УДК 517.951.2

Т. Д. Джураев
(Ин-т математики и информ. технологий Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент),
Ю. П. Апаков (Наманган. инж.-пед. ин-т, Узбекистан)

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, СОДЕРЖАЩЕГО ВТОРУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ

We construct the fundamental solution of a third-order equation with multiple characteristics that contains the second time derivative. We obtain estimates for large values of an argument and investigate some properties of the fundamental solution which are necessary to solve boundary-value problems.

Побудовано фундаментальний розв'язок для рівняння третього порядку з кратними характеристиками, яке містить другу похідну за часом. Одержано оцінки при великих значеннях аргументу та вивчено деякі властивості фундаментального розв'язку, необхідні для розв'язання крайових задач.

1. Введение. Уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$U_{xxx} - U_{yy} = 0 \tag{1}$$

впервые было рассмотрено в работах $[1-3]$. Затем полученные результаты были обобщены для уравнения $(2n+1)$-го порядка в работе [4]. С помощью суперпозиции специально подобранных элементарных решений и асимптотического метода были построены фундаментальные решения, которые при $n = 1$ имеют вид [4]

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} f(t), \qquad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} \varphi(t),$$

где

$$f(t) = \frac{3}{2} t^{1/2} \int_t^{\infty} \tau^{-3/2} f^*(\tau) d\tau + c^+, \quad t > 0,$$

$$f(t) = \frac{3}{2} |t|^{1/2} \int_{-\infty}^{t} |\tau|^{-3/2} f^*(\tau) d\tau + c^-, \quad t < 0,$$

$$\varphi(t) = \frac{3}{2} |t|^{1/2} \int_{-\infty}^{t} |\tau|^{-3/2} \varphi^*(\tau) d\tau + c, \quad t < 0,$$

$$f^*(t) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{2}} + \lambda t\right) d\lambda, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$\varphi^*(t) = \int_0^{\infty} \left[\exp\left(\lambda t - \lambda^{3/2}\right) + \exp\left(-\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{2}} + \lambda t\right)\right] d\lambda, \quad t < 0,$$

$$t = (x - \xi)|y - \eta|^{-2/3},$$

$c^{\pm}$, c — константы.

Из этих фундаментальных решений видно, что ядра содержат двойной несобственный интеграл, поэтому при исследовании необходимо проводить громоздкие вычисления.

В работе [5] построены фундаментальные решения уравнения (1), выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, которые имеют вид

$$
\begin{aligned}
U(x,y;\xi,\eta) &= |y-\eta|^{1/3} f(t), \quad -\infty < t < \infty, \\
V(x,y;\xi,\eta) &= |y-\eta|^{1/3} \varphi(t), \quad t < 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь

$$
f(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi} t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right),
$$

$$
\varphi(t) = \frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi} t\Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \qquad \tau = \frac{4}{27} t^3, \quad t = \frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}},
$$

$\Psi(a,b;x)$, $\Phi(a,b;x)$ — вырожденные гипергеометрические функции (см. [6, 7]).

В данной работе получены оценки фундаментальных решений (2) при больших значениях аргумента и изучены некоторые свойства, необходимые для решения краевых задач.

2. Схема построения фундаментального решения и формулировки основных результатов. Для уравнения (1) рассмотрим следующие линейные задачи.

Задача A. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$
u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}
$$

Задача B. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$
u(0,y) = 1, \qquad u(x,0) = 0.
$$

Решение. Введем новую переменную $t = xy^{-2/3}$. Вычисляя производные

$$
u_{xxx} = y^{-2} u'''(t), \qquad u_{yy} = t_y^2 u''(t) + t_{yy} u'(t)
$$

и подставляя в уравнение (1), получаем

$$
u''' - \frac{4}{9} t^2 u'' - \frac{10}{9} t u' = 0.
$$

Полагая $u'(t) = c\varphi(t)$, имеем

$$
\varphi'' - \frac{4}{9} t^2 \varphi' - \frac{10}{9} t\varphi = 0. \tag{3}
$$

Краевые условия для задачи A имеют вид

$$
u(-\infty) = 0, \qquad u(+\infty) = 1.
$$

Отсюда получаем

$$u(t) = c\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)d\tau, \quad c = \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)d\tau\right]^{-1}.$$

Краевые условия для задачи B имеют вид

$$u(-\infty) = 0, \quad u(0) = 1,$$

откуда находим

$$u(t) = c\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)d\tau, \quad c = \left[\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(\tau)d\tau\right]^{-1}.$$

Переходя к новым переменным по формуле

$$\varphi(t) = tZ(\xi), \qquad \xi = \frac{4}{27}t^3,$$

приходим к уравнению

$$\xi Z'' + \left(\frac{4}{3} - \xi\right)Z' - \frac{7}{6}Z = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) является вырожденным гипергеометрическим уравнением, его линейно независимые решения имеют вид (см. [7, с. 321])

$$Z_1(\xi) = \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \qquad Z_2(\xi) = \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right).$$

Возвращаясь к старым переменным, находим выражения для $\varphi(y)$:

$$\varphi_1(t) = t\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \qquad \varphi_2(t) = t\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \qquad \xi = \frac{4}{27}t^3.$$

При решении линейных задач в [5] получены функции источника

$$\begin{gathered} U^*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{|y-\eta|^{2/3}}f^*(t), \quad -\infty < t < +\infty, \\ V^*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{|y-\eta|^{2/3}}\varphi^*(t), \quad t < 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$f^*(t) = \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}}t\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27}t^3\right), \quad -\infty < t < \infty,$$

$$\varphi^*(t) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3}\pi}t\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27}t^3\right), \quad t < 0, \quad t = \frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}},$$

и фундаментальные решения

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y-\eta|^{1/3}f(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = |y-\eta|^{1/3}\varphi(t), \quad t < 0,$$

где

$$f(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \qquad \varphi(t) = \frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3\pi}} t\Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right),$$

$$\tau = \frac{4}{27}t^3, \quad t = \frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}},$$

$\Psi(a,b;x)$, $\Phi(a,b;x)$ — вырожденные гипергеометрические функции (см. [6, 7]).

Функции $U(x,y;\xi,\eta)$, $V(x,y;\xi,\eta)$ связаны с функциями $U^*(x,y;\xi,\eta)$, $V^*(x,y;\xi,\eta)$ соотношениями

$$U_y(x,y;\xi,\eta) = U^*(x,y;\xi,\eta)\,\mathrm{sgn}(y-\eta),$$

$$V_y(x,y;\xi,\eta) = V^*(x,y;\xi,\eta)\,\mathrm{sgn}(y-\eta).$$

В работе [5] вычислены следующие интегралы:

$$\int\limits_0^\infty f^*(\tau)d\tau = \frac{1}{3}, \qquad \int\limits_{-\infty}^0 f^*(\tau)d\tau = \frac{2}{3},$$
$$\int\limits_{-\infty}^\infty f^*(\tau)d\tau = 1, \qquad \int\limits_{-\infty}^0 \varphi^*(\tau)d\tau = 1. \tag{6}$$

Для функций $f(t)$ и $f^*(t)$, а также $\varphi(t)$ и $\varphi^*(t)$ имеют место соотношения [5]

$$f''(t) + \frac{2}{3}tf^*(t) = 0, \qquad \varphi''(t) + \frac{2}{3}t\varphi^*(t) = 0. \tag{7}$$

Для фундаментального решения справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *При $|t| \to \infty$ для фундаментального решения $U(x,y;\xi,\eta)$ выполняются следующие оценки*:

$$\left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} U(x,y;\xi,\eta)\right| \le C_{hk}|y-\eta|^{(1-(-1)^k)/2}|x-\xi|^{-1/2\left\{2h+3k-1+(3/2)[1-(-1)^k]\right\}}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для любой функции $\varphi(x) \in C[a;b]$ при любых $x \ne \xi$, $y \ne \eta$*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ \eta\to y}} \int\limits_a^b U^*(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x_0). \tag{9}$$

Теорема 3. *При $\omega(y) \in C[0,l]$ имеют место равенства*

$$\lim_{x\to\xi} \int\limits_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\omega(\eta)d\eta = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}\omega(y), & x > \xi, \\ \dfrac{4}{3}\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi, \end{cases} \tag{10}$$

$$\lim_{x\to\xi} \int\limits_0^l V_{xx}(x,y;\xi,\eta)\omega(\eta)d\eta = \begin{cases} 2\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi. \end{cases} \tag{11}$$

3. Доказательство полученных результатов. ***Доказательство теоремы* 1.** Используя оценки (см. [6, с. 226; 7, с. 322])

$$\Psi(a,c;x) = x^{-a}\left[1+O(|x^{-1}|)\right], \quad \operatorname{Re} x \to \pm\infty,$$
$$\Phi(a,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-x)^{-a}\left[1+O(|x^{-1}|)\right], \quad \operatorname{Re} x \to -\infty, \tag{12}$$

и формулы дифференцирования вырожденной гипергеометрической функции (см. [7, с. 324])

$$\frac{d^n}{dx^n}\Psi(a,c;x) = (-1)^n (a)_n \Psi(a+n,c+n;x),$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\Phi(a,c;x) = \frac{(a)_n}{(c)_n}\Phi(a+n,c+n;x), \tag{13}$$

получаем необходимые оценки.

С учетом оценок для $\Psi(a,c;x)$ из (12) оценим функцию $f^*(t)$ при $|t|\to\infty$:

$$|f^*(t)| \le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3}\pi}\left|t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right| \le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3}\pi}|t|\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-7/6} \le C_1|t|^{-5/2}.$$

Дифференцируя $f^*(t)$ по формуле (13), имеем

$$f^{*\prime}(t) = \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3}\pi}\left[\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right) + t\Psi'\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right] =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3}\pi}\left[\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right) - \frac{91}{81}t^3\Psi\left(\frac{13}{6},\frac{7}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right].$$

С учетом (12) получаем оценку

$$|f^{*\prime}(t)| \le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3}\pi}\left[\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-7/6} + \frac{91}{81}\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-13/6}|t|^3\right] \le$$
$$\le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3}\pi}\left[C_{11}|t|^{-7/2} + C_{12}|t|^{-7/2}\right] \le C_1|t|^{-5/2-1}.$$

Аналогично находим

$$|f^{*(\nu)}(t)| \le C_{1\nu}|t|^{-5/2-\nu}, \quad \nu = 0,1,2,\ldots, \quad |t|\to\infty. \tag{14}$$

С учетом оценок для $\Phi(a,c;x)$ из (12) оценим функцию $\varphi^*(t)$ при $t\to-\infty$:

$$|\varphi^*(t)| \le \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\left|t\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right| \le$$
$$\le \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}|t|\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(1/6)}\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-7/6} \le C_1|t|^{-5/2}.$$

Дифференцируя $\varphi^*(t)$ по формуле (13), имеем

$$\varphi^{*\prime}(t) = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\left[\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right) + \frac{13}{36}t^3\Phi\left(\frac{13}{6},\frac{7}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right].$$

С помощью (12) получаем оценки

$$\left|\varphi^{*\prime}(t)\right| \leq \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\left[\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(1/6)}\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-7/6} + \frac{13}{36}\frac{\Gamma(7/3)}{\Gamma(1/6)}\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-13/6}|t|^3\right] \leq$$

$$\leq \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}}\left[C_{21}t^{-7/2} + C_{22}t^{-7/2}\right] \leq C_2 t^{-5/2-1}.$$

Аналогично имеем

$$|\varphi^{*(\nu)}(t)| \leq C_{2\nu}|t|^{-5/2-\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,\ t \to -\infty. \tag{15}$$

Оценки для функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ получим в виде

$$\begin{aligned} &|f^{(\nu)}(t)| \leq C_{3\nu}|t|^{-1/2-\nu} \quad \text{при} \quad |t| \to \infty, \\ &|\varphi^{(\nu)}(t)| \leq C_{4\nu}|t|^{-1/2-\nu} \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \end{aligned} \tag{16}$$

Теперь установим оценки фундаментальных решений.

Учитывая (12), при $|t| \to \infty$ имеем

$$|U(x,y;\xi,\eta)| \leq |y-\eta|^{1/3}|f(t)| \leq |y-\eta|^{1/3}\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}\left|t\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}|y-\eta|^{1/3}|t|\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-1/6} \leq C_5|y-\eta|^{1/3}|t|^{1/2} \leq C_5|x-\xi|^{1/2}.$$

Дифференцируя по x, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,y;\xi,\eta) =$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}|y-\eta|^{1/3}\left[t'_x\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right) + t\Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\frac{4}{9}t^2\frac{1}{|y-\eta|^{2/3}}\right] =$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}\frac{1}{|y-\eta|^{1/3}}\left[\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right) + \frac{7}{81}t^3\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{7}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right].$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}U(x,y;\xi,\eta)\right| \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}\frac{1}{|y-\eta|^{1/3}}\left[\left|\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right| + \frac{7}{81}|t|^3\left|\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{7}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right|\right] \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}\frac{1}{|y-\eta|^{1/3}}\left[\left(\frac{4}{27}t^3\right)^{-1/6} + \frac{7}{81}|t|^3\left(\frac{4}{27}t^3\right)^{-7/6}\right] \leq$$

$$\leq C_{51}\frac{1}{|y-\eta|^{1/3}}|t|^{-1/2} = C_{51}|x-\xi|^{1/2-1}.$$

Аналогично имеем

$$\left|\frac{\partial^h}{\partial x^h} U(x,y;\xi,\eta)\right| \le C_h |x-\xi|^{1/2-h}. \tag{17}$$

Дифференцируя по y, находим

$$\frac{\partial}{\partial y} U(x,y;\xi,\eta) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} \left[\frac{1}{3}|y-\eta|^{-2/3} t\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right) + \right.$$

$$\left. +|\,y-\eta|^{1/3} t'_y \Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right) + |y-\eta|^{1/3} t\Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\frac{4}{9}t^2 t'_y\right] =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} |y-\eta|^{-2/3} t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right).$$

Оценивая при $|t|\to\infty$, получаем

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} U(x,y;\xi,\eta)\right| \le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} \left||y-\eta|^{-2/3} t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right| \le$$

$$\le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} |y-\eta|^{-2/3} t \left(\frac{4}{27}t^3\right)^{-7/6} \le C_{52} \frac{|y-\eta|}{|x-\xi|^{\frac{5}{2}}}.$$

Аналогично имеем

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k} U(x,y;\xi,\eta)\right| \le C_k |y-\eta|^{(1-(-1)^k)/2} |x-\xi|^{-1/2\left\{3k-1+(3/2)[1-(-1)^k]\right\}}. \tag{18}$$

Объединяя (17) и (18), получаем окончательные оценки для функции $U(x,y;\xi,\eta)$ при $|t|\to\infty$:

$$\left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} U(x,y;\xi,\eta)\right| \le C_{hk} |y-\eta|^{(1-(-1)^k)/2} |x-\xi|^{-1/2\left\{2h+3k-1+(3/2)[1-(-1)^k]\right\}}. \tag{19}$$

Теорема 1 доказана.

Для функции $V(x,y;\xi,\eta)$таким же образом получим аналогичные оценки при $\dfrac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}} \to -\infty$.

***Доказательство теоремы* 2.** Будем считать, что $y>\eta$ (при $y<\eta$ доказательство аналогично). Вследствие непрерывности $\varphi(x)$ в точке x_0 существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\bigl|\varphi(x)-\varphi(x_0)\bigr| < \varepsilon,$$

если

$$|x-x_0| < \delta.$$

Разбив промежуток интегрирования на части, представим интеграл в виде трех слагаемых:

$$\int_a^{x_1} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)\varphi(\xi)d\xi + \int_{x_1}^{x_2} \ldots d\xi + \int_{x_2}^{b} \ldots d\xi = I_1+I_2+I_3,$$

где

$$x_1 = x_0 - \delta, \qquad x_2 = x_0 + \delta.$$

Главное слагаемое этой суммы I_2 можно представить в виде

$$\varphi(x_0) \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right) \big[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)\big] d\xi =$$

$$= I_{21} + I_{22}.$$

Интеграл I_{21} вычисляется непосредственно, если выполнить замену переменных

$$t = \frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}, \quad \xi = x - t(y-\eta)^{2/3}, \qquad d\xi = -(y-\eta)^{2/3} dt.$$

Тогда

$$I_{21} = \varphi(x_0) \int\limits_{\frac{x-x_2}{(y-\eta)^{2/3}}}^{\frac{x-x_1}{(y-\eta)^{2/3}}} f^*(t) dt.$$

Как только $|x - x_0| < \delta$, верхний предел становится положительным, а нижний — отрицательным, и при $\eta \to y - 0$ верхний предел стремится к $+\infty$, а нижний — к $-\infty$. Отсюда, учитывая (6), получаем

$$\lim_{\substack{\eta \to y-0 \\ x \to x_0}} I_{21} = \varphi(x_0).$$

Покажем, что остальные интегралы I_{22}, I_1, I_3 стремятся к нулю.

Оценим прежде всего интеграл I_{22} :

$$|I_{22}| \leq \int\limits_{x_1}^{x_2} \left| \frac{1}{(y-\eta)^{\frac{2}{3}}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right) \right| |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| \, d\xi.$$

Поскольку $x_1 < \xi < x_2$, то $|\xi - x_0| < \delta$, поэтому

$$|I_{22}| \leq \varepsilon \int\limits_{\frac{x-x_2}{(y-\eta)^{2/3}}}^{\frac{x-x_1}{(y-\eta)^{2/3}}} \big|f^*(t)\big| dt.$$

Учитывая оценку (10) для функции $f^*(t)$, получаем

$$\lim_{\substack{\eta \to y-0 \\ x \to x_0}} I_{22} = 0.$$

Оценим

$$|I_1| \le \left| \int\limits_a^{x_1} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)\varphi(\xi)d\xi \right| \le N \int\limits_{\frac{x-x_1}{(y-\eta)^{2/3}}}^{\frac{x-a}{(y-\eta)^{2/3}}} \big|f^*(t)\big|dt \to 0$$

при $x \to x_0$, $\eta \to y - 0$ (в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ на отрезке следует ее ограниченность, т. е. $|\varphi(x)| \le N$), так как если $x \to x_0$, то $x - x_1 > 0$, а если $\eta \to y - 0$, то верхний и нижний пределы стремятся к $+\infty$.

Аналогично

$$|I_3| \le \left| \int\limits_{x_2}^{b} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)\varphi(\xi)d\xi \right| \le N \int\limits_{\frac{x-b}{(y-\eta)^{2/3}}}^{\frac{x-x_2}{(y-\eta)^{2/3}}} |f^*(t)|\,dt \to 0$$

при $x \to x_0$, $\eta \to y - 0$, что и требовалось установить.

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Установим равенство (10):

$$J = \int\limits_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\omega(\eta)d\eta =$$

$$= \omega(y)\int\limits_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)d\eta + \int\limits_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\big[\omega(\eta)-\omega(y)\big]d\eta =$$

$$= J_1(x,y) + J_2(x,y).$$

Используя равенство (7), вычисляем $J_1(x,y)$:

$$J_1(x,y) = \omega(y)\int\limits_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)d\eta =$$

$$= \omega(y)\int\limits_0^l \frac{1}{|y-\eta|} f''\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)d\eta =$$

$$= \omega(y)\int\limits_0^l \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)d\eta =$$

$$= \omega(y)\left[\int\limits_0^y + \int\limits_y^l\right]\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)d\eta.$$

Выполняя замену переменных интегрирования по формуле

$$t = \frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}, \qquad dt = \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}}\,\mathrm{sgn}(y-\eta)d\eta,$$

имеем

$$J_1(x,y) = \omega(y) \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \left[\int\limits_{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}}^{\frac{x-\xi}{|y-l|^{2/3}}} - \int\limits_{\frac{x-\xi}{y^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}} \right] f^*(t)dt.$$

Переходя к пределу при $x > \xi$ и используя равенство (6), получаем

$$\lim_{x\to\xi+0} J_1(x,y) = -\omega(y) \int\limits_0^{+\infty} f^*(t)dt + \omega(y) \int\limits_{+\infty}^{0} f^*(t)dt =$$

$$= -2\omega(y) \int\limits_0^{+\infty} f^*(t)dt = -\frac{2}{3}\omega(y).$$

Переходя к пределу при $x < \xi$, имеем

$$\lim_{x\to\xi-0} J_1(x,y) = -\omega(y) \int\limits_0^{-\infty} f^*(t)dt + \omega(y) \int\limits_{-\infty}^{0} f^*(t)dt =$$

$$= 2\omega(y) \int\limits_{-\infty}^{0} f^*(t)dt = \frac{4}{3}\omega(y).$$

Рассмотрим $J_2(x,y)$:

$$J_2\left(x,y\right) = \int\limits_0^l U_{xx}\left(x,y;\xi,\eta\right)\left[\omega(\eta) - \omega(y)\right]d\eta =$$

$$= \int\limits_0^l \frac{1}{|y-\eta|} f''\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)\left[\omega\left(\eta\right) - \omega(y)\right]d\eta =$$

$$= \int\limits_0^l \left(-\frac{2}{3}\right) \frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)\left[\omega\left(\eta\right) - \omega\left(y\right)\right]d\eta =$$

$$= \left[\int\limits_0^y + \int\limits_y^l\right]\left(-\frac{2}{3}\right) \frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)\left[\omega\left(\eta\right) - \omega(y)\right] d\eta.$$

Выполняя замену переменных интегрирования, находим

$$J_2\left(x,y\right) = -\lim_{\varepsilon_1\to+0} \int\limits_{\frac{x-\xi}{y^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}} f^*(t)\left[\omega\left(y - \left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right) - \omega(y)\right] dt +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_1\to+0} \int\limits_{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}}^{\frac{x-\xi}{|y-l|^{2/3}}} f^*(t)\left[\omega\left(y - \left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right) - \omega(y)\right] dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\int\limits_{\frac{x-\xi}{y^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}} + \int\limits_{\frac{x-\xi}{|y-l|^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}}\right] f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt.$$

Пусть $\omega(y)\in C[0,l]$, тогда при $\left(\dfrac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}<\delta$, т. е. при $t>\dfrac{x-\xi}{\delta^{3/2}}$, имеем

$$\left|\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right|<\varepsilon.$$

Учитывая это, получаем

$$J_2(x,y) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\int\limits_{\frac{x-\xi}{y^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}} + \int\limits_{\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}}\right] f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega\left(y\right)\right]dt-$$

$$-\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\int\limits_{\frac{x-\xi}{|y-l|^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}} + \int\limits_{\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}}\right] f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega\left(y\right)\right]dt.$$

Тогда

$$\left|J_2(x,y)\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{\frac{x-\xi}{y^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}} f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt\right| + \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}}\left|f^*(t)\right|\varepsilon dt+$$

$$+\left|\int\limits_{\frac{x-\xi}{|y-l|^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}} f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt\right| + \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}}^{\frac{x-\xi}{\varepsilon_1}}\left|f^*(t)\right|\varepsilon dt.$$

Переходя к пределу при $x\to\xi+0$, имеем

$$\left|J_2\left(x,y\right)\right| \le 2\varepsilon\int\limits_0^{+\infty}\left|f^*(t)\right|dt,$$

откуда с учетом оценки (14) для функции $f^*(t)$ следует $\lim\limits_{x\to\xi+0} J_2(x,y)=0$.

Аналогично при $x\to\xi-0$ получаем $J_2(x,y)\to 0$ (в обоих интегралах при $x\to\xi$ первое слагаемое равно нулю). Итак, равенство (10) доказано. Равенство (11) доказывается аналогично.

Теорема 3 доказана.

Полученные соотношение для фундаментального решения были использованы при решении краевых задач для уравнения (1) в работах [8, 9].

1. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples. Notes 1 – 3 // Ark. mat., astron. och. fys. – 1912. – **7**, № 13, 21; 1912 – 1913. – **8**, № 23.
2. *Del Vecchio E.* Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ // Mem. Real Accad. Sci. Torino. Ser. 2. – 1915. – **66**. – P. 1 – 41.
3. *Del Vecchio E.* Sur deux problemes d'integration pour les equations paraboliques $Z_{\xi\xi\xi} - Z_\eta = 0$, $Z_{\xi\xi\xi} - Z_{\eta\eta} = 0$ // Ark. mat., astron. och. fys. – 1916. – **11**.
4. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Semin mat. Univ. Padova. – 1961. – **31**. – P. 1 – 45.
5. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 18 – 26.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 2 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
7. *Справочник* по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
8. *Апаков Ю. П.* Об одном методе решения краевой задачи для квазиэллиптического уравнения // Тез. докл. междунар. конф. „Совр. пробл. вычислит. математики и мат. физики" (Москва, 16 – 18 июня 2009 г.). – С. 129 – 130.
9. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* О решении одной краевой задачи для квазиэллиптического уравнения // Укр. мат. конгр. – 2009 // http://www.imath.kiev.ua/congress2009/.

Получено 23.06.08,
после доработки — 16.10.09