УДК 517.5

В. В. Бабенко (Днепропетр. нац. ун-т)

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ФОРМУЛ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ, МОНОТОННЫХ ПО ВКЛЮЧЕНИЮ

The best interval quadrature formula is obtained for the class of convex set-valued functions defined on the segment $[0,1]$ and monotone with respect to inclusion.

Знайдено найкращу інтервальну квадратурну формулу на класі заданих на відрізку $[0,1]$ опуклозначних функцій, монотонних відносно включення.

В работе [1] решена задача о наилучшей квадратурной формуле на классе монотонно неубывающих функций $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ таких, что $f(0)=0$, $f(1)=1$. Задача о наилучшей интервальной квадратурной формуле на этом классе функций решена в работе [2]. В [3] решена задача оптимизации приближенного вычисления интегралов в смысле Хукухары [4] на классах заданных на $[0,1]$ многозначных функций, монотонных по включению, с помощью „точечных" квадратурных формул. Цель данной статьи — решение задачи оптимизации интервальных квадратурных формул на рассмотренных в [3] классах функций.

Мы будем использовать определения и факты, приведенные в [3]. Кратко опишем некоторые из них.

Через $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ обозначим совокупность непустых компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. Пусть $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, $A_i\neq\varnothing$ и $\alpha_i\geq 0$ для $i=\overline{1,n}$. Как обычно, положим

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iA_i=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\colon x_i\in A_i,\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Метрика Хаусдорфа в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ определяется соотношением

$$\delta(A,B)=\max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}|x-y|,\ \sup_{x\in B}\inf_{y\in A}|x-y|\right\},$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Точная постановка рассматриваемой нами задачи такова.

Пусть заданы множества $A,B\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ $(A\subset B)$. Через $M_{A,B}$ обозначим класс функций $f\colon[0;1]\longrightarrow\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, монотонных по включению (т. е. из $0\leq x_1<x_2\leq 1$ следует, что $f(x_1)\subset f(x_2)$) и таких, что $f(0)=A$, $f(1)=B$.

Для заданных чисел $n\in\mathbb{N}$ и $H\in(0,1)$ обозначим через $Q_{n,H}$ совокупность квадратурных формул вида

$$q(f)=C+\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{1}{|I_k|}\int\limits_{I_k}f(x)dx,\quad f\in M_{A,B},\tag{1}$$

где $C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, $c_k \geq 0$, $k = \overline{1,n}$, $\{I_k\}_{k=1}^n$ — совокупность содержащихся в $[0,1]$ отрезков, таких, что $\sum_{k=1}^n |I_k| \leq H$, $|I_k|$ — длина отрезка I_k.

Положим

$$R(M_{A,B}, q) = \sup_{f \in M_{A,B}} \delta\left(\int\limits_0^1 f(x)dx, q(f)\right),$$
$$R_{n,H}(M_{A,B}) = \inf_{q \in Q_{n,H}} R(M_{A,B}, q). \tag{2}$$

Задача о наилучшей на классе $M_{A,B}$ квадратурной формуле из $Q_{n,H}$ состоит в том, чтобы найти величину (2) и квадратурную формулу вида (1), реализующую точную нижнюю грань в правой части (2).

Теорема. *Среди всех квадратурных формул $q \in Q_{n,H}$ наилучшей на классе $M_{A,B}$ является формула*

$$q_{n,H}(f) = \frac{(1-H)}{2(n+1)}(A+B) + \frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1}\sum_{k=1}^n \frac{n}{H}\int\limits_{\overline{I}_k} f(x)dx,$$

где

$$\overline{I}_k = \left[k\frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1} - \frac{H}{n},\ \ k\frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1}\right], \quad k = \overline{1,n},$$

при этом

$$R_{n,H}(M_{A,B}) = R(M_{A,B}, q_{n,H}) =$$
$$= \sup_{f \in M_{A,B}} \delta\left(\int\limits_0^1 f(x)dx, q_{n,H}(f)\right) = \frac{1-H}{2(n+1)}\delta(A,B).$$

Доказательство. Нам понадобится следующий факт об интегралах от монотонных функций (см. [3], утверждение 5):

$$f(a)(b-a) \subset \int\limits_a^b f(x)dx \subset f(b)(b-a). \tag{3}$$

Далее для сокращения записей положим $l = H/(2n)$ $x_k = -\dfrac{H}{2n} + k\dfrac{1+H/n}{n+1} = \left[-l + k\dfrac{1+2l}{n+1}\right]$, $k = \overline{1,n}$.

Учитывая аддитивность интеграла (см. [3], утверждение 4), для $f \in M_{A,B}$ имеем

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_{x_0+l}^{x_1+l} f(x)dx + \int\limits_{x_1+l}^{x_2+l} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}+l}^{x_n+l} f(x)dx + \int\limits_{x_n+l}^{1} f(x)dx.$$

Для $k = \overline{0, n-1}$, используя (3), получаем

$$\int\limits_{x_k+l}^{x_{k+1}+l} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{x_k+l}^{x_{k+1}-l} f(x)dx + \int\limits_{x_{k+1}-l}^{x_{k+1}+l} f(x)dx \subset f(x_{k+1}-l)\frac{1-H}{n+1} + \int\limits_{x_{k+1}-l}^{x_{k+1}+l} f(x)dx \subset$$

$$\subset \frac{n}{H}\frac{1-H}{n+1}\int\limits_{\overline{I}_{k+1}} f(x)dx + \int\limits_{\overline{I}_{k+1}} f(x)dx = \frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1}\frac{n}{H}\int\limits_{\overline{I}_{k+1}} f(x)dx.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{x_n+l}^{1} f(x)dx \subset \frac{1-H}{n+1}B.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \subset \frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\overline{I}_k} f(x)dx + B\frac{1-H}{n+1}.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \supset \frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{H}\int\limits_{\overline{I}_k} f(x)dx + A\frac{1-H}{n+1}.$$

Таким образом,

$$A\frac{1-H}{n+1} + \frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{H}\int\limits_{\overline{I}_k} f(x)dx \subset \int\limits_0^1 f(x)dx \subset$$

$$\subset B\frac{1-H}{n+1} + \frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{H}\int\limits_{\overline{I}_k} f(x)dx. \qquad (4)$$

В [3] доказано, что если $X, Y, Z \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ и $X \subset Y \subset Z$, то

$$\delta\left(Y, \frac{X+Z}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\delta(X, Z).$$

Отсюда и из (4) выводим

$$\delta\left(\int\limits_0^1 f(x)dx, \frac{1-H}{2(n+1)}(A+B) + \frac{1+\dfrac{H}{n}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{H}\int\limits_{\overline{I}_k} f(x)dx\right) \leq$$

$$\leq \frac{1-H}{2(n+1)}\delta(A,B).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$R_{n,H}(M_{A,B}) \leq R(M_{A,B};q_{n,H}) \leq \frac{1-H}{2(n+1)}\delta(A,B). \tag{5}$$

Теперь покажем, что для произвольной квадратурной формулы вида (1)

$$R(M_{A,B},q) = \sup_{f\in M_{A,B}} \delta\left(\int_0^1 f(x)dx, q(f)\right) \geq \frac{1-H}{2(n+1)}\delta(A,B).$$

Отсюда и из (5) следует утверждение теоремы.

Рассмотрим множество $[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Поскольку $\sum_{k=1}^{n}|I_k| \leq H$, это множество будет содержать интервал (a,b), длина которого не меньше чем $\dfrac{1-H}{n+1}$. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} A, & x \leq a, \\ B, & x > a, \end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(x) = \begin{cases} A, & x < b, \\ B, & x \geq b. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^1 f_1(x)dx = Aa + B(1-a), \qquad \int_0^1 f_2(x)dx = Ab + B(1-b)$$

и

$$q(f_1) = q(f_2).$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in M_{A,B}} \delta\left(\int_0^1 f(x)dx, q(f)\right) \geq$$

$$\geq \max\left\{\delta\left(\int_0^1 f_1(x)dx, q(f_1)\right),\ \delta\left(\int_0^1 f_2(x)dx, q(f_2)\right)\right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left\{\delta\left(\int_0^1 f_1(x)dx,\ q(f_1)\right) + \delta\left(\int_0^1 f_2(x)dx, q(f_2)\right)\right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\delta\left(\int_0^1 f_1(x)dx, \int_0^1 f_2(x)dx\right) = \frac{1}{2}\delta(Aa + B(1-a), Ab + B(1-b)).$$

Для множеств $C, D \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ положим $e(C,D) = \sup_{x\in C}\inf_{y\in D}|x-y|$, так что $\delta(C,D) = \max(e(C,D), e(D,C))$.

Рассмотрим $e(Aa+B(1-a), Ab+B(1-b))$. Используя теорему двойственности (см., например, [5], теорема 2.3.1), имеем

$$e(Aa+B(1-a), Ab+B(1-b)) =$$

$$= \sup_{z\in Aa+B(1-a)} \sup_{||f||\le 1} \left\{ f(z) - \sup_{w\in(Ab+B(1-b))} f(w) \right\} =$$

$$= \sup_{||f||\le 1} \left\{ \sup_{x\in A, y\in B} (af(x)+(1-a)f(y)) - \sup_{u\in A, v\in B} (bf(u)+(1-b)f(v)) \right\} =$$

$$= \sup_{||f||\le 1} \left(a\sup_{x\in A} f(x) + (1-a)\sup_{y\in B} f(y) - b\sup_{x\in A} f(x) - (1-b)\sup_{x\in B} f(y) \right) =$$

$$= \sup_{||f||\le 1} ((a-b)\sup_{x\in A} f(x) + (b-a)\sup_{y\in B} f(y)) =$$

$$= (b-a)\sup_{y\in B} \sup_{||f||=1} (f(y) - \sup_{x\in A} f(x)) = (b-a)e(B,A).$$

Поскольку $A\subset B$, нетрудно проверить, что

$$Ab+B(1-b)\subset Aa+B(1-a))$$

и, следовательно, $e(A,B)=0$, так что $\delta(Aa+B(1-a), Ab+B(1-b)) = e(B,A) = \delta(A,B)$.

Таким образом, для любой квадратурной формулы $q\in Q_{n,H}$

$$\sup_{f\in M_{A,B}} \delta\left(\int_0^1 f(x)dx, q(f) \right) \ge \frac{1}{2}(b-a)\delta(A,B) \ge \frac{1-H}{2(n+1)}\delta(A,B).$$

Теорема доказана.

1. *Kiefer J.* Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1957. – **5**, № 3. – P. 105 – 136.
2. *Бабенко В. Ф., Бородачев С. В.* Об оптимизации кубатурных монотонных функций нескольких переменных // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2002. – Вип. 7. – С. 3 – 7.
3. *Бабенко В. Ф., Бабенко В. В.* Оптимизация приближенного интегрирования многозначных функций, монотонных по включению // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 147 – 155.
4. *Hukuhara M.* Integration des Applicaitons Mesurables dont la Valeur est un Compact Convexe // Funkc. ekvacioj. – 1967. – **10**. – P. 205 – 223.
5. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 01.07.11