УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

О ТЕОРЕМЕ ДЖЕКСОНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ. II

In the spaces $L_\psi(T^m)$ of periodic functions with metric $\rho(f,0)_\psi = \int_{T^m} \psi\left(|f(x)|\right)dx$, where ψ is a function of the type of modulus of continuity, we study the direct Jackson theorem in the case of approximation by trigonometric polynomials. It is proved that the direct Jackson theorem is true if and only if the lower dilation index of the function ψ is not equal to zero.

У просторах $L_\psi(T^m)$ періодичних функцій з метрикою $\rho(f,0)_\psi = \int_{T^m} \psi\left(|f(x)|\right)dx$, де ψ — функція типу модуля неперервності, досліджено пряму теорему Джексона у випадку апроксимації тригонометричними поліномами. Доведено, що пряма теорема Джексона має місце тоді і тільки тоді, коли нижній показник розтягнення функції ψ не дорівнює нулеві.

1. Введение. Данная статья является продолжением работы [1].

Пусть Ω — класс функций $\psi: R_+^1 \to R_+^1$, являющихся модулем непрерывности, т. е. ψ — непрерывная неубывающая функция, $\psi(0)=0$, $\psi(x+y) \le \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in R_+^1$; функции $f(x)$, $x \in R^1$, — действительнозначные, имеющие период 1; $\mathbf{T} = \left[-1/2, 1/2\right)$ — основной тор периодов; $L_0 \equiv L_0(\mathbf{T})$ — множество всех таких функций, которые почти всюду на $\mathbf{T}$ конечны и измеримы; для $\psi \in \Omega$ множество L_ψ:

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_0(T) : \|f\|_\psi := \int_T \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty \right\},$$

является линейным метрическим пространством с метрикой $\rho(f,g)_\psi = \|f-g\|_\psi$.

В частности, с помощью функции $\phi(t) = t(1+t)^{-1}$, $\phi \in \Omega$, в L_0 вводится метрика

$$\rho(f,g)_0 := \int_T \phi\left(|f(x)-g(x)|\right) dx,$$

порождающая сходимость по мере, а в случае $\psi(t) = t^p$, $0 < p < 1$, получаем пространства L_p.

Пусть $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{i2\pi kx}$ — действительнозначный тригонометрический полином периода 1 и степени n,

$$E_n(f)_\psi := \inf_{\{c_k\}} \|f - T_n\|_\psi$$

— наилучшее приближение f такими полиномами в пространстве L_ψ,

$$\omega(f,h)_\psi \ := \ \sup\left\{\|\Delta_t f\|_\psi : |t| \le h\right\}, \qquad h \in R_+^1,$$

— модуль непрерывности f из L_ψ, где $\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$.

Неравенствами Джексона (или теоремой Джексона) в теории приближения периодических функций принято называть следующие соотношения (если они выполняются):

$$\sup_{n>0} \sup_{f\in L_\psi,\, f\ne \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega\left(f, \dfrac{1}{n}\right)_\psi} < \infty. \tag{1}$$

Сведения и библиографию о неравенствах (1) в пространствах L_ψ см. в [1]. В связи с тем, что в пространствах L_p неравенства Джексона (1) справедливы, а в пространстве L_0 не выполняются, в [1] была сформулирована задача описания функций ψ из Ω, для которых в соответствующих пространствах L_ψ справедливы соотношения (1).

В этом направлении был доказан следующий частный результат [1] (теорема 2): если функция $\psi \in \Omega$ удовлетворяет условиям:

1) $\exists M \quad \forall x, y \in R_+^1: \ \psi(x \cdot y) \le M\psi(x)\psi(y)$,

2) $\exists \varepsilon > 0: \ \int_0^1 \dfrac{\psi(t)}{t^{1+\varepsilon}}\, dt < \infty$,

то в L_ψ справедлива теорема Джексона (1).

Отметим, что первые результаты в этой задаче были получены в [2]. А именно, в [2] (теорема 4.3) доказано, что если $\psi \in \Omega$ такова, что при некотором $r = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k M_\psi(k^{-2r}) \ < \ \infty,$$

где

$$M_\psi(c) \ = \ \sup_{x>0} \frac{\psi(cx)}{\psi(x)}, \qquad c > 0,$$

то выполнены неравенства (1).

В настоящей работе мы получим полное решение сформулированной задачи. Но предварительно сделаем два замечания.

1. В настоящий момент во всех случаях, когда доказаны теоремы Джексона в метрических и нормированных пространствах периодических функций, они имеют вид (1) в том смысле, что значения приближения $E_{n-1}(f)$ оцениваются сверху через значения $\omega(f, \alpha_n)$ для α_n, имеющих порядок убывания $1/n$. Возникает вопрос: существуют ли пространства L_ψ, в которых неравенства Джексона выполнены для других значений $\{\alpha_n\}$?

В связи с этим наряду с „классической” формой теоремы Джексона (1) нас будет интересовать вопрос о наличии в данном пространстве неравенств Джексона в следующем более общем виде:

существует ли последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \downarrow 0$, такая, что

$$\sup_n \sup_{f \in L_\psi, f \neq \text{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega(f, \alpha_n)_\psi} < \infty ? \tag{2}$$

2. Пусть для $\psi \in \Omega$ $\bar{\psi}$ — наименьшая выпуклая вверх мажоранта. Тогда по лемме С. Б. Стечкина

$$\psi(x) \leq \bar{\psi}(x) \leq 2\psi(x),$$

и, значит, метрики в пространствах L_ψ и $L_{\bar{\psi}}$ эквивалентны. Поэтому в рассматриваемых нами задачах без ограничения общности будем предполагать функции ψ выпуклыми вверх, а класс таких модулей непрерывности обозначим через $\bar{\Omega}$.

2. Функция растяжения. Для решения поставленной задачи важную роль играет понятие функции растяжения.

Пусть $\beta(t)$, $t \in (0, \infty)$, — произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения называют [3] (гл. II, § 1) функцию $M_\beta(s)$, $s \in (0, \infty)$,

$$M_\beta(s) := \sup_{0<t<\infty} \frac{\beta(st)}{\beta(t)}.$$

Общие свойства M_β см. в [3]. Нам понадобятся следующие дополнительные свойства M_ψ в случае $\psi \in \bar{\Omega}$ [3]:

1) M_ψ — всюду конечная неубывающая на $(0, \infty)$ функция и

$$M_\psi(s_1 s_2) \leq M_\psi(s_1) M_\psi(s_2) \quad \forall s_1,\, s_2 \in (0, \infty);$$

2) существует число γ_ψ (называемое нижним показателем растяжения функции ψ) такое, что:

а) $\gamma_\psi \in [0, 1]$,

б) $M_\psi(s) \geq s^{\gamma_\psi}$ $\forall s \in (0, 1]$,

в) для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < s < 1$ с некоторой константой C_ε

$$M_\psi(s) \leq C_\varepsilon s^{\gamma_\psi - \varepsilon}.$$

При этом $\gamma_\psi = \lim_{s\to 0} \dfrac{\ln M_\psi(s)}{\ln s} = \sup_{0<s<1} \dfrac{\ln M_\psi(s)}{\ln s}$. В частности, из свойства 2 следует, что функция $M_\psi(s)$ в правой окрестности нуля ведет себя следующим образом: либо $M_\psi(s) \equiv 1$ для всех $s \in (0, 1]$ (случай $\gamma_\psi = 0$), либо $M_\psi(+0) := \lim_{s\to+0} M_\psi(s) = 0$ (случай $\gamma_\psi > 0$).

Несложные вычисления показывают, что, например, нижний показатель растяжения будет равен нулю у функций

$$\phi(t) = \frac{t}{1+t}, \qquad \psi(t) = (\ln(1+t))^p, \quad p \in (0,1].$$

3. О теореме Джексона в L_ψ. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in \overline{\Omega}$, γ_ψ *— нижний показатель растяжения* ψ.

1. *Если* $\gamma_\psi > 0$, *то в пространстве* L_ψ *выполняются неравенства Джексона* (1);

2. *Если* $\gamma_\psi = 0$, *то в пространстве* L_ψ *невозможны неравенства Джексона в форме* (2) *ни при каком выборе последовательности* $\{\alpha_n\}$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы легко следует из теоремы 4.3 [4]. Мы, однако, приведем другое доказательство, близкое к доказательству теоремы 2 из [1]. Это связано с тем, что данный метод допускает обобщения на случай приближения функций многих переменных (см. [1]).

Итак, пусть Σ_1 — класс суммирующих функций $\alpha(x)$, $x \in R^1$, т. е.

$$\alpha \in C(\mathbf{R}^1), \qquad \operatorname{supp} \alpha \subset [-1;1], \qquad \alpha(0) = 1, \qquad \alpha(-x) = \alpha(x).$$

По заданной функции $\alpha \in \Sigma_1$ для каждого $n \in \mathbf{N}$ строится тригонометрический полином степени не выше $n-1$

$$K_n(x) = \sum_{|k|<n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) e^{2\pi i k x}$$

и линейный полиномиальный метод приближения

$$\tilde{L}_n(\alpha; f, x) \equiv \tilde{L}_n(f, x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} K_n(x - x_k) f(x_k),$$

где $x_k = k/n$. При этом

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} K_n(x - x_k) = \int_T K(x) dx = 1.$$

Для $t \in \mathbf{T}$ обозначим через f_t сдвиг f на параметр t:

$$f_t(x) := f(x+t).$$

Тогда (см. [1])

$$\psi\left(\left| f_t(x) - \tilde{L}_n(f_t; x) \right|\right) \le \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\left| \frac{K_n(x - x_k)}{n} \right| | f_t(x) - f_t(x_k) | \right),$$

$$E_{n-1}(f)_\psi = \int_{t \in T} E_{n-1}(f_t)_\psi \, dt \le \int_{t \in T} \left\| f_t - \tilde{L}_n(f_t) \right\|_\psi dt \le$$

$$\leq n \int_{t\in T} \int_{y\in T} \psi\left(\frac{|K_n(y)|}{n} \left|\Delta_y f(t)\right| \right) dydt := U .$$

Далее предполагаем, что $\alpha \in \Sigma_1 \bigcap C^\infty(R^1)$. Тогда ее преобразование Фурье

$$\hat{\alpha}(x) = \int_{R^1} \alpha(t)\, e^{-2\pi i t x} dt, \qquad x \in R^1 ,$$

убывает на бесконечности быстрее любой степени, т. е. для любого $N \in \mathbf{N}$ существует константа C_N такая, что для всех $x \in \mathbf{R}^1$

$$\hat{\alpha}(x) \leq \frac{C_N}{\left(1+|x|\right)^N} . \tag{3}$$

В частности, можно применить формулу суммирования Пуассона [4, с. 232]:

$$K_n(y) = \sum_{|k|<n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) e^{2\pi i k y} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_n(y-j) ,$$

где $\hat{\alpha}_n(x) := n\hat{\alpha}(nx)$. Поэтому

$$\psi\left(\frac{|K_n(y)|}{n} \left|\Delta_y f(t)\right| \right) \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{1}{n} |\hat{\alpha}_n(y-j)| \left|\Delta_y f(t)\right| \right),$$

$$U \leq n \int_{t\in T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{y\in T} \psi\left(\frac{1}{n} |\hat{\alpha}_n(y-j)| \left|\Delta_y f(t)\right| \right) dy\, dt =$$

$$= n \int_{t\in T} \int_{x\in R^1} \psi\left(\frac{1}{n} |\hat{\alpha}_n(x)| |\Delta_x f(t)| \right) dx\, dt =$$

$$= \int_{t\in T} \int_{x\in R^1} \psi\left(|\hat{\alpha}(x)| \left|\Delta_{x/n} f(t)\right| \right) dx\, dt .$$

Таким образом, используя определение функции растяжения, получаем неравенство

$$E_{n-1}(f)_\psi \leq \int_{R^1} M_\psi\left(|\hat{\alpha}(x)|\right) \left\|\Delta_{x/n} f\right\|_\psi dx , \tag{4}$$

которое выполняется при всех $\alpha \in \Sigma_1 \bigcap C^\infty(R^1)$.

Докажем сходимость интеграла

$$I := \int_{x\in R^1} \left(1+|x|\right) M_\psi\left(|\hat{\alpha}(x)|\right) dx < \infty . \tag{5}$$

Используя неравенство (3), имеем

$$I \le 2\int_0^\infty (1+x) M_\psi\left(\frac{C_N}{(1+x)^N}\right) dx = 2\int_1^\infty y M_\psi\left(\frac{C_N}{y^N}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{N}\int_0^1 \frac{M_\psi(C_N t)}{t^{1+\frac{2}{N}}} dt \le \frac{2M_\psi(C_N)}{N}\int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t^{1+\frac{2}{N}}} dt . \tag{6}$$

Согласно условию теоремы $\gamma_\psi > 0$, значит, по свойству 2 $M_\psi(s) \le C_\varepsilon s^{\gamma_\psi - \varepsilon}$ для достаточно малых ε и $s \in (0,1]$. Поэтому, выбирая ε и N из условия $\gamma_\psi - \varepsilon - \dfrac{2}{N} > 0$, получаем сходимость последнего интеграла в (6), а значит, и $I < \infty$.

Из условия (5) следует конечность констант B_1, B_2,

$$B_1 = \int_{R^1} M_\psi\left(|\hat\alpha(x)|\right) dx, \qquad B_2 = B_1^{-1}\int_{R^1} |x|\, M_\psi\left(|\hat\alpha(x)|\right) dx . \tag{7}$$

Обозначим через $\bar\omega(f,h)_\psi$ наименьшую выпуклую вверх мажоранту функции $\omega(f,h)_\psi$, тогда по лемме С. Б. Стечкина

$$\bar\omega(f,h)_\psi \le 2\omega(f,h)_\psi . \tag{8}$$

Из (4), (7), (8) с помощью неравенства Йенсена для выпуклой вверх функции $\bar\omega$ получаем

$$E_{n-1}(f)_\psi \le \int_{R^1} M_\psi\left(|\hat\alpha(x)|\right) \bar\omega\left(f, \frac{|x|}{n}\right)_\psi dx \le$$

$$\le B_1 \bar\omega\left(f, \frac{B_2}{n}\right)_\psi \le 2B_1 \omega\left(f, \frac{B_2}{n}\right)_\psi .$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второй части теоремы оценим снизу наилучшие приближения функций

$$f_A(x) = A \operatorname{sign} \sin 2\pi x, \qquad A > 0$$

(в случае аппроксимации в L_0 это семейство функций рассматривал С. В. Конягин).

Пусть $\delta \in (0,1)$, T_{n-1} — произвольный тригонометрический полином,

$$e = \left\{ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : |f_A(x) - T_{n-1}(x)| > \delta A \right\},$$

$$e' = \left\{ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : |f_A(x) - T_{n-1}(x)| \le \delta A \right\}.$$

Возможны два случая: $\mu e > \frac{1}{4}$ или $\mu e' \geq \frac{1}{4}$.

Если $\mu e > \frac{1}{4}$, то

$$\| f_A - T_{n-1} \|_\psi \; > \; \int_e \psi\left(|f_A(x) - T_{n-1}(x)|\right) dx \; > \; \psi(\delta A)\mu e \; > \; \frac{1}{4}\psi(\delta A). \tag{9}$$

Пусть теперь $\mu e' \geq \frac{1}{4}$. Будем использовать следующее свойство тригонометрических полиномов: если

$$K(n) \; := \; \sup_{e' : \mu e' \geq \frac{1}{4}} \sup_{T_{n-1}} \frac{\max_{x \in T} |T_{n-1}(x)|}{\max_{x \in e'} |T_{n-1}(x)|},$$

то при каждом n

$$K(n) \; < \; \infty. \tag{10}$$

Действительно, пусть $\max\left\{|T_{n-1}(x)|; x \in e'\right\} \leq 1$. График полинома T_{n-1} имеет на периоде не более $2n-2$ участков монотонности. Если участок монотонности T_{n-1} не содержит точки разрыва функции $f_A(x)$, то на этом участке может быть только одна точка пересечения графиков T_{n-1} и f_A. Если же участок монотонности полинома содержит окрестность точки разрыва f_A, то на этом участке возможны две точки пересечения графиков. Поэтому множество e' состоит не более чем из $2n$ отрезков, и найдется отрезок I_n такой, что

$$\mu I_n \; \geq \; \frac{1}{8n}, \qquad \max_{x \in I_n} |T_{n-1}(x)| \; \leq \; 1.$$

Но тогда известно [5, с. 232], что

$$\max_{x \in T} |T_{n-1}(x)| \; \leq \; \operatorname{tg}^{2(n-1)} \frac{\pi}{32n} + \operatorname{ctg}^{2(n-1)} \frac{\pi}{32n},$$

и свойство (10) доказано.

На множестве $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ функция

$$f_A(x) - T_{n-1}(x) \; = \; A - T_{n-1}(x)$$

является полиномом, поэтому из (10) следует, что

$$\| A - T_{n-1} \|_{C(T)} \; \leq \; K(n) \max_{x \in e'} |A - T_{n-1}(x)| \; \leq \; K(n)\delta A.$$

Применим теперь неравенство С. Н. Бернштейна для производной полинома:

$$\| T'_{n-1} \|_{C(T)} \; = \; \| (A - T_{n-1})' \|_{C(T)} \; \leq$$

$$\leq \; (n-1) \| A - T_{n-1} \|_{C(T)} \; \leq \; (n-1) K(n)\, \delta A. \tag{11}$$

Оценка (11) производной полинома получена при произвольном выборе значения δ из $(0,1)$. Теперь будем считать, что с самого начала δ выбрана настолько малой, что выполнено условие

$$(n-1)K(n)\delta \; < \; 2(1-\delta). \tag{12}$$

Тогда из (11), (12) следует, что предположение $\mu e' \geq \frac{1}{4}$ влечет неравенство

$$\| T'_{n-1} \|_{C(T)} \; < \; 2A(1-\delta). \tag{13}$$

Теперь рассмотрим значения $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Если сравнить графики полинома T_{n-1} и линейной функции $y(x) = 2A(1-\delta)x$, то из (13) следует, что множество

$$d \; := \; \left\{ x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) : T_{n-1}(x) > -A(1-\delta) \right\}$$

имеет достаточно большую меру: $\mu d \geq \frac{1}{4}$. Поэтому в случае $\mu e' \geq \frac{1}{4}$

$$\| f_A - T_{n-1} \|_\psi \; \geq \; \int\limits_d \psi\left(|f_A(x) - T_{n-1}(x)|\right) dx \; > \; \psi(\delta A)\mu d \; \geq \; \frac{1}{4}\psi(\delta A). \tag{14}$$

Оценки (9) и (14) получены для произвольного полинома, а значит, при всех $n \geq 1$ имеют место неравенства

$$E_{n-1}(f_A)_\psi \; \geq \; \frac{1}{4}\psi(\delta A), \tag{15}$$

где δ из (0,1) удовлетворяет условию (12).

Легко видеть, что для любого $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\omega(f_A, h)_\psi \; = \; \psi(2A)2h.$$

Используя (15), для любых фиксированных n и $h > 0$ получаем

$$\sup_{f \in L_\psi,\, f \neq \text{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega(f,h)_\psi} \; \geq \; \sup_{A>0} \frac{E_{n-1}(f_A)_\psi}{\omega(f_A,h)_\psi} \; \geq \; \sup_{A>0} \frac{\frac{1}{4}\psi(\delta A)}{\psi(2A)2h} \; =$$

$$= \; \frac{1}{8h} M_\psi\left(\frac{1}{2}\delta\right) \; = \; \frac{1}{8h}. \tag{16}$$

На последнем шаге мы использовали условие $\gamma_\psi = 0$.

Теорема 1 доказана.

Замечание. В работе [6] исследовалась аппроксимация в классах Орлича $\varphi(L)$, где $\varphi(x)$ — четная, непрерывная, строго монотонная на $[0;\infty)$ функция, такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(2x) \leq C_\varphi \varphi(x)$, $x \geq 0$, любой так называемой нелокализованной системой (в том числе и тригонометрической). Доказано, что если функция $\varphi(x)$ существенно отличается от степенной в окрестности 0 или ∞, то неравенства Джексона в форме (2) невозможны.

Теорема 1 остается справедливой в случае аппроксимации функций m переменных $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in T^m$, в пространствах $L_\psi(T^m)$ полиномами

$$T_R(x) = \sum_{k \in Z^m \cap RS} c_k e^{i2\pi kx} \tag{17}$$

со спектром в RS, где S — некоторое ограниченное центрально-симметричное тело в $\mathbf{R}^m$, RS — его гомотет с коэффициентами $R \in \mathbf{R}_+^1$ (все необходимые определения см. в [1]).

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Если* $\gamma_\psi > 0$, *то имеют место неравенства Джексона*

$$\sup_R \sup_{f \in L_\psi(T^m),\, f \neq \mathrm{const}} \frac{E_R(f)_\psi}{\omega\left(f, \frac{1}{R}\right)_\psi} < \infty .$$

2. *Если* $\gamma_\psi = 0$, *то при любом выборе числовой последовательности* $\{\alpha_R\} \downarrow 0$, $R \in \mathbf{N}$, *выполнены соотношения*

$$\sup_R \sup_{f \in L_\psi(T^m),\, f \neq \mathrm{const}} \frac{E_R(f)_\psi}{\omega(f, \alpha_R)_\psi} = \infty .$$

Доказательство. Доказательство первого утверждения аналогично одномерному случаю; в работе [1] (см. теоремы 3, 4) есть соответствующие выкладки для пространств $L_\psi(T^m)$.

Поэтому мы ограничимся доказательством второго утверждения. Рассмотрим семейство функций

$$f_A(x) = A \operatorname{sign} \sin 2\pi x_1, \qquad A > 0 .$$

Для любого полинома T_R вида (17) имеем

$$\| f - T_R \|_{L_\psi(T^m)} = \int_{(x_2, \ldots, x_m) \in T^{m-1}} \left(\int_{x_1 = -1/2}^{1/2} \psi\left(|f_A(x) - T_R(x)| \right) dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_m .$$

Во внутреннем интеграле при фиксированных $(x_2, \ldots, x_m)$ функция $T_R(x)$ переменной x_1 есть полином некоторой степени; поэтому можно использовать (15):

$$\int_{x_1 = -1/2}^{1/2} \psi\left(|f_A(x) - T_R(x)| \right) dx_1 \geq \frac{1}{4} \psi(\delta A)$$

при всех достаточно малых $\delta > 0$.

Далее, легко подсчитать модуль непрерывности f_A: для любого $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\omega(f_A, h)_{L_\psi(T^m)} = \sup_{|t| \le h, t \in R^m} \| \Delta_t f_A \|_{L_\psi(T^m)} = \psi(2A)2h.$$

Осталось повторить выкладку (16).

Отметим, что в пространствах $L_p(\mathrm{T}^m)$, $0 < p < 1$, $m > 1$, теорема Джексона доказана в [7].

Автор выражает благодарность В. И. Иванову, указавшему на работу [6].

1. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 122 – 133.
2. *Стороженко Э. А., Освальд П., Кротов В. Г.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
3. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на эвклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 330 с.
5. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М.: Гостехиздат, 1954. – 328 с.
6. *Runovski K.* On Jackson's type inequalities in Orlicz classes // Revista Mat. Comp. – 2001. – **14**, № 2. – P. 394 – 404.
7. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathrm{T}^n)$, $0 < p < 1$ // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 4. – С. 888 – 901.

Получено 11.10.10,
после доработки — 10.10.11