УДК 517.986.7

В. М. Статкевич (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

СИСТЕМИ СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We investigate systems of differential equations with essentially infinite-dimensional elliptic operators (of the Laplace – Lévy type). For nonlinear systems, we prove theorems on the existence and uniqueness of solutions. For a linear system, we give an explicit formula for the solution.

Исследуются системы дифференциальных уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами (типа Лапласа – Леви). Для нелинейных систем доказаны теоремы существования и единственности, для линейной системы приведена явная формула решения.

У нескінченновимірних просторах виникають оператори, які не мають скінченновимірних аналогів. Таким, зокрема, є класичний оператор Лапласа – Леві, введений П. Леві [1], — диференціальний оператор другого порядку, який визначений на функціях нескінченновимірного аргументу, задовольняє лейбніцевську властивість $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ і набуває нульового значення на циліндричних функціях. Саме тому Г. Є. Шилов, редактор перекладу [1], назвав його суттєво нескінченновимірним. Сучасний стан теорії оператора Лапласа – Леві викладено у роботі [2], відповідні нелінійні рівняння досліджувались у роботах [3, 4]. Системи було розглянуто в роботі [5], а системи рівнянь з оператором квазідиференціювання (одним з узагальнень оператора Лапласа – Леві) — у [6]. Дослідження проводились в інших функціональних класах із застосуванням техніки, що відрізняється від наведеної в даній роботі.

Суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор, запропонований Ю. В. Богданським [7], узагальнює оператор Лапласа – Леві. Рівняння з такими операторами мають специфічні властивості, в певному сенсі споріднені з властивостями класичних звичайних диференціальних рівнянь. Дана робота продовжує серію робіт [8, 9] з дослідження рівнянь з такими операторами.

1. Нехай H — нескінченновимірний сепарабельний дійсний гільбертів простір, $B_C(H)$ — банахів простір самоспряжених обмежених лінійних операторів на H, $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant R\}$ — куля радіуса R $(R > 0)$, J — конус невід'ємних лінійних функціоналів на $B_C(H)$. Множину $D \subset B_C(H)$ називаємо майже компактною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують компактна множина $K \subset B_C(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$ та $d > 0$ такі, що $K + Q_{n,d}$ є ε-сіткою для D (тут $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ — множина операторів, ранг яких не перевищує n, а норма не перевищує d).

Нехай Z — множина функцій класу $C^2(H;\mathbb{R})$, носії яких належать B_R, u'' рівномірно неперервна на H, а множина $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ є майже компактною. X — замикання Z за нормою $\sup_{x\in H} |u(x)|$ — дійсна комутативна банахова алгебра відносно поточкових операцій. Нехай Z^n (відповідно X^n) — множина функцій $\vec{u}(x) = (u^1(x), \ldots, u^n(x))$ таких, що кожна координатна функція u^i належить Z (відповідно X). Далі $\mathbb{R}^n$ вважаємо комутативною алгеброю відносно покоординатних операцій, $\|\vec{y}\| = |y^1| + \ldots + |y^n|$ для $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Z^n є дійсною комутативною нормованою ($|||\vec{u}||| = \sup_{x\in H} \|\vec{u}(x)\|$) алгеброю відносно поточкових операцій, а X^n збігається із замиканням Z^n за цією нормою та є банаховою алгеброю.

Суттєво нескінченновимірним функціоналом $j \in J$ називаємо такий ненульовий функціонал, що всі оператори з $B_C(H)$ скінченного рангу належать його ядру

[7]. Суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор $L\colon X \supset Z \to X$ задається формулою $(Lu)(x) = \dfrac{1}{2} j(u''(x))$ і допускає замикання $\bar{L}$, яке генерує (C_0)-півгрупу стиску $T^j(t)$ у просторі X. Значення функції $T^j(t)u$ в точці x залежить лише від значень функції u на сфері $K = \{y \in H \mid \|y - x\| = \sqrt{t\|j\|}\}$; при цьому $\inf_K u \leqslant (T^j(t)u)(x) \leqslant \sup_K u$ [7]. Півгрупа $T^j(t)$ є нільпотентною $\left(\exists t_0 = \dfrac{R^2}{\|j\|}\colon T^j(t_0) = 0\right)$ та мультиплікативною ($\forall u, v \in X\colon T^j(t)(uv) = T^j(t)uT^j(t)v$), а також $\forall j_1, j_2 \in J\colon T^{j_1}(t)T^{j_2}(t) = T^{j_2}(t)T^{j_1}(t)$, $\forall \tau \geqslant 0\colon T^j(\tau t) = T^{\tau j}(t)$ [10]. Тоді для довільної $g \in C(\mathbb{R})$ такої, що $g(0) = 0$, виконується рівність $T^j(t)(g(u)) = g(T^j(t)u)$, зокрема $T^j(t)(|u|) = |T^j(t)u|$.

Для $i = 1, \ldots, n$ виберемо $j_i \in J$, $(L_i u)(x) = \dfrac{1}{2} j_i(u''(x))$; $\bar{L}_i$ генерують півгрупи $T^i(t)$, які комутують: $T^i(t)T^k(\tau) = T^{tj_i}(1)T^{\tau j_k}(1) = T^{\tau j_k}(1)T^{tj_i}(1) = T^k(\tau)T^i(t)$. Оператор $\mathcal{L}\colon X^n \supset Z^n \to X^n$, заданий формулою $(\mathcal{L}\vec{u})(x) = ((L_1 u^1)(x), \ldots, (L_n u^n)(x))$, задовольняє лейбніцевську властивість та допускає замикання $\bar{\mathcal{L}}$: $(\bar{\mathcal{L}}\vec{u})(x) = \big((\bar{L}_1 u^1)(x), \ldots, (\bar{L}_n u^n)(x)\big)$ з областю визначення $D(\bar{\mathcal{L}}) \subset X^n$.

Якщо $\vec{u} \in D(\bar{\mathcal{L}})$, то $D(\mathcal{L}) \ni \vec{u}_m \to \vec{u}$, $\mathcal{L}\vec{u}_m \to \vec{v} = \bar{\mathcal{L}}\vec{u}$, $D(L_i) \ni u^i_m \to u^i$, $L_i u^i_m \to v^i$ при $m \to \infty$, тому $u^i \in D(\bar{L}_i)$. Навпаки, якщо $u^i \in D(\bar{L}_i)$, то $D(L_i) \ni u^i_{m_i} \to u^i$, $L_i u^i_{m_i} \to v^i = \bar{L}_i u^i$ $(m_i \to \infty)$, тому в $D(\mathcal{L})$ існує послідовність $\vec{u}_m$, збіжна до $\vec{u}$, для якої $\mathcal{L}\vec{u}_m \to \vec{v}$, звідки $\vec{u} \in D(\bar{\mathcal{L}})$. З наведеного випливає, що відображення $D(\bar{L}_i) \ni u^i \mapsto (0, \ldots, 0, u^i, 0, \ldots, 0)$ ізоморфно переводить $D(\bar{L}_i)$ на підпростір в $D(\bar{\mathcal{L}})$; $D(\bar{\mathcal{L}})$ ізоморфна $D(\bar{L}_1) \dotplus \ldots \dotplus D(\bar{L}_n)$.

2. Нехай $\mathcal{F}(Q; \mathbb{R}^n)$ — банахова алгебра всіх обмежених функцій на довільній множині Q зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ $\big($відносно поточкових операцій, з нормою $|||\vec{u}||| = \sup_{x \in Q} \|\vec{u}(x)\|\big)$, $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}(Q; \mathbb{R})$ — замкнена підалгебра. $\mathcal{X} \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{X}$ ототожнимо з замкненою підалгеброю $\mathcal{X}^n \subset \mathcal{F}(Q; \mathbb{R}^n)$; далі вважатимемо $\mathcal{X}$ підпростором в $\mathcal{X}^n$ з урахуванням ізоморфізму.

Нехай $S_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — (C_0)-півгрупи стиску в $\mathcal{X}$ з генераторами $S_i'(0)$, нільпотентні ($\exists s_i > 0\colon S_i(s_i) = 0$) та мультиплікативні, які комутують: $S_i(t)S_k(\tau) = S_k(\tau)S_i(t)$. Тоді сім'я $S(t)$ така, що $S(t)\vec{u} = \big(S_1(t)u^1, \ldots, S_n(t)u^n\big)$ визначає (C_0)-півгрупу в $\mathcal{X}^n$: кожна координата $(S(t)\vec{u})^i$ належить $\mathcal{X}$, тому $S(t)\vec{u} \in \mathcal{X}^n$; півгруповий закон та рівність $S(0) = I$ перевіряються покоординатно; з неперервності $S_i(t)$ в нулі випливає, що $S_i(t)u^i \to u^i$ при $t \to 0$, тому $S(t)\vec{u} \to \vec{u}$. Півгрупа $S(t)$ нільпотентна ($\exists s = \max(s_1, \ldots, s_n)\colon S(s) = 0$) та мультиплікативна, її породжує оператор $S'(0)$, визначений формулою $S'(0)\vec{u} = \big(S_1'(0)u^1, \ldots, S_n'(0)u^n\big)$, $D\big(S'(0)\big)$ щільна в $\mathcal{X}^n$. З наведених міркувань випливає, що оператор $\bar{\mathcal{L}}$ (див. п. 1) породжує півгрупу з відповідними властивостями.

Теорема 1. *Нехай $\vec{F} = (F^1, \ldots, F^n)\colon \mathcal{X}^n \to \mathcal{X}^n$ — нелінійне відображення, існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{X}^n$ і $x \in Q$ виконується нерівність $\|(\vec{F}(\vec{u}) - \vec{F}(\vec{v}))(x)\| \leqslant C\|(\vec{u} - \vec{v})(x)\|$. Тоді рівняння $S'(0)\vec{u} = \vec{F}(\vec{u})$ має розв'язок в $\mathcal{X}^n$ і до того ж єдиний.*

Доведення. Накладена на $\vec{F}$ умова еквівалентна таким умовам на $F^i\colon \mathcal{X}^n \to \mathcal{X}$: $|F^i(\vec{u}) - F^i(\vec{v})| \leqslant C \sum_{k=1}^{n} |u^k - v^k|$. Єдиним розв'язком рівняння $S'(0)\vec{u} = \vec{f}$ ($\vec{f} \in$

$\in \mathcal{X}^n$) є $\vec{u} = -\int_0^s S(t)\vec{f}dt$, тому вихідне рівняння еквівалентне $\vec{u} = -\int_0^s S(t) \times$ $\times(\vec{F}(\vec{u}))dt = \vec{g}(\vec{u})$. Тоді

$$\left\|(\vec{g}^m(\vec{u}) - \vec{g}^m(\vec{v}))(x)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_1=1}^{n} \int_0^s \left(S_{k_1}(t_1)\left|F^{k_1}(\vec{g}^{m-1}(\vec{u})) - F^{k_1}(\vec{g}^{m-1}(\vec{v}))\right|\right)(x)dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \int_0^s \left(S_{k_1}(t_1)\int_0^s S_{k_2}(t_2)|F^{k_2}(\vec{g}^{m-2}(\vec{u})) - F^{k_2}(\vec{g}^{m-2}(\vec{v}))|dt_2\right)(x)dt_1 \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant C^m \sum_{k=1}^{n}\ldots\sum_{k_{m+1}=1}^{n} \int_0^s dt_1 \ldots \int_0^s \left(S_{k_1}(t_{k_1})\ldots S_{k_m}(t_{k_m})\left|u^{k_{m+1}} - v^{k_{m+1}}\right|\right)(x)dt_{k_m} \leqslant$$

$$\leqslant C^m s^m \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{m!}{(m_1!)^2\ldots(m_n!)^2} \sum_{k=1}^{n} |u^k(x) - v^k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(n^2Cs)^m}{m!}\|(\vec{u} - \vec{v})(x)\|.$$

Тут використано комутацію півгруп $S_i(t)$ та оцінки $\int_0^s dt_1 \ldots \int_0^s dt_p S_k(t_1)\ldots$ $\ldots S_k(t_p)|f| \leqslant \frac{s_k^p}{p!}|f|$, $f \in \mathcal{X}$, $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{(m!)^2}{(m_1!)^2\ldots(m_n!)^2} \leqslant$ $\leqslant \left(\sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{m!}{m_1!\ldots m_n!}\right)^2 = n^{2m}$. Тому існує m, для якого $\vec{g}^m$ є стиском в $\mathcal{X}^n$, що й доводить теорему.

Розглянемо нелінійну систему першого порядку з операторами $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_n$:

$$\left(\bar{L}_i u^i\right)(x) = f^i(x, \vec{u}(x)) = f^i(x, u^1(x), \ldots, u^n(x)), \tag{1}$$

де $u^i \in D(\bar{L}_i)$, $f^i\colon H\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. З урахуванням позначень $\vec{u} \in D(\bar{\mathcal{L}})$, $\vec{f}\colon H\times\mathbb{R}^n \to$ $\to \mathbb{R}^n$ вона набирає еквівалентного вигляду $(\bar{\mathcal{L}}\vec{u})(x) = \vec{f}(x, \vec{u}(x))$.

Теорема 2. *Нехай для довільного $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{f}(\cdot, \vec{p})$ належить X^n та $\vec{f}$ є ліпшицевою за другим аргументом* (*рівномірно відносно першого*): *існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $\vec{p}$, $\vec{q} \in \mathbb{R}^n$ і $x \in H$ виконується нерівність $\|\vec{f}(x, \vec{p}) - \vec{f}(x, \vec{q})\| \leqslant$ $\leqslant C\|\vec{p} - \vec{q}\|$. Тоді система* (1) *має розв'язок і до того ж єдиний.*

Доведення. Для посилання на теорему 1 потрібно перевірити, що $\vec{f}(\cdot, \vec{u}(\cdot))$ належить X^n для $\vec{u} \in X^n$, та виконання відповідної умови на відображення $\vec{u} \mapsto$ $\mapsto \vec{f}(\cdot, \vec{u}(\cdot))$. Сформулюємо узагальнення теореми Стоуна – Вейєрштрасса (див. [9], лема 1).

Лема. *Нехай $Y \subset \mathcal{F}(Q; \mathbb{R})$ — замкнена підалгебра, $1 \in Y$, T — хаусдорфів компакт, $C(T; Y)$ — алгебра всіх неперервних функцій на T зі значеннями в Y, $W \subset C(T; Y)$ — підалгебра, що містить тотожно одиничну функцію та розділяє точки: для будь-яких t_1, $t_2 \in T$ існує $g \in W$ така, для якої $g(t_1) - g(t_2)$ — оборотний елемент в Y. Тоді W щільна в $C(T; Y)$.*

Нехай $\vec{u} \in X^n$, аналогічно [9] (наслідок 1) Y — алгебра, отримана приєднанням одиниці до X, $T = \left[\inf_H u^1; \sup_H u^1\right] \times \ldots \times \left[\inf_H u^n; \sup_H u^n\right]$. Зафіксуємо i та для довільного $\varepsilon > 0$ функцію $f^i(x, \vec{p}) \in C(T; Y)$ наблизимо многочленом $g^i(\vec{p}) = \sum_{k_1,\ldots,k_n} h_{k_1,\ldots,k_n}(p^1)^{k_1} \ldots (p^n)^{k_n}$, $h_{k_1,\ldots,k_n} \in Y$, тоді $\sup_H |f^i(x, \vec{u}(x)) - g^i(\vec{u}(x))| \leqslant \varepsilon$. Тому $f^i(x, \vec{u}(x)) \in Y$, з обмеженості $\operatorname{supp} f^i(x, \vec{u}(x))$ випливає, що $f^i(x, \vec{u}(x)) \in X$, звідки $\vec{f}(x, \vec{u}(x)) \in X^n$.

Виконання умови теореми 1 для відображення $\vec{u} \mapsto \vec{f}(\cdot, \vec{u}(\cdot))$ є очевидним, тому посилання на теорему 1 завершує доведення теореми.

Зауважимо, що аналогічні умови запропоновано в роботах [5, 6].

Розглянемо нелінійну систему вищого порядку з операторами $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_n$:

$$(\bar{L}_i^{d_i} u^i)(x) = f^i\Big(x, u^1(x), \ldots, (\bar{L}_1^{d_1-1} u^1)(x), \ldots, u^n(x), \ldots, (\bar{L}_n^{d_n-1} u^n)(x)\Big), \quad (2)$$

де $u^i \in D(\bar{L}_i^{d_i})$, $f^i \colon H \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\vec{f} = (f^1, \ldots, f^n) \colon H \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, $d = d_1 + \ldots + d_n$, $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Така форма запису не вимагає рівності всіх d_i між собою. Областю визначення $\vec{u}$ є множина $D\big(\bar{L}_1^{d_1}\big) \dotplus \ldots \dotplus D\big(\bar{L}_n^{d_n}\big)$. Але якщо всі d_i однакові: $d_i = s$, то остання ізоморфна $D(\bar{\mathcal{L}}^s)$ та система (2) набирає еквівалентного вигляду $\big(\bar{\mathcal{L}}^s \vec{u}\big)(x) = \vec{f}\big(x, \vec{u}(x), \ldots, (\bar{\mathcal{L}}^{s-1} \vec{u})(x)\big)$, $\vec{u} \in D(\bar{\mathcal{L}}^s)$.

Теорема 3. *Нехай функція $\vec{f}$ задовольняє умови теореми* 2. *Тоді система* (2) *має розв'язок і до того ж єдиний.*

Доведення. Заміною $\vec{v} \in X^d$, де $v^1 = u^1, \ldots,\ v^{d_1} = \bar{L}_1^{d_1-1} u^1, \ldots,\ v^{d-d_n+1} = u^n, \ldots, v^d = \bar{L}_n^{d_n-1} u^n$ система (2) зводиться до рівняння $(\bar{\mathcal{L}} \vec{v}\,)(x) = \vec{g}(x, \vec{v}(x))$ в X^d; для функції $\vec{g} \colon H \times \mathbb{R}^d \ni (x, \vec{p}) \mapsto (p^2, \ldots, p^{d_1}, f^1(x, \vec{p}), \ldots, p^{d-d_n+2}, \ldots, p^d, f^n(x, \vec{p})) \in \mathbb{R}^d$ виконуються умови теореми 1. Подальші міркування аналогічні доведенню теореми 2.

3. Нехай всі $S_i'(0)$ (див. п. 2) однакові: $S_i'(0) = A$, $S_i(t) = \hat{S}(t)$. Розглянемо лінійну систему першого порядку з оператором A:

$$(Au^i)(x) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) u^k(x) = f^i(x), \quad (3)$$

де $u^i \in D(A)$, $a_{ik} \in \mathcal{X}$ — змінні коефіцієнти, $f^i \in \mathcal{X}$, $i = 1, \ldots, n$, або у векторній формі $(S'(0)\vec{u})(x) + a(x)\vec{u}(x) = \vec{f}(x)$, $a(x) = (a_{ik}(x))_{i,k=1}^n$, $\vec{u} \in D(S'(0))$, $\vec{f} \in \mathcal{X}^n$. Для функції $\vec{F}(\vec{u}\,) = \vec{f} - a\vec{u}$ виконується нерівність $\|(\vec{F}(\vec{u}\,) - \vec{F}(\vec{v}\,))(x)\| \leqslant n \max_{i,k=1,\ldots,n} \|a_{ik}\|\, \|(\vec{u} - \vec{v})(x)\|$, тому теорема 1 доводить існування та єдиність розв'язку.

Теорема 4. *Нехай $(S(\tau)a)(x) = ((\hat{S}(\tau)a_{ik})(x))_{i,k=1}^n$. Тоді єдиний розв'язок системи* (3) *має вигляд $\vec{u}(x) = -\displaystyle\int_0^s \exp\left(\int_0^t (S(\tau)a)(x) d\tau\right)(S(t)\vec{f}\,)(x) dt$.*

Доведення. Аналогічно [8] (теорема 3) запишемо

$$-\int\limits_0^s \exp\left(\int\limits_0^t S(\tau) a d\tau\right) S(t) \vec{f} dt =$$

$$= -\int\limits_0^s \exp\left(\int\limits_0^t S(\tau) a d\tau\right) S(t)(S'(0)\vec{u} + a\vec{u}) dt =$$

$$= -\int_0^s \exp\left(\int_0^t S(\tau)a d\tau\right)\frac{dS(t)}{dt}\vec{u}dt - \int_0^s \exp\left(\int_0^t S(\tau)a d\tau\right)S(t)aS(t)\vec{u}dt =$$

$$= -\exp\left(\int_0^t S(\tau)a d\tau\right)S(t)\vec{u}\Big|_{t=0}^{t=s} = \vec{u}$$

(у передостанній рівності до першого доданка застосовано формулу інтегрування частинами, а складова другого доданка $S(t)aS(t)\vec{u}$ є добутком матриці на вектор).

Інші варіанти явних формул розв'язку системи вигляду (3) запропоновано в роботах [5, 6]: у [5] розглядаються однорідні системи $f^i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$, а в [6] — неоднорідні. Наведемо два приклади використання теореми 4: „суттєво нескінченновимірний" та застосування до класичної теорії диференціальних рівнянь.

1. В якості $S_i'(0)$ візьмемо $\bar{\mathcal{L}}$ (див. п. 1), а в „одновимірному" випадку для $S'(0) = \bar{L}$ система (3) перетворюється у рівняння

$$(\bar{L}u)(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad a, f \in X, \tag{4}$$

досліджене у [8]. Візьмемо $a(x) = f(x) = h(x)$, де $h(x) = R^2 - \|x\|^2$ для $x \in B_R$, $h(x) = 0$ зовні B_R, $h \in X$. За теоремою 4 маємо

$$u(x) = -\int_0^{t_0} \exp\left(\int_0^t (T^j(\tau)h)(x)d\tau\right)(T^j(t)h)(x)dt =$$

$$= -\exp\left(\int_0^t (T^j(\tau)h)(x)d\tau\right)\Big|_{t=0}^{t=t_0} =$$

$$= 1 - \exp\left(\int_0^{R^2/\|j\|} T^j(\tau)(R^2 - \|x\|^2)d\tau\right).$$

Обчислимо, наприклад, $u(0)$ та $(\bar{L}u)(0)$. Функція $R^2 - \|x\|^2$ скрізь на сфері $\big\{y \in \in H \mid \|y\| = \sqrt{\tau\|j\|}\big\}$ набуває значення $R^2 - \tau\|j\|$, тому згідно з п. 1 $(T^j(\tau)(R^2 - -\|x\|^2))(0) = R^2 - \tau\|j\|$ та $u(0) = 1 - \exp\left(\dfrac{R^4}{2\|j\|}\right)$, а при підстановці у рівняння (4) маємо $(\bar{L}u)(0) = f(0) - a(0)u(0) = R^2 \exp\left(\dfrac{R^4}{2\|j\|}\right)$.

2. Нехай $\vec{u}, \vec{f} \in C([\alpha;\beta];\mathbb{R}^n)$ — неперервні функції на $[\alpha;\beta]$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, a — матриця, елементи якої належать $C([\alpha;\beta];\mathbb{R})$, $x_0 \in [\alpha;\beta]$. Розв'язок задачі Коші $\vec{u}'(x) + a(x)\vec{u}(x) = \vec{f}(x)$, $\vec{u}(x_0) = \vec{u}_0$ має вигляд

$$\vec{u}(x) = \exp\left(\int_x^{x_0} a(t)dt\right)\vec{u}_0 + \int_{x_0}^x \exp\left(\int_x^t a(\tau)d\tau\right)\vec{f}(t)dt.$$

Покажемо, що цей факт можна отримати з теореми 4 за умов $a(x_0) = 0$, $\vec{f}(x_0) = \vec{0}$.

Зафіксуємо $x < x_0$. Розглянемо банахову алгебру $Y^+ = C([x;+\infty);\mathbb{R}^n)$ обмежених рівномірно неперервних функцій на півосі $[x;+\infty)$. Після природного ототожнення її підалгебри $\{\vec{u} \in Y^+ \mid \vec{u}(\tau) = \vec{0}, \tau \geqslant x_0\}$ з $X^+ = \{\vec{u} \in C([x;x_0];\mathbb{R}^n) \mid \vec{u}(x_0) = \vec{0}\}$ введемо в X^+ півгрупу зсувів $(T^+(t)\vec{u})(\tau) = \vec{u}(t+\tau)$, мультиплікативну та нільпотентну (оскільки $T^+(x_0 - x) = 0$), породжену оператором $A^+ = \dfrac{d}{d\tau}$ з областю визначення $D(A^+) = \{\vec{u} \in X^+ \mid \exists \vec{u}' \in X^+\}$. Заміною $\vec{v}(\tau) = \vec{u}(\tau) - \vec{u}_0$, $\vec{g}(\tau) = \vec{f}(\tau) - a(\tau)\vec{u}_0$ вихідна задача Коші зводиться до еквівалентної $\vec{v}'(\tau) + a(\tau)\vec{v}(\tau) = \vec{g}(\tau)$, $\vec{g}(x_0) = \vec{0}$, $\vec{v}, \vec{g} \in X^+$. Розв'язок останньої задачі Коші за теоремою 4 має вигляд

$$\vec{v}(\tau) = -\int_0^{x_0 - x} \exp\left(\int_0^{\eta} a(\tau+\xi)d\xi\right)(\vec{f}(\tau+\eta) - a(\tau+\eta)\vec{u}_0)d\eta.$$

Покладемо $\tau = x$, виконаємо заміну $\eta = \eta - x$, $\xi = \xi - x$ та отримаємо шукану явну формулу.

У випадку $x > x_0$ покладемо $X^- = \{\vec{u} \in C([x_0;x];\mathbb{R}^n) \mid \vec{u}(x_0) = \vec{0}\}$, $(T^-(t)\vec{u})(\tau) = \vec{u}(\tau - t)$, $A^- = -\dfrac{d}{d\tau}$, а рівність $\vec{u}'(x_0 - 0) = 0 = \vec{u}'(x_0 + 0)$ доводить, що $\vec{u}$ належить $C^1([\alpha;\beta];\mathbb{R}^n)$.

Автор вдячний Ю. В. Богданському за постійну увагу до даної роботи.

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Feller M. N.* The Lévy Laplacian. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153 p.
3. *Феллер М. Н.* Об одном нелинейном уравнении, не разрешенном относительно лапласиана Леви // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 719 – 721.
4. *Феллер М. Н.* Задача Рикьера для нелинейного уравнениия, разрешенного относительно итерированного лапласиана Леви // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1574 – 1577.
5. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. III // Мат. сб. – 1967. – **74(116)**, № 1. – С. 161 – 168.
6. *Сикирявый В. Я.* Оператор квазидифференцирования и связанные с ним краевые задачи // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1972. – **27**. – С. 195 – 246.
7. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781 – 784.
8. *Богданський Ю. В., Статкевич В. М.* Лінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірними операторами // Наук. вісті НТУУ „КПІ”. – 2008. – № 2. – С. 144 – 147.
9. *Богданський Ю. В., Статкевич В. М.* Нелінійні рівняння з суттєво нескінченновимірними диференціальними операторами // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 11. – С. 1571 – 1576.
10. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 584 – 590.

Одержано 18.02.11,
після доопрацювання — 23.06.11