УДК 517.988.6

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

МЕТОД ЛОКАЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО НАБЛИЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ СЛАБКОРЕГУЛЯРНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

We obtain conditions for the existence of solutions of nonlinear differential equations in the space of functions bounded on the axis by using a local linear approximation of these equations.

Получены условия существования решений нелинейных дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных на оси функций с использованием локальной линейной аппроксимации этих уравнений.

1. Основний об’єкт досліджень. Нехай E — скінченновимірний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, $E^m = \underbrace{E \times \ldots \times E}_{m \text{ разів}}$, X і Y — довільні банахові простори та $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Позначимо через $C^0(\mathbb{R},X)$ банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в X з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},X)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X,$$

а через $C^m(\mathbb{R},X)$, де $m \in \mathbb{N}$, банаховий простір функцій $x \in C^0(\mathbb{R},X)$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt}, \ldots, \dfrac{d^m x}{dt^m} \in C^0(\mathbb{R},X)$, з нормою

$$\|x\|_{C^m(\mathbb{R},X)} = \max\left\{ \|x\|_{C^0(\mathbb{R},X)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},X)}, \ldots, \left\|\frac{d^m x}{dt^m}\right\|_{C^0(\mathbb{R},X)} \right\}.$$

У випадку $X = E$ простори $C^0(\mathbb{R},X)$ і $C^m(\mathbb{R},X)$ позначатимемо через C^0 і C^m відповідно.

Розглянемо диференціальні оператори $\mathscr{F}$ і $\mathscr{G}$, що діють із простору C^m у простір C^0 і визначаються за допомогою формул

$$(\mathscr{F}x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (\mathscr{G}x)(t), \quad x \in C^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

і

$$(\mathscr{G}x)(t) = g\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}\right), \quad x \in C^m, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $g\colon \mathbb{R}\times E^m \to E$ — відображення, для якого виконується **умова А**: відображення $g\colon \mathbb{R}\times E^m \to E$ неперервне і для всіх $r > 0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant r, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant r} \|g(t, x_1, \ldots, x_m)\|_E < +\infty.$$

Завдяки вимогам до відображення g оператор $\mathscr{F}$ є обмеженим, тобто цей оператор кожну обмежену множину відображає в обмежену множину [1]. Оператор $\mathscr{F}$

є неперервним, якщо відображення g рівномірно неперервне на кожній множині $\{(t, x_1, \ldots, x_m) \colon t \in \mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant r, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant r\}$, $r > 0$.

Метою цієї статті є з'ясування умов, за яких для множини значень $R(\mathscr{F})$ оператора $\mathscr{F}$ виконується співвідношення

$$R(\mathscr{F}) = C^0. \tag{2}$$

Зазначимо, що така задача для нелінійних диференціальних рівнянь є надто складною (див., наприклад, [1 – 6]). Тому ми обмежимося розглядом лише достатніх умов, що забезпечують виконання співвідношення (2) і в деяких окремих випадках збігаються з необхідними умовами виконання цього співвідношення.

В основу дослідження оператора $\mathscr{F}$ покладено метод, що використовує локальну апроксимацію цього оператора слабкорегулярними операторами. Випадок локального наближення нелінійних операторів регулярними операторами розглядався автором у роботах [7 – 10].

2. Формулювання основного твердження. Оскільки у подальшому ми будемо використовувати слабкорегулярні оператори, то спочатку приділимо увагу цим операторам.

Кожній послідовності $A = (A_1(t), A_2(t), \ldots, A_m(t))$, де $A_k(t)$, $k = \overline{0, m-1}$, — неперервні й обмежені на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E, E)$, поставимо у відповідність лінійні неперервні оператори $\mathscr{A} \colon C^m \to C^0$ і $\mathscr{L}_A \colon C^m \to C^0$, що визначаються формулами

$$(\mathscr{A}x)(t) = \sum_{k=1}^{m} A_k(t) \frac{d^{k-1}x(t)}{dt^{k-1}}, \quad x \in C^m, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$(\mathscr{L}_A x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + (\mathscr{A}x)(t), \quad x \in C^m, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Тут $\dfrac{d^0 x(t)}{dt^0} = x(t)$. Оператор $\mathscr{L}_A$ називають *слабкорегулярним* [1], якщо

$$R(\mathscr{L}_A) = C^0, \tag{4}$$

тобто для кожного $y \in C^0$ рівняння

$$\mathscr{L}_A x = y$$

має хоча б один розв'язок $x \in C^m(\mathbb{R}, E)$. Такі оператори у випадку $m = 1$ детально досліджувалися в [11].

Множину всіх елементів $A = (A_1(t), A_2(t), \ldots, A_m(t))$, для кожного з яких оператор $\mathscr{L}_A \colon C^m \to C^0$ є слабкорегулярним, позначимо через $\mathcal{G}_m$. Множину всіх слабкорегулярних операторів $\mathscr{L}_A \colon C^m \to C^0$ позначимо через $W(C^m, C^0)$. Якщо для $\mathscr{L}_A$ крім співвідношення (4) виконується і співвідношення

$$\ker \mathscr{L}_A = \{0\},$$

де $\ker \mathscr{L}_A$ — ядро оператора $\mathscr{L}_A$ ($\ker \mathscr{L}_A = \{x \in C^m \colon \mathscr{L}_A x = 0\}$), то оператор $\mathscr{L}_A$ називають *регулярним* (у цьому випадку оператор $\mathscr{L}_A$ має обернений неперервний оператор $\mathscr{L}_A^{-1}$ за теоремою Банаха про обернений оператор [12]). Множину регулярних операторів $\mathscr{L}_A \colon C^m \to C^0$ позначатимемо через $R(C^m, C^0)$. Очевидно, що

$$R(C^m, C^0) \subset W(C^m, C^0) \quad \text{і} \quad W(C^m, C^0) \setminus R(C^m, C^0) \neq \varnothing.$$

Прикладом нерегулярного, але слабкорегулярного оператора при $m = 1$ є оператор $\mathscr{L}\colon C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається формулою

$$(\mathscr{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + (\operatorname{arctg} t)x(t), \quad x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Нехай $\mathscr{L}_A \in W(C^m, C^0) \setminus R(C^m, C^0)$. Для цього оператора $\ker \mathscr{L}_A \neq \{0\}$. Оскільки простір E скінченновимірний, то на підставі властивостей розв'язків диференціального рівняння $(\mathscr{L}_A x)(t) = 0$ ядро $\ker \mathscr{L}_A$ оператора $\mathscr{L}_A$ також буде скінченновимірним простором. Тому існує доповняльний до $\ker \mathscr{L}_A$ підпростір $X_{\mathscr{L}_A}$ простору C^m [13], тобто такий підпростір, що C^m подається у вигляді прямої суми

$$C^m = \ker \mathscr{L}_A \dot{+} X_{\mathscr{L}_A} \tag{6}$$

(норми у просторах $\ker \mathscr{L}_A$ і $X_{\mathscr{L}_A}$ розглядаємо такі, як і в просторі C^m). Рівність (6) означає, що кожний вектор $x \in C^m$ єдиним чином подається у вигляді

$$x = x_1 + x_2,$$

де $x_1 \in \ker \mathscr{L}_A$ і $x_2 \in X_{\mathscr{L}_A}$.

Розглянемо звуження $\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}$ оператора $\mathscr{L}_A$ на підпростір $X_{\mathscr{L}_A}$. Цей оператор взаємно однозначно відображає $X_{\mathscr{L}_A}$ на C^0 і тому має обернений неперервний оператор $\left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}\right)^{-1} : C^0 \to X_{\mathscr{L}_A}$.

Зауважимо, що оператори $(\mathscr{L}_A)^{-1}$, якщо оператор $\mathscr{L}_A\colon C^m \to C^0$ є регулярним, і $\left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}\right)^{-1}$ можна розглядати як елементи простору $L(C^0, C^m)$ або як елементи простору $L(C^0, C^{m-1})$.

Основним результатом статті є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай виконується умова* А. *Якщо для кожного числа* $H > 0$ *існують такі число* $r > 0$ *і оператор* $\mathscr{L}_A \in W(C^m, C^0)$, *що*

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant r,\ldots,\|x_m\|_E \leqslant r} \left\| g(t, x_1, \ldots, x_m) - \sum_{k=1}^{m} A_k(t)x_k \right\|_E \leqslant \frac{r}{a} - H, \tag{7}$$

де

$$a = \begin{cases} \left\|\mathscr{L}_A^{-1}\right\|_{L(C^0, C^{m-1})}, & \textit{якщо} \quad \mathscr{L}_A \in R(C^m, C^0), \\ \left\|\left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}\right)^{-1}\right\|_{L(C^0, C^{m-1})}, & \textit{якщо} \quad \mathscr{L}_A \in W(C^m, C^0) \setminus R(C^m, C^0), \end{cases} \tag{8}$$

то для оператора $\mathscr{F}$, *що визначається формулою* (1), *виконується співвідношення* (2).

Очевидно, що за допомогою цієї теореми можна встановлювати умови існування обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

3. Допоміжні твердження. Наведемо ряд результатів про локально збіжні послідовності та c-неперервні оператори, необхідні для доведення теореми 1.

3.1. Локально збіжні послідовності. Послідовність $x_k \in X$, $k \geqslant 1$, де X — простір C^0 або його підпростір, називають *локально збіжною* до $x \in X$ при $k \to \infty$ і позначають

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.},\, X} x \text{ при } k \to \infty,$$

якщо $\sup_{k\geqslant 1} \|x_k\|_{C^0} < +\infty$ і $\lim_{k\to\infty} \max_{|t|\leqslant T} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0$ для кожного числа $T > 0$. Аналогічно, послідовність $y_k \in Y$, $k \geqslant 1$, де Y — простір C^m або його підпростір, називають *локально збіжною* до $y \in Y$ при $k \to \infty$ і позначають

$$y_k \xrightarrow{\text{loc.},\, Y} y \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо $y_k \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0} y$, $\dfrac{dy_k}{dt} \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0} \dfrac{dy}{dt}, \ldots, \dfrac{d^m y_k}{dt^m} \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0} \dfrac{d^m y}{dt^m}$ при $k \to \infty$.

Розглянемо функції $q_{n,p} \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, де $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, і лінійні неперервні оператори $\mathscr{Q}_{n,p} \colon C^p \longrightarrow C^p$, $n \geqslant 1$, що визначаються рівностями

$$q_{n,p}(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |t| \leqslant 2^n, \\ \cos^{p+1} \dfrac{(2^{-n}|t| - 1)\pi}{2}, & \text{якщо} \quad 2^n < |t| < 2^{n+1}, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| \geqslant 2^{n+1}, \end{cases}$$

і

$$\mathscr{Q}_{n,p} = \|\mathscr{R}_{n,p}\|^{-1}_{L(C^p, C^p)} \mathscr{R}_{n,p}, \tag{9}$$

де

$$(\mathscr{R}_{n,p} x)(t) = q_{n,p}(t) x(t), \quad x \in C^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что

$$\mathscr{Q}_{n,p} C^l \subset C^l, \quad l = \overline{0, p},$$

і

$$\|\mathscr{Q}_{n,p}\|_{L(C^k, C^k)} = 1, \quad k = \overline{0, p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Важливою для подальшого є така лема.

Лема 1 [10]. *Нехай $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Для кожної обмеженої послідовності $(x_n)_{n\geq 1}$ елементів простору C^p, для якої множини $\{\mathscr{Q}_{\nu,p} x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, передкомпактні, існують такі строго зростаюча послідовність $(n_k)_{k\geq 1}$ натуральних чисел і елемент $x \in C^p$, що*

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc.},\, C^p} x \quad \textit{при} \quad k \to \infty$$

і

$$\|x\|_{C^p} \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_{C^p}.$$

3.2. с-Неперервні та с-цілком неперервні оператори. Оператор $\mathscr{H}\colon X \longrightarrow Y$, де X і Y — простори $C^0, C^1, \ldots, C^m$ або їх підпростори, називається *с-неперервним*, якщо для довільних $x \in X$ і $x_k \in X$, $k \geqslant 1$, для яких

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.},\, X} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathscr{H} x_k \xrightarrow{\text{loc.},\, Y} \mathscr{H} x \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Оператор $\mathscr{H}\colon X \to Y$ називається *с-цілком неперервним*, якщо цей оператор є c-неперервним і для кожного $n \geqslant 1$ оператор $\mathscr{Q}_{n,m}\mathscr{H}$ є цілком неперервним.

Зазначимо, що c-неперервні та c-цілком неперервні оператори досліджувались у [14–20] та інших роботах.

Прикладами c-неперервних операторів є розглянуті вище оператори $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{L}_A$, $\mathscr{L}$ і $\mathscr{Q}_n$. Прикладами c-цілком неперервних операторів є оператори $\mathscr{G}$ і $\mathscr{A}$ на підставі критерію компактності Арцела [12]. Також c-цілком неперервним є лінійний оператор $\mathscr{L}_A^{-1}\colon C^0 \to C^{m-1}$, якщо оператор $\mathscr{L}_A\colon C^m \to C^0$ регулярний, що на підставі критерію компактності Арцела та визначення c-цілком неперервного оператора випливає з наступного твердження.

Теорема 2 [18]. *Нехай оператор $D \in L(C^m, C^0)$ є с-цілком неперервним і оператор $\dfrac{d^m}{dt^m} + D\colon C^m \to C^0$ має неперервний обернений $\left(\dfrac{d^m}{dt^m} + D\right)^{-1}$. Тоді оператор $\left(\dfrac{d^m}{dt^m} + D\right)^{-1}\colon C^0 \to C^m$ є с-неперервним.*

4. Доведення теореми 1. Розглянемо у просторі C^p ($p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) замкнену кулю $\mathcal{B}_R^p = \{x\colon \|x\|_{C^p} \leqslant R\}$ радіуса R з центром у точці 0.

Доведемо твердження, з якого випливатиме теорема 1.

Лема 2. *Нехай виконується умова* A. *Якщо для деяких чисел $H > 0$, $r > 0$ і оператора $\mathscr{L}_A \in W(C^m, C^0)$ справджується нерівність* (7) *і $h \in \mathcal{B}_H^0$, то рівняння*

$$\mathscr{F} x = h \tag{11}$$

має хоча б один розв'язок $x \in C^m \cap \mathcal{B}_r^{m-1}$.

Доведення. У випадку, коли оператор $\mathscr{L}_A$ є регулярним, більш загальне твердження, ніж лема 2, доведено в [10]. Тому далі обмежимося розглядом випадку нерегулярного, але слабко регулярного оператора $\mathscr{L}_A\colon C^m \to C^0$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + (\mathscr{A} x)(t) = (\mathscr{Q}_{n,m}(\mathscr{A} - \mathscr{G})\mathscr{I}_n x)(t) + h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

де $\mathscr{Q}_{n,m}$ — оператор, що визначається рівністю (9) при $p = m$, і $\mathscr{I}_n\colon C^{m-1} \to C^m$ — лінійний неперервний і c-неперервний оператор, що визначається формулою

$$(\mathscr{I}_n x)(t) = n \int\limits_0^{1/n} x(t+s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що для кожного числа $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$\mathscr{I}_n C^p \subset C^{p+1},$$

$$\|\mathscr{I}_n\|_{L(C^p,C^p)} = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\|\mathscr{I}_n\|_{L(C^p,C^{p+1})} = 2n, \quad n \in \mathbb{N},$$

і для всіх $x \in C^p$

$$\mathscr{I}_n x \xrightarrow{\text{loc., } C^p} x \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Рівняння (12) у просторі $X_{\mathscr{L}_A}$ рівносильне рівнянню

$$x(t) = \left(\left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}\right)^{-1} (\mathscr{Q}_{n,m}(\mathscr{A} - \mathscr{G})\mathscr{I}_n x + h)\right)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Також розглянемо оператор $\mathscr{W}_n \colon C^{m-1} \to C^0$, що визначається рівністю

$$(\mathscr{W}_n x)(t) = (\mathscr{Q}_{n,m}(\mathscr{A} - \mathscr{G})\mathscr{I}_n x + h)(t).$$

Завдяки означенням операторів $\mathscr{Q}_{n,m}$ і $\mathscr{I}_n$, властивостям оператора $\mathscr{I}_n$ і тому, що оператори $\mathscr{A} \colon C^m \to C^0$ і $\mathscr{G} \colon C^m \to C^0$ c-цілком неперервні оператор $\mathscr{W}_n \colon C^{m-1} \to C^0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ є цілком неперервним. Тому цілком неперервним є і оператор $\left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}\right)^{-1} \mathscr{W}_n \colon C^{m-1} \to X_{\mathscr{L}_A}$. Також для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконується співвідношення

$$\left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}\right)^{-1} \mathscr{W}_n \mathcal{B}_r^{m-1} \subset \mathcal{B}_r^{m-1}.$$

Справді, якщо $\|y\|_{C^{m-1}} \leqslant r$ і $\|h\|_{C^0} \leqslant H$, то згідно з нерівністю (7) та рівностями (10)

$$\left\|\left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}\right)^{-1} \mathscr{W}_n y\right\|_{C^{m-1}} \leqslant \left\|\left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}}\right)^{-1}\right\|_{L(C^0,C^{m-1})} \|\mathscr{W}_n y\|_{C^0} \leqslant$$

$$\leqslant a \sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x\|_{C^{m-1}}\leqslant r} \|(\mathscr{Q}_{n,m}(\mathscr{A} - \mathscr{G})\mathscr{I}_n x + h)(t)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant a \left(\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x\|_{C^{m-1}}\leqslant r} \|(\mathscr{Q}_{n,m}(\mathscr{A} - \mathscr{G})\mathscr{I}_n x)(t)\|_E + \|h\|_{C^0}\right) \leqslant$$

$$\leqslant a \left(\|\mathscr{Q}_{n,m}\|_{L(C^0,C^0)} \sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x\|_{C^{m-1}}\leqslant r} \|((\mathscr{A} - \mathscr{G})\mathscr{I}_n x)(t)\|_E + H\right) \leqslant$$

$$\leqslant a \left(\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E\leqslant r,\ldots,\|x_m\|_E\leqslant r} \left\|g(t, x_1, \ldots, x_m) - \sum_{k=1}^{m} A_k(t) x_k\right\|_E + H\right) \leqslant$$

$$\leqslant a \left(\frac{r}{a} - H + H\right) = r.$$

Тому за теоремою Шаудера про нерухому точку [21] рівняння (14) для кожного $n \in \mathbb{N}$ має хоча б один розв'язок $x \in C^m \cap \mathcal{B}_r^{m-1}$. Позначимо один із цих розв'язків через x_n. Тоді

$$\frac{d^m x_n(t)}{dt^m} + (\mathscr{A} x_n)(t) = (\mathscr{Q}_{n,m}(\mathscr{A} - \mathscr{G})\mathscr{I}_n x_n)(t) + h(t),\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Очевидно, що

$$x_n \in \mathcal{B}_R^m \cap \mathcal{B}_r^{m-1},\ n \in \mathbb{N},$$

де

$$R = \frac{r}{a} \left\| \left(\mathscr{L}_A|_{X_{\mathscr{L}_A}} \right)^{-1} \right\|_{L(C^0, C^m)}.$$

На підставі леми 1 і теореми компактності Арцела [12] існують елемент $x^* \in \mathcal{B}_r^{m-1}$ і строго зростаюча послідовність $(n_k)_{n\geqslant 1}$ натуральних чисел, для яких

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc., } C^{m-1}} x^* \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{16}$$

Покажемо, що x^* є розв'язком рівняння (11).

Розглянемо довільний регулярний оператор $\mathscr{L}_B \colon C^m \to C^0$, що визначається рівностями

$$(\mathscr{L}_B y)(t) = \frac{d^m y(t)}{dt^m} + (\mathscr{B} y)(t),$$

$$(\mathscr{B} y)(t) = \sum_{k=1}^{m} B_k \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}},$$

де $B_k \in L(E,E)$, $k = \overline{1,m}$, $y \in C^m$ і $t \in \mathbb{R}$. Подамо співвідношення (15) у вигляді

$$\mathscr{L}_B x_n = (\mathscr{B} - \mathscr{A}) x_n + \mathscr{Q}_{n,m} (\mathscr{A} - \mathscr{G}) \mathscr{I}_n x_n + h, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Звідси з урахуванням регулярності оператора $\mathscr{L}_B$ випливає, що

$$x_n = \mathscr{L}_B^{-1} ((\mathscr{B} - \mathscr{A}) x_n + \mathscr{Q}_{n,m} (\mathscr{A} - \mathscr{G}) \mathscr{I}_n x_n + h), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Оскільки оператори $\mathscr{B} - \mathscr{A} : C^{m-1} \to C^0$ і $\mathscr{A} - \mathscr{G} \colon C^{m-1} \to C^0$ c-неперервні, то на підставі означень операторів $\mathscr{Q}_{n,m}$ і $\mathscr{I}_n$ та співвідношень (13) і (16)

$$(\mathscr{B} - \mathscr{A}) x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc., } C^{m-1}} (\mathscr{B} - \mathscr{A}) x^* \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{18}$$

і

$$\mathscr{Q}_{n,m} (\mathscr{A} - \mathscr{G}) \mathscr{I}_{n_k} x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc., } C^{m-1}} (\mathscr{A} - \mathscr{F}) x^* \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{19}$$

Оскільки оператор $\mathscr{B} \colon C^m \to C^0$ c-цілком неперервний, то на підставі теореми 2 і регулярності $\mathscr{L}_B$ оператор $\mathscr{L}_B^{-1} \colon C^0 \to C^m$ є c-неперервним. Тому завдяки (18) і (19)

$$\mathscr{L}_B^{-1} ((\mathscr{B} - \mathscr{A}) x_{n_k} + \mathscr{Q}_{n_k,m} (\mathscr{A} - \mathscr{G}) \mathscr{I}_n x_{n_k}) \xrightarrow{\text{loc., } C^{m-1}} \mathscr{L}_B^{-1} (\mathscr{B} - \mathscr{G}) x^*$$

при $k \to \infty$. Звідси на підставі (16), (17) випливає, що $x^* = \mathscr{L}_B^{-1}((\mathscr{B} - \mathscr{G})x^* + h)$ і $x^* \in C^m$. Тому $\mathscr{L}_B x^* = (\mathscr{B} - \mathscr{G}) x^* + h$ і, отже, $\mathscr{F} x^* = h$.

Лему 2 доведено.

Очевидно, що твердження теореми 1 є наслідком леми 2.

5. Побудова одного класу операторів, до яких застосовна теорема 1. Наведемо одну множину нелінійних диференціальних операторів $\mathscr{F}$, для кожного з яких за теоремою 1 виконується співвідношення (2).

Теорема 3. *Для кожних чисел* $H_n > 0$, $n \geqslant 1$, *для яких* $\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty$, *і елементів* $A_n = (A_{1,n}(t), A_{2,n}(t), \ldots, A_{m,n}(t)) \in \mathcal{G}_m$, $n \geqslant 1$, *існують відображення* $g\colon \mathbb{R} \times E^m \to E$, *що задовольняє умову А, і числа* $r_n > 0$, $n \geqslant 1$, *для яких виконується співвідношення*

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant r_n, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant r_n} \left\| g(t, x_1, \ldots, x_m) - \sum_{k=1}^{m} A_{k,n}(t) x_k \right\|_E \leqslant \frac{r_n}{a_n} - H_n,\ n \geq 1, \tag{20}$$

де

$$a_n = \begin{cases} \left\| \mathscr{L}_{A_n}^{-1} \right\|_{L(C^0, C^{m-1})}, & \text{якщо} \quad \mathscr{L}_{A_n} \in R(C^m, C^0), \\ \left\| \left(\mathscr{L}_{A_n}|_{X_{\mathscr{L}_{A_n}}} \right)^{-1} \right\|_{L(C^0, C^{m-1})}, & \text{якщо} \quad \mathscr{L}_{A_n} \in W(C^m, C^0) \setminus R(C^m, C^0). \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо довільну послідовність додатних чисел r_n, $n \geq 1$, для якої $r_1 \geq 1$ і $r_{n+1} > r_n + 3$, $n \geq 1$ (значення r_n уточнимо пізніше). Для кожного $n \geq 1$ визначимо відображення

$$\omega_{1,n}\colon \{x \in C^m \colon r_n \leq \|x\|_{C^m} \leqslant r_n + 1\} \to [0, 1]$$

і

$$\omega_{2,n}\colon \{x \in C^m \colon r_n + 1 \leqslant \|x\|_{C^m} \leq r_n + 2\} \to [0, 1]$$

за допомогою рівностей

$$\omega_{1,n}(x) = r_n \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_{C^m}} - 1 \right)^2 x \right\|_{C^m}$$

і

$$\omega_{1,n}(x) = (r_n + 2) \left\| \left(\frac{r_n + 1}{\|x\|_{C^m}} - 1 \right)^2 x \right\|_{C^m}.$$

Очевидно, що відображення $\omega_{1,n}$ і $\omega_{2,n}$ неперервні,

$$\omega_{1,n}(x) = 1, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{C^m} = r_n, \tag{21}$$

$$\omega_{2,n}(x) = 1, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{C^m} = r_n + 2, \tag{22}$$

$$\omega_{1,n}(x) = \omega_{2,n}(x) = 0, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{C^m} = r_n + 1, \tag{23}$$

і

$$R(\omega_{1,n}) = R(\omega_{2,n}) = [0, 1]. \tag{24}$$

Відображення $g\colon \mathbb{R} \times E^m \to E$ і числа r_n, $n \geqslant 1$, визначимо таким чином.

Спочатку розглянемо відображення $g_1 \colon \mathbb{R} \times E^m \to E$, що визначається рівністю

$$g_1(t, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} A_{k,1}(t) x_k.$$

Очевидно, що для кожного числа $r > 0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E\leqslant r,\ldots,\|x_m\|_E\leqslant r}\left\|g(t,x_1,\ldots,x_m)-\sum_{k=1}^{m}A_{k,1}(t)x_k\right\|_E=0.$$

Виберемо число $r_1\geqslant 1$ так, щоб

$$\frac{r_1}{a_1}-H_1\geqslant 0.$$

Далі розглянемо відображення $g_2\colon\mathbb{R}\times E^m\to E$, що визначається рівністю

$$g_2(t,x_1,\ldots,x_m)=$$

$$=\begin{cases} g_1(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо} \quad \|x_l\|_E\leqslant r_1, \quad l=\overline{1,m},\\ \omega_{1,1}(x)g_1(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо} \quad r_1<\|x_l\|_E\leqslant r_1+1, \quad l=\overline{1,m},\\ \omega_{2,1}(x)\sum\limits_{k=1}^{m}A_{k,2}(t)x_k, & \text{якщо} \quad r_1+1<\|x_l\|_E\leqslant r_1+2, \quad l=\overline{1,m},\\ \sum\limits_{k=1}^{m}A_{k,2}(t)x_k, & \text{якщо} \quad \|x_l\|_E>r_1+2, \quad l=\overline{1,m}.\end{cases}$$

Це відображення задовольняє умову A на підставі неперервності $\omega_{1,1}$ і $\omega_{2,1}$, співвідношень (21) — (24) та того, що $A_l\in\mathcal{G}_m$, $l=\overline{1,2}$. Легко перевірити, що

$$\sup_{t\in\mathbb{R},x_1\in E,\ldots,x_m\in E}\left\|g_2(t,x_1,\ldots,x_m)-\sum_{k=1}^{m}A_{k,2}(t)x_k\right\|_E<+\infty.$$

Тому існує таке число $r_2>r_1+3$, що виконується нерівність

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E\leqslant r_2,\ldots,\|x_m\|_E\leqslant r_2}\left\|g_2(t,x_1,\ldots,x_m)-\sum_{k=1}^{m}A_{k,2}(t)x_k\right\|_E\leqslant\frac{r_2}{a_2}-H_2.$$

Далі визначимо відображення $g_3\colon\mathbb{R}\times E^m\to E$ за допомогою рівності

$$g_3(t,x_1,\ldots,x_m)=$$

$$=\begin{cases} g_2(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо} \quad \|x_l\|_E\leqslant r_2, \quad l=\overline{1,m},\\ \omega_{1,2}(x)g_2(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо} \quad r_2<\|x_l\|_E\leqslant r_2+1, \quad l=\overline{1,m},\\ \omega_{2,2}(x)\sum\limits_{k=1}^{m}A_{k,3}(t)x_k, & \text{якщо} \quad r_2+1<\|x_l\|_E\leqslant r_2+2, \quad l=\overline{1,m},\\ \sum\limits_{k=1}^{m}A_{k,3}(t)x_k, & \text{якщо} \quad \|x_l\|_E>r_2+2, \quad l=\overline{1,m}.\end{cases}$$

Це відображення задовольняє умову A на підставі неперервності $\omega_{1,2}$ і $\omega_{2,2}$, співвідношень (21) — (24) та того, що відображення g_2 задовольняє умову A і $A_3\in\mathcal{G}_m$. Очевидно, що

$$\sup_{t\in\mathbb{R},x_1\in E,\ldots,x_m\in E}\left\|g_3(t,x_1,\ldots,x_m)-\sum_{k=1}^{m}A_{k,3}(t)x_k\right\|_E<+\infty.$$

Тому існує таке число $r_3>r_2+3$, що виконується нерівність

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E\leqslant r_3,\ldots,\|x_m\|_E\leqslant r_3}\left\|g_3(t,x_1,\ldots,x_m)-\sum_{k=1}^{m}A_{k,3}(t)x_k\right\|_E\leqslant\frac{r_3}{a_3}-H_3.$$

Аналогічним чином визначаємо відображення $g_n\colon \mathbb{R}\times E^m\to E$, $n\geqslant 4$, і числа $r_n>r_{n-1}+3$, $n\geqslant 4$.

Зазначимо, що відображення $g_n\colon \mathbb{R}\times E^m\to E$ визначається за допомогою рівності

$$g_n(t,x_1,\ldots,x_m)=$$

$$=\begin{cases} g_{n-1}(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо}\quad \|x_l\|_E\leqslant r_{n-1},\quad l=\overline{1,m},\\ \omega_{1,n-1}(x)g_{n-1}(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо}\quad r_{n-1}<\|x_l\|_E\leqslant r_{n-1}+1,\quad l=\overline{1,m},\\ \omega_{2,n-1}(x)\sum\limits_{k=1}^{m}A_{k,n}(t)x_k, & \text{якщо}\quad r_{n-1}+1<\|x_l\|_E\leqslant r_{n-1}+2,\ l=\overline{1,m},\\ \sum\limits_{k=1}^{m}A_{k,n}(t)x_k, & \text{якщо}\quad \|x_l\|_E> r_{n-1}+2,\quad l=\overline{1,m}. \end{cases}$$

Завдяки співвідношенню

$$\sup_{t\in\mathbb{R},x_1\in E,\ldots,x_m\in E}\left\|g_n(t,x_1,\ldots,x_m)-\sum_{k=1}^{m}A_{k,n}(t)x_k\right\|_E<+\infty$$

існує таке число $r_n>r_{n-1}+3$, що виконується нерівність

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E\leqslant r_n,\ldots,\|x_m\|_E\leqslant r_n}\left\|g_n(t,x_1,\ldots,x_m)-\sum_{k=1}^{m}A_{k,n}(t)x_k\right\|_E\leqslant\frac{r_n}{a_n}-H_n. \tag{25}$$

Відображення $g\colon \mathbb{R}\times E^m\to E$ визначимо за допомогою формули

$$g(t,x_1,\ldots,x_m)=\begin{cases} g_1(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо}\ \ \|x_l\|_E\leqslant r_1,\quad l=\overline{1,m},\\ g_2(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо}\ \ r_1<\|x_l\|_E\leqslant r_2,\quad l=\overline{1,m},\\ g_3(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо}\ \ r_2<\|x_l\|_E\leqslant r_3,\quad l=\overline{1,m},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ g_n(t,x_1,\ldots,x_m), & \text{якщо}\ \ r_{n-1}<\|x_l\|_E\leqslant r_n,\quad l=\overline{1,m},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Для цього відображення, очевидно, виконуються співвідношення (20) і умова А, оскільки

$$g(t,x_1,\ldots,x_m)=g_n(t,x_1,\ldots,x_m),$$

якщо $\|x_l\|_E\leqslant r_n$, $l=\overline{1,m}$ (співвідношення (20) випливає із співвідношення (25)).

Теорему 3 доведено.

Очевидно, що за допомогою кожного побудованого в доведенні теореми 3 відображення g можна визначити формулою (1) диференціальний оператор $\mathscr{F}$, до якого застосовна теорема 1.

6. Застосування теореми 1. У випадку локальної апроксимації нелінійних операторів лінійними регулярними операторами застосування тверджень, аналогічних теоремі 1, наведено в [9, 10]. Наведемо деякі застосування теореми 1 у випадку локальної апроксимації оператора $\mathscr{F}$ за допомогою лінійних слабкорегулярних операторів.

6.1. Випадок лінійних рівнянь. Розглянемо довільну скінченну послідовність $Q = (Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_m(t))$, де $Q_k(t)$, $k = \overline{0, m-1}$, — неперервні й обмежені на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E,E)$, і відповідний лінійний неперервний оператор $\mathscr{L}_Q\colon C^m \to C^0$, що визначаються формулою

$$(\mathscr{L}_Q x)(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \sum_{k=1}^{m} Q_k(t) \frac{d^{k-1}x(t)}{dt^{k-1}}, \quad x \in C^m, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Справджується наступне твердження.

Теорема 4. *Для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $A \in \mathcal{G}_m$, що*

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant r, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant r} \left\| \sum_{k=1}^{m} Q_{k,n}(t) x_k - \sum_{k=1}^{m} A_{k,n}(t) x_k \right\|_E \leqslant \frac{r}{a} - H, \tag{26}$$

де a — число, що визначається рівністю (8), *тоді і тільки тоді, коли оператор $\mathscr{L}_Q$ є слабкорегулярним.*

***Зауваження* 1.** Нерівність (26) рівносильна нерівності

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant 1, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant 1} \left\| \sum_{k=1}^{m} Q_{k,n}(t) x_k - \sum_{k=1}^{m} A_{k,n}(t) x_k \right\|_E \leqslant \frac{1}{a} - \frac{H}{r}. \tag{27}$$

***Доведення теореми* 4.** Якщо для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $A \in \mathcal{G}_m$, що виконується нерівність (26), то на підставі теоремі 1 $R(\mathscr{L}_Q) = C^0$. Тому оператор $\mathscr{L}_Q\colon C^m \to C^0$ є слабкорегулярним.

Навпаки, якщо оператор $\mathscr{L}_Q$ є слабкорегулярним, то для $A = Q$ буде виконуватися нерівність (26) для всіх $H > 0$ і $r > 0$, для яких $r - Ha > 0$.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Оператор $\mathscr{L}_Q\colon C^m \to C^0$ є слабкорегулярним тоді і тільки тоді, коли існує елемент $A \in \mathcal{G}_m$, для якого*

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant 1, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant 1} \left\| \sum_{k=1}^{m} Q_{k,n}(t) x_k - \sum_{k=1}^{m} A_{k,n}(t) x_k \right\|_E < \frac{1}{a}. \tag{28}$$

Доведення. Нехай для деякого $A \in \mathcal{G}_m$ виконується нерівність (28). Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{1}{a} - \sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant 1, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant 1} \left\| \sum_{k=1}^{m} Q_{k,n}(t) x_k - \sum_{k=1}^{m} A_{k,n}(t) x_k \right\|_E > \frac{H}{r}.$$

Тоді справджуватиметься нерівність (27) і, отже, нерівність (26). Тому за теоремою 4 оператор $\mathscr{L}_Q\colon C^m \to C^0$ є слабкорегулярним.

Навпаки, якщо оператор $\mathscr{L}_Q\colon C^m \to C^0$ є слабкорегулярним, то за теоремою 4 для кожного числа $H > 0$ існують число $r > 0$ і елемент $A \in \mathcal{G}_m$, для яких виконуватиметься нерівність (26) і, отже, нерівність (27). Із (27) випливає (28).

Теорему 5 доведено.

6.2. Малі на нескінченності збурення лінійних рівнянь. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + \sum_{k=1}^{m} A_k(t) \frac{d^{k-1}x(t)}{dt^{k-1}} + f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}\right) = h(t), \qquad (29)$$

де $A_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, — неперервні й обмежені на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E, E)$, $f\colon \mathbb{R} \times E^m \to E$ — відображення, що задовольняє умову A, і $h \in C^0$. Також розглянемо лінійний неперервний оператор $\mathscr{L}_A\colon C^m \to C^0$, що визначається рівністю (3).

Окремим випадком теореми 1 є наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай оператор $\mathscr{L}_A\colon C^m \to C^0$ є слабкорегулярним і відображення $f\colon \mathbb{R} \times E^m \to E$ задовольняє умову* A *та співвідношення*

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant r, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant r} \|f(t, x_1, \ldots, x_m)\|_E}{r} < \frac{1}{a}, \qquad (30)$$

де a — число, що визначається рівністю (8).

Тоді диференціальне рівняння (29) *для кожної функції $h \in C^0$ має хоча б один розв'язок $x \in C^m$.*

Справді, завдяки умовам теореми для кожного числа $H > 0$ існує таке число $r > 0$, що виконується співвідношення

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|x_1\|_E \leqslant r, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant r} \|f(t, x_1, \ldots, x_m)\|_E \leqslant \frac{r}{a} - H,$$

аналогічне нерівності (7). Тому на підставі теореми 1 справджується твердження теореми 6.

***Зауваження* 2.** Співвідношення (30) виконується, якщо

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ x_1 \in E, \ldots, x_m \in E} \|f(t, x_1, \ldots, x_m)\|_E < +\infty. \qquad (31)$$

***6.3. Приклади. Приклад* 1.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + (\operatorname{th} t)\, l(x(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \qquad (32)$$

де

$$\operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

і

$$l(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & \text{якщо} \quad |x| \geqslant e, \\ x, & \text{якщо} \quad |x| < e. \end{cases}$$

Покажемо, що це рівняння для кожного $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Використаємо слабкорегулярні оператори $\mathscr{L}_m\colon C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $m \in [1, +\infty)$, що визначаються за допомогою формули

$$(\mathscr{L}_m z)(t) = \frac{dz(t)}{dt} + m(\operatorname{th} t) z(t), \quad z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що $\ker \mathscr{L}_m = \{\lambda(\operatorname{ch} t)^{-m}\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$, де

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Визначимо оператори $\mathscr{P}_{l,m}\colon C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $l = \overline{1,2}$, за допомогою рівностей

$$(\mathscr{P}_{1,m}x)(t) = x(0)(\operatorname{ch} t)^{-m}, \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$(\mathscr{P}_{2,m}x)(t) = x(t) - x(0)(\operatorname{ch} t)^{-m}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що $\mathscr{P}_{l,m}^2 = \mathscr{P}_{l,m}$, $l = \overline{1,2}$, і $\mathscr{P}_{1,m} + \mathscr{P}_{2,m} = I$ (I — одиничний оператор). Тому ці оператори є проекторами в $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ і простори

$$\ker \mathscr{L}_m = \mathscr{P}_{1,m}C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{\lambda(\operatorname{ch} t)^{-m}\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$$

і

$$X_{\mathscr{L}_m} = \mathscr{P}_{2,m}C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

є взаємно доповняльними. Тоді оператор $\mathscr{L}_m|_{X_{\mathscr{L}_m}} : X_{\mathscr{L}_m} \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ має обернений неперервний оператор $\left(\mathscr{L}_m|_{X_{\mathscr{L}_m}}\right)^{-1} : C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to X_{\mathscr{L}_m}$. Легко перевірити, що оператор $\left(\mathscr{L}_m|_{X_{\mathscr{L}_m}}\right)^{-1}$ подається у вигляді

$$\left(\left(\mathscr{L}_m|_{X_{\mathscr{L}_m}}\right)^{-1} y\right)(t) = \int\limits_0^t \left(\frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} t}\right)^m y(s)\, ds, \quad y \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Покажемо, що існує таке число $r_H \geqslant e$, що виконується нерівність

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ |x|\leqslant r_H} |\operatorname{ch} t\, l(x) - \operatorname{ch} t\,(\ln r_H)x| \leqslant \frac{r_H}{\left\|\left(\mathscr{L}_{\ln r_H}|_{X_{\mathscr{L}_{\ln r_H}}}\right)^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))}} - H. \tag{34}$$

Справді, на підставі методів математичного аналізу

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ |x|\leqslant r_H} |\operatorname{ch} t\, l(x) - \operatorname{ch} t\,(\ln r_H)x| = \max_{|x|\leqslant r_H} |l(x) - (\ln r_H)x| = \frac{r_H}{e}.$$

Оскільки також

$$\left\|\left(\mathscr{L}_{\ln r_H}|_{X_{\mathscr{L}_{\ln r_H}}}\right)^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))} =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R},\ \|y\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}=1} \left|\int\limits_0^t \left(\frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} t}\right)^{\ln r_H} y(s)\, ds\right| =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\int\limits_0^t \left(\frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} t}\right)^{\ln r_H} ds\right| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} t}\, ds\right| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\operatorname{th} t| = 1$$

(тут враховано (33) і те, що $\ln r_H \geqslant 1$), то виконується нерівність (34), тому що $\dfrac{r_H}{e} \leqslant r_H - H$, якщо $r_H \geqslant \dfrac{eH}{e-1}$.

Отже, для диференціального рівняння (32) виконуються умови теореми 1. Тому це рівняння для кожного $h \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Приклад 2. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + (\operatorname{arctg} t)\, x(t) + f(t, x(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{35}$$

де $f(t,x)$ — довільна неперервна й обмежена на $\mathbb{R}^2$ функція зі значеннями в $\mathbb{R}$ і $h \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. На підставі теореми 6 рівняння (35) для кожної функції $h \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, оскільки оператор $\mathscr{L}\colon C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, що визначається формулою (5), є слабкорегулярним і для $f(t,x)$ виконується співвідношення (31).

1. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
3. *Мухамадиев Э., Нажмиддинов Х., Садовский Б. Н.* Применение принципа Шаудера – Тихонова в задаче об ограниченных решениях дифференциальных уравнений // Функцион. анализ и его прил. – 1972. – **6**, вып. 3. – С. 83 – 84.
4. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.
5. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.
6. *Перов А. И., Коструб И. Д.* Метод направляющих функций в задаче о нелинейных почти-периодических колебаниях // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Физика, математика. – 2002. – № 1. – С. 163 – 171.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2009. – Вип. 454. – С. 88 – 94.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 109 – 115.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541 – 1556.
10. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103 – 126.
11. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
13. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
14. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
15. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443 – 460.
16. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических *c*-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**(158), № 4(12). – С. 483 – 501.
17. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление *c*-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 34 – 37.
18. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**(172), № 1(5). – С. 86 – 104.
19. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
20. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно *c*-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
21. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.

Одержано 10.05.11