} \widetilde{\Pi}^{(-1)}(y) F_{\widetilde{L}(t_2)}(dy), \tag{32}$$

где $F_{\widetilde{L}(t_2)}$ — функция распределения $\widetilde{L}(t_2)$.

Поскольку $\widetilde{\Pi}(x) \geq x$, то $\widetilde{\Pi}^{(-1)}(x) \leq x$. Поэтому правая часть (32) не превышает $\mathrm{const}\, \mathrm{E}(x_0 + \max_{s \in [0, t_2]} |w(s)|)$, что, в свою очередь, конечно.

Таким образом,

$$\mathrm{E}(M(L(t_2))/\mathcal{G}_{L(t_1)}) = M(L(t_1)).$$

Для завершения доказательства осталось проверить, что $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_{L(t)}$ для любого $t \geq 0$. Действительно, пусть $s \in [0,t]$, $x \geq 0$, $A = [a,b]$. Тогда

$$\{w(s) \in A\} \cap \{L(t) \leq x\} = \{w(s) \in A\} \cap \{\widetilde{\Pi}(x) \geq \widetilde{L}(t)\} \in \mathcal{F}_x^{\Pi} \cup \mathcal{F}_t^{w} \subset \mathcal{G}_x,$$

$$\{\Pi(L(s)) \in A\} \cap \{L(t) \leq x\} \in \mathcal{F}_x^{\Pi} \cup \mathcal{F}_\infty^{w} = \mathcal{G}_x.$$

Отсюда легко вывести, что для любого события $B \in \mathcal{F}_t^{\Pi \circ L} \cup \mathcal{F}_t^{w}$ имеет место включение

$$B \cap \{L(t) \leq x\} \in \mathcal{G}_x,$$

значит, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{\Pi \circ L} \cup \mathcal{F}_t^{w} \subset \mathcal{G}_{L(t)}$.

Тот факт, что $L(t)$ является локальным временем процесса $\xi$, следует из формулы Танака (см. [15]).

Теорема 2 доказана.

Аналогично теореме 2 можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Предположим, что мера Леви процесса* $\Pi(t)$, $t \geq 0$, *бесконечна, т. е.* $\mu((0,\infty)) = \infty$. *Пусть* $(\xi, L)$ — *решение задачи* $W(x_0, w, \Pi)$. *Тогда для любой функции* $f \in C^2([0,\infty))$, *имеющей компактный носитель, случайный процесс*

$$f(\xi(t)) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(\xi(s))ds - \int\limits_0^\infty (f(u) - f(0))\mu(du)L(t),$$

*является* $\mathcal{F}_t$*-мартингалом, где* $\mathcal{F}_t$ *определено в* ().

***Замечание* 7.** Существование и единственность решения задачи $W(x_0, w, \Pi)$ в этом случае доказаны в п. 2.

Доказательство данной теоремы практически повторяет доказательство теоремы 2. Единственное отличие заключается в доказательстве конечности правой части (32), где вместо $\widetilde{\Pi}^{(-1)}$ взято $\Pi^{(-1)}$. Для доказательства соответствующего факта надо заметить, что функция $[0,\infty) \ni x \mapsto E\Pi^{(-1)}(x) \in [0,\infty)$ (среднее время до перескока уровня $x$) является конечной и полуаддитивной, т. е. $\Pi^{(-1)}(x+y) \leq \Pi^{(-1)}(x) + \Pi^{(-1)}(y)$. Поэтому существует такое $K > 0$, что $E\Pi^{(-1)}(x) \leq K(1+x), x \geq 0$.

Автор признателен А. А. Дороговцеву за полезные обсуждения данной работы.


1. *Вентцель А. Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // Докл. АН СССР. – 1956. – **111**, № 2. – С. 269 – 272.
2. *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – **4**, № 2. – С. 172 – 185.
3. *Скороход А. В.* Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами. I // Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – **6**, вып. 3. – С. 287 – 298.
4. *Watanabe S.* Construction of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions by means of Poisson point process of excursions // III Советско-японский симп. по теории вероятностей. – Ташкент: Фан, 1975. – С. 311 – 345.
5. *Анулова С. В.* О стохастических дифференциальных уравнениях с граничными условиями в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 3. – С. 491 – 508.
6. *Анулова С. В.* О процессах с производящим оператором Леви в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1978. – **42**, № 4. – С. 708 – 750.

7. *Микулявичюс Р.* О существовании решений проблемы мартингалов // Лит. мат. сб. – 1977. – **17**, № 4. – С.149 – 168.
8. *Микулявичюс Р.* О единственности решений проблемы мартингалов // Лит. мат. сб. – 1978. – **18**, № 2. – С. 63 – 73.
9. *Komatsu T.* Markov processes associated with certain integro-differential operators // Osaka J. Math. – 1973. – **10**, № 2. – P. 271 – 303.
10. *Sato K., Ueno T.* Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary // J. Math. Kyoto Univ. – 1965. – **4**. – P. 529 – 605.
11. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 456 с.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
13. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes // Grundlehren math. Wiss. – 1979. – **233**. – XII + 338 p.
14. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
15. *Protter P. E.* Stochastic integration and differential equations. – Second edition // Appl. Math. (New York). Stochast. Modelling and Appl. Probab. – 2004. – **21**. – XIV + 415 p.


Получено 04.11.10