УДК 517.5

Т. М. Жеребко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНАМИ КОНФОРМНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ОБЛАСТІ З НЕНУЛЬОВИМ КУТОМ

Let G be a bounded domain with a Jordan boundary that is smooth at all points except a single point at which it forms a nonzero angle. We prove Korevaar's conjecture on the order of polynomial approximation of a conformal mapping of this domain into a disk. We also obtain a pointwise estimate for the error of approximation.

Пусть G — ограниченная область с жордановой границей, гладкой во всех точках, за исключением одной, и угол, который в этой точке образует граница, не является нулевым. Доказана гипотеза Коре-ваара о порядке приближения многочленами конформного отображения этой области в круг, а также установлена поточечная оценка величины приближения.

1. Вступ. Нехай $G \subset \mathbb{C}$ — обмежена область з жордановою межею ∂G, яка складається з двох гладких кривих Γ_1 і Γ_2 таких, що $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{z_1, z_2\}$, де $z_1 = 1$. Позначимо через $\alpha_j \pi$ кути в точках z_j, $j = 1, 2$, між кривими Γ_1 і Γ_2, які є зовнішніми відносно області G. Будемо вважати, що $0 < \alpha_1 < 2$, а $\alpha_2 = 1$. Також для спрощення записів будемо писати α замість α_1, тобто $\alpha := \alpha_1$. Припустимо, що $0 \in G$.

Для функції $g\colon G \to \mathbb{C}$ позначимо $\|g\|_G := \sup_{z \in G} |g(z)|$ і нехай $\mathbb{P}_n$ — простір многочленів степеня $< n$.

Метою роботи є наближення функції Рімана f, яка здійснює конформне відображення внутрішності області G в круг $w\colon |w| < 1$, нормоване умовами $f(0) = 0$ та $f'(0) > 0$. Для цього В. В. Андрієвський [1], Ф. Г. Абдуллаєв [2], Д. Гайєр [3] та інші автори застосовували многочлени Бібербаха $\pi_n \in \mathbb{P}_n$. Наприклад, Д. Гайєр (див. [3]) довів наступну теорему (яку сформулюємо для випадку, коли межа складається з двох кривих Γ_1 та Γ_2).

Теорема Г. *Для будь-якого* $\gamma < \min\left\{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}, \dfrac{1}{2}\right\}$ *існує стала* $c(\gamma, G)$ *така, що виконується нерівність*

$$\|f - \pi_n\|_G \le \frac{c(\gamma, G)}{n^\gamma}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

У вказаній роботі зазначено, що для величини найкращого наближення

$$E_n(f, G) = \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n} \|f - P_n\|_G$$

може мати місце „краща оцінка”

$$E_n(f, G) \le \frac{c(G)}{n^{\gamma_0}}, \tag{1}$$

де $\gamma_0 = \min\left\{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}, 1\right\}$. Зокрема, з роботи [4] випливає, що оцінка (1) має місце для випадку, коли область G симетрична відносно дійсної осі і дуга $\partial G \setminus \{1\}$ є $\mathbb{C}^\infty$.

У даній роботі ми покажемо, що оцінка (1) є правильною при значно ширших умовах на область G. Більш того, ми одержимо точнішу поточкову оцінку різниці $|f(z) - P_n(z)|$, яка в „найгірших” випадках збігається з (1).

Будемо вважати, що мають місце нерівності

$$c \leq |f'(z)|\,|z-1|^{(1-\alpha)/(2-\alpha)} \leq C, \quad z \in \overline{G} \setminus \{1\}, \tag{2}$$

де $c = c(G)$ і $C = C(G)$ — сталі, які залежать від G. Нагадаємо (див. [5]), що умова (2) виконується, якщо гладкі криві Γ_1 та Γ_2 є, скажімо, кривими Ляпунова, або навіть такими, що задовольняють умову Діні. Далі через c будемо позначати різні сталі, які можуть залежати лише від G.

Теорема 1. *Для кожного $n \geq 1$ має місце нерівність*

$$E_n(f, G) \leq \frac{c}{n^{\gamma_0}},$$

де $\gamma_0 = \min\left\{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}, 1\right\}$.

Теорема 1 є очевидним наслідком наступної теореми про поточкову оцінку різниці $f(z) - P_n(z)$.

Теорема 2. *Для кожного $n \geq 1$ існує многочлен $P_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що для кожного $z \in G$ мають місце оцінки*

$$|f(z) - P_n(z)| \leq c|z-1|^{1/(2-\alpha)}, \quad \text{якщо} \quad |z-1| \leq n^{-\alpha} \quad \text{та} \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

$$|f(z) - P_n(z)| \leq c|z-1|n^{\alpha(1-\alpha)/(2-\alpha)}, \quad \text{якщо} \quad |z-1| \leq n^{-\alpha} \quad \text{та} \quad 1 < \alpha < 2,$$

$$|f(z) - P_n(z)| \leq c\frac{1}{n}|z-1|^{2(\alpha-1)/\alpha(2-\alpha)}, \quad \text{якщо} \quad |z-1| > n^{-\alpha}.$$

2. Допоміжні леми. Нагадаємо, що за теоремою Каратеодорі функція f, яка здійснює комформне відображення внутрішності області G на одиничний круг $\{w\colon |w| < 1\}$, може бути неперервно продовженою на $\overline{G}$.

Означення 1. *Для $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{C}$ означимо*

$$\rho_n(z) := \begin{cases} n^{-\alpha}, & \text{якщо} \quad |z-1| \leq n^{-\alpha}, \\ \dfrac{|z-1|^{(\alpha-1)/\alpha}}{n} & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Лема 1. *Для кожного $z \in G$ і $z_0 \in G$ має місце оцінка*

$$|f(z) - f(z_0)| \leq c\,|z - z_0|\,|z_0 - 1|^{(\alpha-1)/(2-\alpha)}\left(1 + \frac{|z - z_0|}{|z_0 - 1|}\right)^{\alpha/(2-\alpha)}.$$

Доведення. Зафіксуємо $z_0 \in G$ і $z \in G$. Лема 3 статті [6] гарантує існування простої жорданової спрямної кривої γ з початком у точці 1 такої, що $z \in \gamma$, $z_0 \in \gamma$ і $\gamma \setminus \{1\} \subset G$, і для її натуральної параметризації $\zeta : [0; l] \to \gamma$ виконується нерівність

$$|s' - s| \leq c|\zeta(s') - \zeta(s)|, \quad s, s' \in [0; l].$$

Нехай $a \in [0; l]$ та $b \in [0; l]$ такі, що $z_0 = \zeta(a)$ та $z = \zeta(b)$. Зрозуміло, що $\zeta(0) = 1$. Нехай γ_0 є дугою γ з кінцями в точках z_0 і z. Тоді

$$|f(z) - f(z_0)| = \left|\int\limits_{z_0}^{z} f'(\zeta)d\zeta\right| \leq \int\limits_{\gamma_0} |f'(\zeta)|\,|d\zeta| \leq$$

$$\leq C \int\limits_{\gamma_0} |\zeta - 1|^{(\alpha-1)/(2-\alpha)} |d\zeta| \leq c \int\limits_a^b \left| s^{(\alpha-1)/(2-\alpha)} \right| ds =$$

$$= c \left| b^{1/(2-\alpha)} - a^{1/(2-\alpha)} \right| \leq c|b-a| a^{(\alpha-1)/(2-\alpha)} \left(1 + \frac{|b-a|}{a} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} \leq$$

$$\leq c\,|z - z_0|\,|z_0 - 1|^{(\alpha-1)/(2-\alpha)} \left(1 + \frac{|z - z_0|}{|z_0 - 1|} \right)^{\alpha/(2-\alpha)}.$$

Лему доведено.

З леми 1, означення 1 для ρ_n та оцінки $|1 - z_0| \geq c\rho_n(z_0)$ для $|1 - z_0| \geq n^{-\alpha}$ безпосередньо випливає наступна лема.

Лема 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $z_0 \in G$. Тоді*:

1) *якщо $|z_0 - 1| \geq n^{-\alpha}$, то*

$$|f(z) - f(z_0)| \leq c n^{\alpha/(2-\alpha)} \rho_n^{\alpha/(2-\alpha)}(z_0)\,|z - z_0| \left(1 + \frac{|z - z_0|}{\rho_n(z_0)} \right)^{\alpha/(2-\alpha)}, \quad z \in \overline{G};$$

2) *якщо $z \in G$ і $|z - 1| \leq |z_0 - 1| = n^{-\alpha}$, то*

$$|f(z) - f(z_0)| \leq c n^{-\alpha/(2-\alpha)}.$$

Сформулюємо ще один результат.

Лема 3. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує многочлен $R_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що для кожного $z \in G$ виконуються нерівності*

$$|f(z) - R_n(z)| \leq c n^{\alpha/(2-\alpha)} \rho_n^{1+\alpha/(2-\alpha)}(z), \tag{3}$$

$$|R_n'(z)| \leq c n^{\alpha/(2-\alpha)} \rho_n^{\alpha/(2-\alpha)}(z). \tag{4}$$

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 9 статті [6] і базується на використанні многочленних ядер Дзядика [7, 8]. Замість оцінок з леми 5 статті [6] використовуємо оцінки з леми 2 даної статті, в якості многочлена Тейлора розглядаємо $T(z, z_0) = f(z_0)$, $r = 1$, $\beta = \dfrac{-\alpha}{2-\alpha}$.

За означенням 1 нерівність (3) рівносильна нерівностям

$$|f(z) - R_n(z)| \leq c \frac{|z - 1|^{(2(\alpha-1))/(\alpha(2-\alpha))}}{n}, \quad \text{якщо} \quad |z - 1| > n^{-\alpha},$$

і

$$|f(z) - R_n(z)| \leq c n^{-\alpha/(2-\alpha)}, \quad \text{якщо} \quad |z - 1| \leq n^{-\alpha}.$$

У наступному пункті знайдемо многочлен, який дає точніші оцінки у випадку $|z - 1| \leq n^{-\alpha}$.

3. Доведення теореми 2. Позначимо

$$r^* = \left\lceil \max\left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{2}{2-\alpha} \right\} \right\rceil.$$

За лемою 7 статті [6], застосованої до випадку $l = 1$, при кожному $n \geq r^*$ існує многочлен $Q_{0,1} \in \mathbb{P}_n$ такий, що $Q_{0,1}(1) = 1$ та для всіх $q = 0, \ldots, r^*$ виконується нерівність

$$\left|Q_{0,1}^{(q)}(z)\right| \leq \frac{c\rho_n^{r^*}(1)\rho_n^{r^*}(z)}{(|z-1| + \rho_n(z))^{2r^*+q}},$$

зокрема

$$\left|Q_{0,1}'(z)\right| \leq \frac{c}{|z-1| + \rho_n(z)} \leq \frac{c}{\rho_n(1)} = cn^{\alpha}. \tag{5}$$

Розглянемо многочлени

$$Q_n(z) := (f(1) - R_n(1))Q_{0,1}(z)$$

та $P_n := R_n + Q_n$, де $R_n \in \mathbb{P}_n$ — многочлен із леми 3. Позначимо

$$G_n := \left\{z \in G\colon\ |z-1| \leq \frac{1}{n^{\alpha}}\right\}.$$

Якщо $z \in G \setminus G_n$, то за означенням $\rho_n(z) = \dfrac{1}{n}|z-1|^{(\alpha-1)/\alpha}$. Враховуючи (3) й умову $r^* \geq \dfrac{2}{2-\alpha}$, маємо

$$|Q_n(z)| \leq cn^{\alpha/(2-\alpha)}\rho_n^{2/(2-\alpha)}(1)\frac{\rho_n^{r^*}(1)\rho_n^{r^*}(z)}{(|z-1| + \rho_n(z))^{2r^*}} \leq cn^{\alpha/(2-\alpha)}\rho_n^{2/(2-\alpha)}(z).$$

Отже,

$$|f(z) - P_n(z)| \leq \frac{c}{n}|z-1|^{(2(\alpha-1))/(\alpha(2-\alpha))}, \quad z \in G \setminus G_n.$$

Якщо ж $z \in G_n$, то, врахувавши нерівності (2), (4) та (5), отримаємо

$$|f(z) - P_n(z)| \leq |f(z) - f(1) + P_n(1) - P_n(z)| = \left|\int_1^z (f'(\zeta) - P_n'(\zeta))\, d\zeta\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_1^z |f'(\zeta)| d\zeta\right| + \left|\int_z^1 |R_n'(\zeta)| d\zeta\right| + \left|\int_z^1 |Q_n'(\zeta)| d\zeta\right| \leq$$

$$\leq c|z-1|^{1/(2-\alpha)} + cn^{\alpha(1-\alpha)/(2-\alpha)}|z-1|.$$

Якщо $0 < \alpha \leq 1$, то $|z-1|^{1/(2-\alpha)} \geq n^{\alpha(1-\alpha)/(2-\alpha)}|z-1|$, тому в цьому випадку остаточна оцінка має вигляд

$$|f(z) - P_n(z)| \leq c|z-1|^{1/(2-\alpha)}, \quad z \in G_n.$$

Якщо ж $1 < \alpha < 2$, то $|z-1|^{1/(2-\alpha)} \leq n^{\alpha(1-\alpha)/(2-\alpha)}|z-1|$, і маємо остаточну оцінку

$$|f(z) - P_n(z)| \leq cn^{\alpha(1-\alpha)/(2-\alpha)}|z-1|, \quad z \in G_n.$$

Таким чином, теорему 2 доведено.

1. *Андрієвський В. В.* Рівномірна збіжність многочленів Бібербаха в областях з кусково-квазіконформною межею // Теорія відображень і наближення функцій / Під ред. Г. Д. Суворова та ін. – Київ: Наук. думка, 1983. – С. 3 – 18 .
2. *Abdullayev F. G.* Uniform convergence of the bieberbach polynomials inside and on the closure of domain in the complex plane // East J. Approxim. – 2001. – **7**, № 1. – P. 77 – 101.
3. *Dieter Gaier.* On the convergence of the Bieberbach polinomials in regions with corners // Constructive Approxim. – 1988. – **4**. – P. 289 – 305.
4. *Korevaar J.* Polynomial and rational approximation in the complex domain // Aspects of Contemporary Complex Analysis. Proc. Conf., Univ. Durham / Eds D. A. Brannan, J. G. Clunie. – New York: Acad. Press, 1979. – P. 251 – 292.
5. *Алибеков Г. А.* Свойства конформного отображения на областях с углами // Вопросы теории приближений функций и ее приложение. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – Р. 4 – 18.
6. *Abdullayev F. G., Shevchuk I. A.* Uniform estimates for polynomial approximation in domains with corners // J. Approxim. Theory. – 2005. – **137**. – P. 143 – 165.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
8. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.

Одержано 21.09.10