УДК 517. 5

С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

In the spaces $L_\psi(T)$ of periodic functions with metric $\rho(f,0)_\psi = \int_T \psi(|f(x)|)\,dx$, where ψ is a function of the modulus-of-continuity type, we investigate analogs of the classic Bernstein inequalities for the norms of derivatives and increments of trigonometric polynomials.

У просторах $L_\psi(T)$ періодичних функцій з метрикою $\rho(f,0)_\psi = \int_T \psi(|f(x)|)\,dx$, де ψ — функція типу модуля неперервності, досліджено аналоги класичних нерівностей Бернштейна для норм похідних та приростів тригонометричних поліномів.

1. Введение. Данная статья является продолжением работ [1, 2]. Все основные обозначения и понятия см. в [2].

Для действительнозначных функций $f(x)$, $x \in R^1$, имеющих период 1, $L_0 \equiv \equiv L_0(T)$ — множество измеримых и почти всюду конечных функций на торе периодов $T = [0,1]$; Ω — множество функций $\psi : R^1_+ \to R^1_+$, являющихся модулем непрерывности;

$$L_\psi = L_\psi(T) = \left\{ f \in L_0(T) : \|f\|_\psi = \int\limits_T \psi(|f(x)|)\,dx < \infty \right\}$$

— метрические пространства (в случае $\psi \in \Omega$).

В этих пространствах рассмотрим подпространства $\tilde{T}^{2n+1}$ тригонометрических полиномов $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i2\pi kx}$, $c_{-k} = \overline{c}_k$, и линейные операторы A: $\tilde{T}^{2n+1} \to \tilde{T}^{2n+1}$. Мы будем изучать нормы этих полиномиальных операторов, т. е. величины

$$\|A\|_{\psi,n} := \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\|AT_n\|_\psi}{\|T_n\|_\psi}. \tag{1}$$

При этом нас в первую очередь интересуют аналоги классических неравенств типа Бернштейна для производных и приращений полиномов; этим обусловлен выбор классов операторов A, которые мы изучаем.

Исследованию таких неравенств в нормированных пространствах посвящено много работ (см., например, монографии [3, 4]). Отметим только, что в метрических пространствах L_p, $p \in (0,1)$, точные по порядку неравенства Бернштейна для производных $T_n'(x)$

$$\|T_n'(x)\|_p \ \le \ Cn^p \, \|T_n\|_p \tag{2}$$

и приращений $\Delta_h T_n(x) \ = \ T_n\left(x+\frac{h}{2}\right) - T_n\left(x-\frac{h}{2}\right)$

$$\|\Delta_h T_n\|_p \ \le \ C(nh)^p \, \|T_n\|_p, \qquad 0 < nh \le \frac{1}{2}, \tag{3}$$

доказаны в [5, 6], а в работе [7], в частности, найдена точная константа в (2).

В настояшей работе получены аналоги неравенств (2), (3) в пространствах L_ψ. Приложению этих результатов к исследованию обратных теорем Джексона в пространствах L_ψ будет посвящена отдельная статья.

2. Интерполяционная формула. Отметим одно важное предположение относительно операторов A. Всюду в дальнейшем (и это не будет оговариваться отдельно) изучаются операторы A, которые определяются множителями $\{\lambda_k \in C;\ |k| \le n\}$, $\overline{\lambda_k} = \lambda_{-k}$, по формуле

$$A\left(\sum_{|k|\le n} c_k e^{i2\pi kx}\right) \ = \ \sum_{|k|\le n} \lambda_k c_k e^{i2\pi kx}.$$

Очевидно, что каждый такой оператор A перестановочен со сдвигом; это означает, что $\tau_t A = A\tau_t$ для всех операторов τ_t сдвига на параметр t.

Введем еще аналоги классических полиномов (ядер) Валле Пуссена (см., например, [3]).

Обозначим через $P\Sigma$ класс функций $\alpha : R \to R$ таких, что:

1) $\alpha(s) = 1$ для $s \in [-1, 1]$; $\alpha(s) = 0$ для $|s| \ge 2$;

2) $\alpha(-s) = \alpha(s)$;

3) $\alpha \in C(R)$.

Каждая функция α этого класса порождает тригонометрический полином

$$V_n(x) \ \equiv \ V_n(x;\alpha) \ := \ \sum_{|k|<2n} \alpha\left(\frac{k}{n}\right) e^{i2\pi kx} \tag{4}$$

степени не выше $2n-1$.

Для оператора A, первоначально заданного на полиномах степени n, будем использовать его продолжение на полиномы степени $2n$ по правилу

$$\lambda_{n+k} \ := \ \lambda_{n-k}; \quad \lambda_{-(n+k)} \ := \ \overline{\lambda_{n+k}} \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Для вновь полученного оператора с множителями $\{\lambda_k;\ |k| \le 2n\}$ сохраним прежнее обозначение A.

Наши оценки норм операторов A базируются на следующей интерполяционной формуле.

Теорема 1. *Для любого полинома* $T_n \in \tilde{T}^{2n+1}$ *и всех* $x, t \in R$ *справедливо соотношение*

$$AT_n(x+t) \;=\; \frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{3n} T_n(t+x_j)AV_n(x-x_j)\,, \tag{6}$$

где $x_j = \dfrac{j}{3n}$ *— система равноотстоящих точек на периоде* $T=[0,1]$, V_n *определены в* (4), $\alpha \in P\Sigma$, *а значения* AV_n *определяются с помощью* (5).

Доказательство. Для полинома T_n справедливо интегральное представление

$$T_n(x) = \int_T T_n(u)\cdot V_n(x-u)du$$

(это следует из того, что $\alpha(s)=1$ при $|s|\le 1$). Подынтегральная функция есть полином степени не выше $3n-1$. Для вычисления интеграла используем квадратурную формулу прямоугольников с $3n$ узлами, точную на полиномах степени $3n-1$:

$$T_n(x) = \frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{3n} T_n(x_j)V_n(x-x_j)\,.$$

Поскольку это соотношение справедливо для любого полинома, применим его для $\tau_t T_n$:

$$\tau_t T_n(x) \;=\; \frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{3n} T_n(t+x_j)V_n(x-x_j)\,. \tag{7}$$

Подействуем оператором A на обе части (7) и получим (6).

3. Оценки нормы фиксированного оператора. Для заданной функции типа модуля непрерывности ψ определим ее функцию растяжения $M_\psi(s)$, $s\in(0,\infty)$ [8]:

$$M_\psi(s) \;=\; \sup_{0<t<\infty}\frac{\psi(st)}{\psi(t)}\,.$$

Очевидно, что

$$\psi(st) \;\le\; \psi(s)\,M_\psi(t)\,. \tag{8}$$

Теорема 2. *При любой* $\psi\in\Omega$ *в пространстве* L_ψ *для нормы оператора* A *имеют место двусторонние неравенства*

$$\frac{1}{2M_\psi(\sqrt{2})}M_\psi\left(\max_{k\le n}|\lambda_k|\right) \;\le\; \|A\|_{\psi,n} \;\le\; \inf_{\alpha\in P\Sigma} 3n\int_T M_\psi\left(\frac{1}{3n}|AV_n(x)|\right)dx\,. \tag{9}$$

Доказательство. Для оценки сверху используем теорему 1.

Из полуаддитивности ψ, (6) и (8) следует

$$\psi\left(|AT_n(x+t)|\right) \;\le\; \sum_{j=1}^{3n}\psi\left(|T_n(t+x_j)|\right)M_\psi\left(\left|\frac{1}{3n}AV_n(x-x_j)\right|\right).$$

Используя инвариантность по сдвигу ψ-метрики, отсюда получаем правую часть (9):

$$\|AT_n\|_\psi = \int_{x\in T}\int_{t\in T} \psi\left(|AT_n(x+t)|\right) dtdx \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{3n} \int_{t\in T} \psi\left(\left|T_n(t+x_j)\right|\right) dt \int_{x\in T} M_\psi\left(\frac{1}{3n}\left|AV_n(x-x_j)\right|\right) dx =$$

$$= \|T_n\|_\psi \, 3n \int_{x\in T} M_\psi\left(\frac{1}{3n}|AV_n(x)|\right) dx.$$

Для доказательства нижней оценки в (9) рассмотрим полином

$$p_k(x) = \cos(2\pi kx), \qquad k = 0,1,\ldots,n.$$

Пусть $k \ne 0$, $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\phi_k}$. Тогда

$$Ap_k(x) = \frac{1}{2} A(e^{2\pi ikx} + e^{-2\pi ikx}) = \frac{1}{2}\left(|\lambda_k| e^{i(2\pi kx+\phi_k)} + |\lambda_k| e^{-i(2\pi kx+\phi_k)}\right) =$$

$$= |\lambda_k| \cos(2\pi kx + \phi_k),$$

$$\|Ap_k\|_\psi = \int_0^1 \psi\left(|\lambda_k||\sin 2\pi x|\right) dx \ge 2\int_{1/8}^{3/8} \psi\left(|\lambda_k||\sin 2\pi x|\right) dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\psi\left(|\lambda_k|\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Если же $k = 0$, то $\|Ap_k\|_\psi = \psi\left(|\lambda_0|\right) \ge \frac{1}{2}\psi\left(|\lambda_0|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Теперь в оценке снизу используем семейство полиномов $\left\{\delta p_k(x);\ k = 0,1,\ldots,n;\ \delta > 0\right\}$:

$$\|A\|_{\psi,n} \ge \sup_{\{\delta p_k(x)\}} \frac{\|A\delta p_k\|_\psi}{\|\delta p_k\|_\psi} \ge \sup_{\delta>0} \max_{0\le k\le n} \frac{\frac{1}{2}\psi\left(\delta|\lambda_k|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\psi(\delta)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sup_{\delta>0} \frac{\psi\left(\delta \max_{k\le n}|\lambda_k|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\psi(\delta)} = \frac{1}{2} M_\psi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\max_{k\le n}|\lambda_k|\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2M_\psi(\sqrt{2})} M_\psi\left(\max_{k\le n}|\lambda_k|\right).$$

На последнем этапе использовано свойство $M_\psi(xy) \le M_\psi(x) M_\psi(y)$.

Теорема 2 доказана.

Поскольку оператор A однозначно определяется множителями $\{\lambda_k;\,|k|\le n\}$, оценки его норм желательно получить в терминах $\{\lambda_k\}$. В этом смысле правую оценку (9) еще нельзя считать „хорошей". Мы продвинемся дальше в оценках сверху норм операторов, накладывая некоторые дополнительные ограничения как на операторы, так и на ψ-метрики.

4. Оценка норм последовательностей операторов. Напомним [8], что поведение функции растяжения M_ψ для $\psi\in\Omega$ в правой окрестности нуля характеризуется так называемым нижним показателем растяжения γ_ψ, имеющим свойства:

а) $\gamma_\psi\in[0,1]$;

б) $M_\psi(s)\ge s^{\gamma_\psi}$ $\forall s\in(0,1]$;

в) для любых $\varepsilon>0$ и $s\in(0,1]$ с некоторой константой C_ε $M_\psi(s)\le C_\varepsilon s^{\gamma_\psi-\varepsilon}$.

Отсюда следует, в частности, что в случае $\gamma_\psi=0$ $M_\psi(s)\equiv 1$ для $s\in[0,1]$, а при $\gamma_\psi>0$ $M_\psi(+0)=0$.

В этом пункте исследуем последовательности операторов $\{A_n;\,n=1,2,\dots\}$, образованные по следующему правилу: задана некоторая функция $\mu(s):R\to C$, $\mu(-s)=\overline{\mu(s)}$, и оператор A_n, $n=1,2,\dots$, действующий на $\tilde T^{2n+1}$, определяется множителями $\lambda_k:=\mu(k)$, $|k|\le n$. Для последовательности таких операторов нет необходимости в процедуре их продолжения (5), и оценка сверху (9) принимает вид

$$\|A_n\|_{\psi,n}\;\le\;\inf_{\alpha\in P\Sigma}3n\int_T M_\psi\left(\frac{1}{3n}\left|\sum_{|k|<2n}\beta_n\left(\frac{k}{n}\right)e^{i2\pi kx}\right|\right)dx\,,\tag{10}$$

где $\beta_n(s):=\mu(ns)\,\alpha(s)$.

В дальнейшем ограничимся гладкими функциями $\alpha\in P\Sigma\bigcap C^\infty(R)$ и локально интегрируемыми функциями μ. В этом случае преобразование Фурье функции β_n,

$$\hat\beta_n(x)\;=\;\int_R\beta_n(s)e^{-i2\pi sx}ds\,,$$

является функцией, интегрируемой на оси.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_\psi>0$, *а функция* $\mu(s)$ *такова, что для данного* n *найдутся* $\alpha\in P\Sigma\bigcap C^\infty(R)$, $\delta>0$ *и константа* $K(n,\delta)$ *такие, что для* $x\in R$ *выполнено неравенство*

$$\left|\hat\beta_n(x)\right|\;\le\;\frac{K(n,\delta)}{\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{\gamma_\psi}+\delta}}\,.\tag{11}$$

Тогда для нормы соответствующего оператора A_n *справедлива оценка*

$$\| A_n \|_{\psi,n} \le 3M_\psi\left(\frac{1}{3}\right)\int\limits_R M_\psi\left(\left|\hat{\beta}_n(x)\right|\right)dx . \qquad (12)$$

Доказательство. По формуле суммирования Пуассона (см., например, [9])

$$\sum_{|k|\le 2n} \beta_n\left(\frac{k}{n}\right)e^{i2\pi kx} = \sum_{j\in Z} n\hat{\beta}_n(n(x-j)),$$

при этом ряд справа равномерно сходится благодаря условию (11).

Поскольку $\gamma_\psi > 0$, из (11) и свойства в) для функции растяжения при подходящем выборе ε следуют равномерная сходимость ряда

$$\sum_{j\in Z} M_\psi\left(\frac{1}{3}\left|\hat{\beta}_n(n(x-j))\right|\right)$$

и сходимость интеграла

$$\int\limits_R M_\psi\left(\left|\hat{\beta}_n(x)\right|\right)dx .$$

Так как ψ полуаддитивна, из определения M_ψ видно, что функция M_ψ также полуаддитивна. Поэтому

$$M_\psi\left(\frac{1}{3n}\left|\sum_{|k|\le 2n}\beta_n\left(\frac{k}{n}\right)e^{i2\pi kx}\right|\right) \le \sum_{j\in Z} M_\psi\left(\frac{1}{3}\left|\hat{\beta}_n(n(x-j))\right|\right). \qquad (13)$$

Теперь из (10) и (13) следует, что

$$\| A_n \|_{\psi,n} \le 3n\sum_{j\in Z}\int\limits_T M_\psi\left(\frac{1}{3}\left|\hat{\beta}_n(n(x-j))\right|\right)dx = 3\int\limits_R M_\psi\left(\frac{1}{3}\left|\hat{\beta}_n(x)\right|\right)dx \le$$

$$\le 3M_\psi\left(\frac{1}{3}\right)\int\limits_R M_\psi\left(\left|\hat{\beta}_n(x)\right|\right)dx .$$

Теорема 3 доказана.

Известно (см., например, [9]), что если функция f из $L_1(R)$ такова, что функции $f, f', \ldots, f^{(l-1)}$ абсолютно непрерывны на каждом конечном интервале $(l \in N)$, а $f^{(l)} \in L_1(R)$, то для всех $x \in R$ выполняется неравенство

$$\left|\hat{f}(x)\right| \le \frac{K'}{(1+|x|)^l} .$$

Таким образом, благодаря тому, что α — бесконечно дифференцируемая функция с конечным носителем, для выполнения неравенства (11) можно указать достаточные условия в терминах гладкости функции μ.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, *а функция* μ *на отрезке* $[-2n, 2n]$

абсолютно непрерывна вместе со своими производными $\mu', \mu'', \ldots, \mu^{\left[1/\gamma_\psi\right]+1}$. *Тогда для этого значения n выполняется неравенство* (12).

Из этого факта легко следует аналог неравенств Бернштейна.

Следствие 2. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$ *и* $r \in N$. *Тогда имеют место неравенства*

$$C_1(r) M_\psi(n^r) \leq \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\left\| T_n^{(r)} \right\|_\psi}{\| T_n \|_\psi} \leq C_2(r) M_\psi(n^r) \qquad (14)$$

с константами $C_1(r)$, $C_2(r)$, *не зависящими от* n.

Доказательство. Функция $\mu(s) = (i2\pi s)^r$ принадлежит $C^\infty(R)$, поэтому для оценки сверху можно использовать (12).

Далее, так как $\mu(s)$ – однородная функция степени r, то

$$\beta_n(s) = \mu(ns)\,\alpha(s) = n^r \mu(s)\,\alpha(s),$$

$$\left|\hat{\beta}_n(x)\right| = n^r \left|\widehat{(i2\pi x)^r \alpha(x)}\right|,$$

$$\left\| T_n^{(r)} \right\|_\psi \leq \| T_n \|_\psi \cdot 3 M_\psi\left(\frac{1}{3}\right) \int_R M_\psi\left(\left|\widehat{(i2\pi x)^r \alpha(x)}\right|\right) dx\, M_\psi(n^r).$$

Оценка снизу следует из (9).

Следствие 3. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$ *и* $nh \in (0, 1/2]$. *Тогда для* $k \in N$ *имеют место неравенства*

$$C_1(k) M_\psi((nh)^k) \leq \sup_{T_n \in T^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\left\| \Delta_h^k T_n \right\|_\psi}{\| T_n \|_\psi} \leq C_2(k) M_\psi((nh)^k) \qquad (15)$$

с константами $C_1(k)$, $C_2(k)$, *не зависящими от* n *и* h.

Доказательство. Для всех $k \in N$ рассуждения одинаковые, поэтому для простоты ограничимся случаем $k = 1$.

Функция $\mu(s) = 2i \sin(\pi h s)$ принадлежит $C^\infty(R)$, и по следствию 1

$$\| \Delta_h T_n \|_\psi \leq \| T_n \|_\psi \cdot 3 M_\psi\left(\frac{1}{3}\right) \int_R M_\psi\left(\left|\hat{\beta}_n(x)\right|\right) dx.$$

Поскольку $\hat{\beta}_n(x) = \widehat{(\mu(n\cdot)\,\alpha(\cdot))}(x) = \Delta_{nh} \hat{\alpha}(x)$, то

$$\int_R M_\psi\left(\left|\hat{\beta}_n(x)\right|\right) dx \leq M_\psi(nh) \int_R M_\psi\left(\frac{\left|\Delta_{nh} \hat{\alpha}(x)\right|}{nh}\right) dx,$$

и для оценки сверху осталось показать, что функция

$$\Phi(y) := \int_R M_\psi\left(\frac{\left|\Delta_y \hat{\alpha}(x)\right|}{y}\right) dx$$

равномерно ограничена для $y \in [0, 1/2]$. Вследствие того, что $\Phi(y)$ непрерывна при $y > 0$, достаточно доказать существование конечного предела $\Phi(y)$ при $y \to 0$.

Так как финитная функция $(iy)^2 \alpha(y) \in C^\infty$, ее преобразование Фурье, равное $D^2 \hat{\alpha}(x)$, убывает на бесконечности быстрее любой степени:

$$\left| D^2 \hat{\alpha}(x) \right| \le \frac{C_N}{\left(1 + |x|\right)^N} .$$

Тогда по формуле Тейлора для некоторой точки $\xi \in [x, x + y]$ имеем

$$\left| \frac{\Delta_y \hat{\alpha}(x)}{y} - D\hat{\alpha}(x) \right| = \frac{1}{2} y \left| D^2 \hat{\alpha}(\xi) \right| \le \frac{C_N' y}{\left(1 + |\xi|\right)^N} \le \frac{C_N' y}{\left(1 + |x|\right)^N} ,$$

$$\int_R M_\psi \left(\left| \frac{\Delta_y \hat{\alpha}(x)}{y} - D\hat{\alpha}(x) \right| \right) dx \le M_\psi(C_N') M_\psi(y) \int_R M_\psi \left(\frac{1}{\left(1 + |x|\right)^N} \right) dx . \quad (16)$$

Поскольку $\gamma_\psi > 0$, при достаточно больших N интеграл в правой части (16) конечен, а $M_\psi(y) \to 0$ при $y \to 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{y \to 0} \Phi(y) = \int_R M_\psi \left(\left| D\hat{\alpha}(x) \right| \right) dx < \infty ,$$

и оценка сверху в (15) доказана. Оценка снизу следует из (9).

Аналогично доказывается и следующий более общий факт.

Теорема 4. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, $k = 0, 1, \ldots,$ $r = 0, 1, \ldots,$ $nh \in (0, 1/2]$. *Тогда имеют место неравенства*

$$C_1(k, r) M_\psi(n^{r+k} h^k) \le \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\left\| \Delta_h^k T_n^{(r)} \right\|_\psi}{\| T_n \|_\psi} \le C_2(k, r) M_\psi(n^{r+k} h^k) , \quad (17)$$

$$C_3 M_\psi \left(\max_{|k| \le n} \left(|k|^r \left| \frac{\sin \pi k h}{k} - \pi k \right| \right) \right) \le \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\left\| \left(\frac{\Delta_h}{h} - D \right) T_n^{(r)} \right\|_\psi}{\| T_n \|_\psi} \le$$

$$\le C_4 M_\psi \left(\max_{|k| \le n} \left(|k|^r \left| \frac{\sin \pi k h}{k} - \pi k \right| \right) \right) . \quad (18)$$

Заметим еще, что правые оценки в (17), (18) справедливы при всех $h \in (0, 1/2]$.

5. Неравенства для производных и приращений в случае $\gamma_\psi = 0$. Заметим, что оценки снизу в (14), (15), (17) остаются справедливыми и в случае $\gamma_\psi = 0$. С другой стороны, очевидно, что $\left\| \Delta_h^k T_n \right\|_\psi \le 2^k \| T_n \|_\psi$.

Вследствие того, что при $\gamma_\psi = 0$ $M_\psi(y) \ge 1$ для всех $y > 0$, из оценки снизу в (15) непосредственно вытекает следующий факт.

Утверждение 1. *В любом пространстве* L_ψ *при* $\gamma_\psi = 0$ *найдутся константы* $C_k > 0$ *такие, что для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливы соотношения*

$$2^k \;\geq\; \varliminf_{h\to 0} \sup_{T_n\in \tilde{T}^{2n+1}, T_n\neq 0} \frac{\left\| \Delta_h^k T_n \right\|_\psi}{\| T_n \|_\psi} \;\geq\; C_k \;>\; 0\,. \qquad (19)$$

Таким образом, утверждение 1 означает, что неравенств Бернштейна для приращений в форме, аналогичной (3), в пространствах L_ψ в случае $\gamma_\psi = 0$ нет.

А вот ситуация с неравенствами для производных иная: условие $\gamma_\psi = 0$ не исключает наличия неравенств типа (2). Отметим работу [7], в которой, в частности, доказаны точные неравенства

$$\sup_{T_n\in \tilde{T}^{2n+1}, T_n\neq 0} \frac{\int_T \psi\left(|T_n'(t)|\right) dt}{\int_T \psi\left(|T_n(t)|\right) dt} \;=\; \frac{\int_T \psi\left(2\pi n |\sin(2\pi t)|\right) dt}{\int_T \psi\left(|\sin(2\pi t)|\right) dt} \qquad (20)$$

для всех функций ψ из класса Φ функций, неубывающих на $(0, \infty)$, абсолютно непрерывных на каждом отрезке $[a, b] \subset (0, \infty)$ и таких, что функция $x\psi'(x)$ не убывает на $(0, \infty)$.

В частности, функция $\psi(x) = \ln(1 + x)$, определяющая пространство $\ln(1 + L)$, принадлежит классу $\Phi \cap \Omega$, и для нее $\gamma_\psi = 0$.

Мы не смогли найти точные по порядку неравенства Бернштейна для производных во всех пространствах L_ψ с условием $\gamma_\psi = 0$. Однако, мы ниже укажем класс пространств L_ψ, в которых удалось доказать неравенства для производных даже с точными константами. Этому классу, в частности, принадлежит наряду с пространством $\ln(1 + L)$ еще и пространство L_0 с метрикой

$$\| f \|_0 \;:=\; \int_T \phi\left(|f(x)|\right) dx\,, \qquad \phi(x) \;=\; \frac{x}{1+x}\,, \qquad x > 0\,,$$

порождающей сходимость по мере. Отметим, что $\gamma_\varphi = 0$.

Но сначала приведем одну общую оценку норм операторов в произвольных пространствах L_ψ.

Обозначим $I_n \;:=\; \sup_{T_n\in \tilde{T}^{2n+1}, T_n\neq 0} \dfrac{\| T_n \|_C}{\| T_n \|_{L_1}}$. Известно [10], что $n + 1 \leq I_n \leq 2n + 1$.

Пусть, как и ранее, для фиксированного n $A : \tilde{T}^{2n+1} \to \tilde{T}^{2n+1}$ — оператор с множителями $\left\{ \lambda_k ;\, |k| \leq n \right\}$ и $\| A \|_{1\to 1} \;:=\; \sup_{T_n\in \tilde{T}^{2n+1}, T_n\neq 0} \dfrac{\| A T_n \|_1}{\| T_n \|_1}$.

Обозначим еще через $\overline{\Omega}$ класс всех выпуклых вверх модулей непрерывности $\psi : R^+ \to R^+$.

Теорема 5. *Пусть* $\psi \in \overline{\Omega}$. *Тогда выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2M_\psi(\sqrt{2})} M_\psi\left(\max_{|k|\le n}|\lambda_k|\right) \le \|A\|_{\psi,n} \le I_n M_\psi\left(\frac{\|A\|_{1\to 1}}{I_n}\right). \tag{21}$$

Доказательство. Оценка снизу содержится в теореме 2. Для оценки сверху используем неравенство Йенсена для ψ:

$$\|AT_n\|_\psi = \int_T \psi\left(|AT_n(x)|\right) dx \le \psi\left(\int_T |AT_n(x)|\, dx\right) =$$

$$= \psi\left(\|AT_n\|_1\right) \le \psi\left(\|A\|_{1\to 1}\|T_n\|_1\right). \tag{22}$$

Из выпуклости вверх ψ следует, что функция $\dfrac{\psi(x)}{x}$ убывающая. Поэтому

$$\frac{\psi\left(|T_n(x)|\right)}{|T_n(x)|} \ge \frac{\psi\left(\|T_n\|_C\right)}{\|T_n\|_C} \ge \frac{\psi\left(I_n\|T_n\|_1\right)}{I_n\|T_n\|_1},$$

$$\|T_n\|_\psi = \int_T \psi\left(|T_n(x)|\right) dx \ge \int_T |T_n(x)| \frac{\psi\left(I_n\|T_n\|_1\right)}{I_n\|T_n\|_1} dx = I_n^{-1}\psi\left(I_n\|T_n\|_1\right). \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует (21):

$$\frac{\|AT_n\|_\psi}{\|T_n\|_\psi} \le \frac{\psi\left(\|A\|_{1\to 1}\|T_n\|_1\right)}{I_n^{-1}\psi\left(I_n\|T_n\|_1\right)},$$

$$\|A\|_{\psi,n} \le I_n \sup_{0<s<\infty} \frac{\psi\left(\|A\|_{1\to 1}\, s\right)}{\psi(I_n s)} = I_n M_\psi\left(\frac{\|A\|_{1\to 1}}{I_n}\right).$$

Теорема 5 доказана.

Если ψ из Ω не является выпуклой вверх, то для наименьшей выпуклой вверх мажоранты $\overline{\psi}$ по лемме Стечкина (см., например, [11])

$$\psi(x) \le \overline{\psi}(x) \le 2\psi(x).$$

Тогда после очевидных изменений в доказательстве получим для случая произвольной ψ из Ω следующую оценку сверху:

$$\|A\|_{\psi,n} \le 4 I_n M_\psi\left(\frac{\|A\|_{1\to 1}}{I_n}\right). \tag{24}$$

Введем класс пространств, для которого мы сможем уточнить неравенства (21).

Определение. *Будем говорить, что* ψ *принадлежит классу* $\overline{\Omega}_1$, *если* $\psi: R^+ \to R^+$ *— выпуклый вверх модуль непрерывности и выполняется асимптотическое равенство*

$$\psi(x) \approx x \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{25}$$

Теорема 6. *Если* $\psi \in \overline{\Omega}_1$, *то выполняются неравенства*

$$\max_{|k|\le n} |\lambda_k| \;\le\; \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1},\, T_n \ne 0} \frac{\|AT_n\|_\psi}{\|T_n\|_\psi} \;\le\; \max\left\{ I_n;\, \|A\|_{1\to 1} \right\}. \tag{26}$$

В частности, для любого $r \ge 1$ (*не обязательно целого*) *при всех* $n \ge 1$

$$\sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1},\, T_n \ne 0} \frac{\left\|T_n^{(r)}\right\|_\psi}{\|T_n\|_\psi} \;=\; (2\pi n)^r. \tag{27}$$

Доказательство. Докажем сначала оценку снизу. Поскольку $\dfrac{\psi(x)}{x}\downarrow$, то

$$\frac{\psi(x)}{x} \;\le\; \lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{x} \;=\; 1,$$

т. е. $\psi(x) \le x$. Поэтому $\|T_n\|_\psi \le \|T_n\|_1$.

Рассмотрим полиномы $\delta p_k(x) = \delta \cos(2\pi k x)$, $\quad k = 0, 1, \ldots, n$, $\quad \delta > 0$. Тогда

$$\frac{\|A(\delta p_k)\|_\psi}{\|\delta p_k\|_\psi} \;\ge\; \|\cos(2\pi x)\|_1^{-1} \int_T \frac{\psi\left(\delta|\lambda_k||\cos(2\pi x)|\right)dx}{\delta},$$

$$\|A\|_{\psi,n} \;\ge\; \|\cos(2\pi x)\|_1^{-1} \lim_{\delta\to 0} \int_T \frac{\psi\left(\delta|\lambda_k||\cos(2\pi x)|\right)dx}{\delta}.$$

Использовав теорему Лебега о мажорированной сходимости, осуществим предельный переход под знаком интеграла. Учитывая (25), получаем оценку снизу.

Теперь покажем, что для любой ψ из $\overline{\Omega}_1$

$$M_\psi(y) \;=\; y \qquad \forall y \ge 1. \tag{28}$$

Тогда оценка сверху будет следовать из (21). Из (25) следует, что

$$M_\psi(y) \;=\; \sup_{s>0} \frac{\psi(sy)}{\psi(s)} \;\ge\; \lim_{s\to 0} \frac{\psi(sy)}{\psi(s)} \;=\; y. \tag{29}$$

С другой стороны, так как $\dfrac{\psi(x)}{x}\downarrow$, то при $y \ge 1$

$$\frac{\psi(sy)}{\psi(s)} \;=\; y\,\frac{\psi(sy)/sy}{\psi(s)/s} \;\le\; y,$$

поэтому $M_\psi(y) \le y$. Отсюда и из (29) следует (28).

Теорема 6 доказана.

6. Неравенства для полиномов в разных метриках. Порядок роста величины

$$C(n; r; X, Y) \;:=\; \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1},\, T_n \ne 0} \frac{\left\|T_n^{(r)}\right\|_X}{\|T_n\|_Y}$$

при заданном $r = 0, 1, \ldots$ и $n \to \infty$ в случае $X = L_p(T)$, $Y = L_q(T)$, $\infty \geq p > > q \geq 1$, исследовал С. М. Никольский [10]. Дальнейшие результаты см. в [12]. Мы рассмотрим аналогичную задачу в случае $X = L_1(T)$, $Y = L_\psi(T)$, $\psi \in \Omega$.

Теорема 7. 1. *Для любой* $\psi \in \Omega$ *найдется константа* C_ψ *такая, что выполняются неравенства*

$$\psi\left(n\|T_n\|_1\right) \leq C_\psi n \|T_n\|_\psi \tag{30}$$

при всех n *и* T_n.

2. *Если* $\gamma_\psi > 0$, *то найдется константа* $C_{\psi,1} > 0$ *такая, что при всех* n *имеют место неравенства*

$$C_{\psi,1} n M_\psi\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\psi\left(\|T_n\|_1\right)}{\|T_n\|_\psi} \leq C_\psi n M_\psi\left(\frac{1}{n}\right) \tag{31}$$

(*здесь* C_ψ — *та же, что и в* (30)).

Доказательство. Используем формулу (7):

$$\left|T_n(x+t)\right| \leq \frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{3n}\left|T_n(t+x_j)\right|\left|V_n(x-x_j)\right|.$$

Проинтегрируем обе части по переменной x:

$$n\|T_n\|_1 \leq \frac{1}{3}\|V_n\|_1 \sum_{j=1}^{3n}\left|T_n(t+x_j)\right|.$$

Отсюда получаем

$$\psi\left(n\|T_n\|_1\right) \leq M_\psi\left(\frac{1}{3}\|V_n\|_1\right)\sum_{j=1}^{3n}\psi\left(\left|T_n(t+x_j)\right|\right).$$

Теперь проинтегрируем по переменной t и получим неравенство

$$\psi\left(n\|T_n\|_1\right) \leq M_\psi\left(\frac{1}{3}\|V_n\|_1\right) 3n \|T_n\|_\psi, \tag{32}$$

которое выполняется для любого ядра V_n вида (4). В частности, пусть V_n — классическое ядро Валле Пуссена. Известно [3], что $\sup\left\{\|V_n\|_1 ;\, n \in \mathrm{N}\right\} = K < \infty$. Тогда из (32) получаем (30) с константой $C_\psi := 3M_\psi(K/3)$.

Из (30) следует верхняя оценка в (31):

$$\psi\left(\|T_n\|_1\right) = \psi\left(n\left\|\frac{1}{n}T_n\right\|_1\right) \leq C_\psi n \left\|\frac{1}{n}T_n\right\|_\psi \leq C_\psi n M_\psi\left(\frac{1}{n}\right)\|T_n\|_\psi.$$

Таким образом, верхняя оценка в (31) справедлива и в случае $\gamma_\psi = 0$.

Пусть теперь $\gamma_\psi > 0$ и ядра V_m определяются функцией α из $P\Sigma \cap C^\infty(R)$.

Тогда для любого $c > 0$ с помощью формулы суммирования Пуассона получаем

$$\| cV_m \|_\psi \le \int_R \psi\left(cm \left|\hat{\alpha}(my)\right| \right) dy = \frac{1}{m} \int_R \psi\left(cm \left|\hat{\alpha}(y)\right| \right) dy \le$$

$$\le \frac{1}{m} \psi(cm) \int_R M_\psi\left(\left|\hat{\alpha}(y)\right| \right) dy = K_1 \frac{1}{m} \psi(cm), \tag{33}$$

где $K_1 := \int_R M_\psi\left(\left|\hat{\alpha}(y)\right| \right) dy < \infty$.

Для оценки снизу в (31) достаточно ограничиться случаем $n \ge 3$. Положим $T_n = cV_{[n/2]}$, используем (33) и тот факт, что $\| V_m \|_1 > 1$:

$$\sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\psi\left(\| T_n \|_1 \right)}{\| T_n \|_\psi} \ge \sup_{c>0} \frac{\psi\left(c \left\| V_{[n/2]} \right\|_1 \right)}{\left\| cV_{[n/2]} \right\|_\psi} \ge \sup_{c>0} \frac{\psi(c)}{K_1 \left[n/2 \right]^{-1} \psi(c_{[n/2]})} \ge$$

$$\ge \frac{n}{3K_1} \sup_{c>0} \frac{\psi(c)}{\psi(cn/2)} = \frac{n}{3K_1} M_\psi\left(\frac{2}{n} \right) \ge \frac{1}{3K_1} n M_\psi\left(\frac{1}{n} \right).$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. 1. *Найдутся константы* $C_\psi < \infty$ *и* $C_{\psi,2} > 0$ *такие, что для любого оператора* A *с множителями* $\left\{ \lambda_k;\, |k| \le n \right\}$ *выполняются неравенства*

$$C_{\psi,2}\, n M_\psi\left(\frac{1}{n} \max_{|k| \le n/2} |\lambda_k| \right) \le \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\psi\left(\| AT_n \|_1 \right)}{\| T_n \|_\psi} \le C_\psi n M_\psi\left(\frac{1}{n} \| A \|_{1\to 1} \right). \tag{34}$$

При этом правое неравенство выполняется для любого $\psi \in \Omega$, *а левое — при условии* $\gamma_\psi > 0$.

2. *Если* $\psi \in \overline{\Omega}_1$, *то*

$$C_{\psi,2} \max_{|k| \le n/2} |\lambda_k| \le \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \ne 0} \frac{\psi\left(\| AT_n \|_1 \right)}{\| T_n \|_\psi} \le C_\psi \max\left\{ n;\, \| A \|_{1\to 1} \right\}. \tag{35}$$

Доказательство. Правое неравенство в (34) следует из (30) (с той же константой C_ψ):

$$\psi\left(\| AT_n \|_1 \right) \le \psi\left(\| A \|_{1\to 1} \| T_n \|_1 \right) = \psi\left(\left(\frac{1}{n} \| A \|_{1\to 1} \right) \left(n \| T_n \|_1 \right) \right) \le$$

$$\le M_\psi\left(\frac{1}{n} \| A \|_{1\to 1} \right) \psi\left(n \| T_n \|_1 \right) \le M_\psi\left(\frac{1}{n} \| A \|_{1\to 1} \right) C_\psi n \| T_n \|_\psi.$$

Для оценки снизу в (34) достаточно ограничиться случаем $n \ge 3$. Положим $T_n = cV_{[n/2]}$, $c > 0$, и учтем, что при $k \le \left[n/2 \right]$

$$\left\| AV_{[n/2]} \right\|_1 \geq \left| \int_T AV_{[n/2]}(x) e^{i2\pi kx} dx \right| = |\lambda_k|.$$

Кроме того, если $\gamma_\psi > 0$, то можно использовать (33). В результате получим левую часть (34):

$$\sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\psi\left(\| AT_n \|_1\right)}{\| T_n \|_\psi} \geq \sup_{c>0} \frac{\psi\left(\left\| AcV_{[n/2]} \right\|_1\right)}{\left\| cV_{[n/2]} \right\|_1} \geq$$

$$\geq \sup_{c>0} \frac{\psi\left(c \max_{|k| \leq [n/2]} |\lambda_k|\right)}{K_1 [n/2]^{-1} \psi\left(c[n/2]\right)} \geq C_\psi n M_\psi \left(\frac{1}{n} \max_{|k| \leq [n/2]} |\lambda_k|\right).$$

Если же $\psi \in \overline{\Omega}_1$, то $\psi(x) \leq x$, поэтому

$$\left\| cV_{[n/2]} \right\|_\psi \leq \left\| cV_{[n/2]} \right\|_1 \leq cK,$$

$$\sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\psi\left(\| AT_n \|_1\right)}{\| T_n \|_\psi} \geq \sup_{c} \frac{\psi\left(\left\| AcV_{[n/2]} \right\|_1\right)}{\left\| cV_{[n/2]} \right\|_1} \geq$$

$$\geq \lim_{c \to 0} \frac{\psi\left(c \max_{|k| \leq [n/2]} |\lambda_k|\right)}{cK} = \frac{1}{K} \max_{|k| \leq n/2} |\lambda_k|.$$

Правая часть (35) следует из того, что $M_\psi(y) \leq \max(1; y)$.

Теорема 8 доказана.

***Следствие* 4**. 1. *Если* $\gamma_\psi > 0$, *то для* $r \in [0, \infty)$

$$C'_{\psi,2}(r) n M_\psi(n^{r-1}) \leq \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\psi\left(\left\| T_n^{(r)} \right\|_1\right)}{\| T_n \|_\psi} \leq C'_\psi(r) n M_\psi(n^{r-1}).$$

2. *Если* $\psi \in \overline{\Omega}_1$, *то для* $r \in [1, \infty)$

$$C'_{\psi,2}(r) n^r \leq \sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\psi\left(\left\| T_n^{(r)} \right\|_1\right)}{\| T_n \|_\psi} \leq C'_\psi(r) n^r.$$

3. *Для любой* $\psi \in \Omega$ *при всех* $k, r = 0, 1, 2, \ldots$ *и всех* $h \in (0, 1]$, $n \in N$

$$\sup_{T_n \in \tilde{T}^{2n+1}, T_n \neq 0} \frac{\psi\left(h^{-k} \left\| \Delta_h^k T_n^{(r)} \right\|_1\right)}{\| T_n \|_\psi} \leq C_\psi(r, k) n M_\psi(n^{r-1} \min(n^k, h^{-k})).$$

1. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 122 – 133.
2. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1524 – 1533.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. – М. : Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Корнейчук Н. П. , Бабенко В. Ф. , Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
5. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
6. *Иванов В. И.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 4. – С. 489 – 498.
7. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1982. – **45**, № 1. – С. 3 – 22.
8. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
9. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М. : Мир, 1974. – 330 с.
10. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций многих переменных // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
11. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
12. *Арестов В. В.* О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 4. – С. 539 – 547.

Получено 11.10.10