УДК 517.925

В. М. Евтухов (Одес. нац. ун-т),
А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИСЧЕЗАЮЩИХ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ РЕШЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We establish conditions for the existence of solutions of various classes of systems of quasilinear differential equations that vanish at the singular point. These classes appear in investigating the asymptotic behavior of solutions of essentially nonlinear nonautonomous differential equations of higher orders.

Встановлено умови існування зникаючих в особливій точці розв'язків різних класів систем квазілінійних диференціальних рівнянь, що виникають при дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків.

Введение. В [1 – 10] при изучении асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений высших порядков с нелинейностями типа Эмдена – Фаулера и экспоненциальными нелинейностями на одном из этапов исследования использовались результаты из работ [11, 12] о существовании исчезающих в бесконечности решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами и с почти треугольной линейной частью. Несколько другого типа результаты использовались в работе [13] при установлении асимптотических свойств решений обобщенных уравнений типа Эмдена – Фаулера. Однако при исследовании дифференциальных уравнений с нелинейностями более сложной структуры указанные выше результаты не эффективны. Например, в [14] для изучения асимптотического поведения решений дифференциального уравнения второго порядка с нелинейностью, в некотором смысле близкой к экспоненциальной, возникла необходимость получить новый результат о существовании исчезающих в бесконечности решений квазилинейной системы двух дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами.

Целью настоящей статьи является распространение результатов из работ [11, 12] на системы квазилинейных дифференциальных уравнений более общего вида, частным случаем которых является система, рассмотренная в [14].

1. Основные результаты. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j + \sum_{m=1}^{2} g_{im}(x) Y_{im}(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где $Y_{i2}(x,0,\ldots,0) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, на промежутке $[a,\omega[$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, f_i, g_{im}, $p_{ij}\colon [\alpha,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $i,j = \overline{1,n}$, $m = 1,2$, и $Y_{im}\colon \Omega^n_{ab} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $m = 1,2$, — непрерывные функции,

$$\Omega^n_{ab} = [a,\omega[\times \mathbf{R}^n_b, \qquad \mathbf{R}^n_b = \left\{ (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{R}^n\colon \ |y_i| \le b, \ i = \overline{1,n} \right\}. \tag{1.2}$$

При этом будем предполагать, что функции Y_{im}, $i = \overline{1,n}$, $m = 1,2$, удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\uparrow\omega} Y_{i1}(x, y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n_b, \tag{1.3}$$

$$\lim_{|y_1|+\ldots+|y_n|\to 0} \frac{Y_{i2}(x, y_1, \ldots, y_n)}{|y_1| + \ldots + |y_n|} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [a, \omega[. \tag{1.4}$$

Данная система дифференциальных уравнений существенно отличается от систем, рассмотренных в работах [11, 12], не только тем, что здесь $\omega \leq +\infty$, а наличием слагаемых (вообще говоря, нелинейных) с функциями Y_{i1}, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющими условиям (1.3). Не предполагая никаких дополнительных ограничений на эти функции, ниже установим результаты о существовании исчезающих в ω решений этой системы, в целом аналогичные результатам, полученным в [11, 12].

Использовав вспомогательное обозначение

$$J_{\alpha,x}(q,p) \equiv \int_\alpha^x q(\tau) \exp\left(\int_\tau^x p(s)\, ds\right) d\tau, \tag{1.5}$$

введем для системы дифференциальных уравнений (1.1) вспомогательные функции

$$E_i(\tau, x) = \exp\left[\int_\tau^x p_{ii}(s)\, ds\right], \qquad F_i(x) = J_{\alpha_i,x}(f_i, p_{ii}), \quad i = \overline{1,n},$$

$$G_{im}(x) = J_{\gamma_{im},x}(|g_{im}|, p_{ii}), \quad i = \overline{1,n}, \quad m = 1, 2, \tag{1.6}$$

$$P_{ij}(x) = J_{\beta_{ij},x}(|p_{ij}|, p_{ii}), \quad i, j = \overline{1,n}, \quad j \neq i,$$

где каждый из пределов интегрирования α_i, γ_{im}, β_{ij} равен либо a, либо ω, причем он выбирается равным ω в случае, когда соответствующий интеграл $J_{\omega a}(\cdot,\cdot)$ сходится, и a — в противном случае.

Теорема 1.1. *Пусть наряду с* (1.3) *и* (1.4) *выполняются условия*

$$\lim_{x\uparrow\omega} F_i(x) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \qquad \limsup_{x\uparrow\omega} |G_{im}(x)| < +\infty, \quad i = \overline{1,n}, \quad m = 1, 2, \tag{1.7}$$

$$\limsup_{x\uparrow\omega} |P_{ij}(x)| = P_{ij}^0 = \text{const}, \quad i, j = \overline{1,n}, \quad j \neq i, \tag{1.8}$$

и постоянные B_i^0, $i = \overline{1,n}$, *определяемые, начиная с* $i = n$, *рекуррентными соотношениями*

$$B_n^0 = \sum_{j=1}^{n-1} \left|P_{nj}^0\right|, \qquad B_i^0 = \sum_{j=1}^{i-1} \left|P_{ij}^0\right| + \sum_{j=i+1}^{n} B_j^0 \left|P_{ij}^0\right|, \quad i = \overline{1, n-1},$$

удовлетворяют неравенствам

$$B_i^0 < 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.9}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (1.1) *имеет хотя бы одно решение* $(y_j)_{j=1}^n \colon [x_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}_b^n$, $x_0 \in [a, \omega[$, *стремящееся к нулю* $(0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n)$ *при* $x \uparrow \omega$. *Более того, таких решений существует* k*-параметрическое семейство, если среди функций* $E_i(a, x)$, $i = 1, \ldots, n$, *имеется* k *функций, предел которых при* $x \uparrow \omega$ *равен нулю.*

Доказательство. Поскольку выполняются вторая группа условий (1.7) и условия (1.8), при наличии при фиксированном $i \in \{1,\ldots,n\}$ среди пределов интегрирования β_{ij}, $j=\overline{1,n}$, и γ_{im}, $m=1,2$, хотя бы одного, равного a, имеем

$$\lim_{x\uparrow\omega} E_i(a,x) = 0. \tag{1.10}$$

Поэтому в силу (1.9) для числа $q \in (B_0, 1)$, где $B_0 = \max\left\{B_i^0 \colon i=\overline{1,n}\right\}$, существуют $x' \in [a,\omega[$ и $\varepsilon_{02} > 0$ такие, что для функций $\overline{B}_i$, $i=1,\ldots,n$, определяемых (начиная с $i=n$) рекуррентными соотношениями[1]

$$\overline{B}_i(x) = n\varepsilon_{02}|G_{i2}(x)| + \sum_{j=1}^{i-1}|P_{ij}(x)| + \sum_{j=i+1}^{n}\left|J_{\beta_{ij},x}\left(\overline{B}_j|p_{ij}|, p_{ii}\right)0\right|, \quad i=\overline{n,1},$$

выполняются неравенства

$$\overline{B}_i(x) < q, \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad x \in [x',\omega[. \tag{1.11}$$

В свою очередь, для числа $\varepsilon_{02} > 0$ в силу (1.4) можно подобрать число $b_0 \in]0,b]$ так, чтобы на множестве Ω_{ab_0} выполнялись неравенства

$$\left|Y_{i2}(x,y_1,\ldots,n)\right| < \varepsilon_{02}\sum_{j=1}^{n}|y_j|, \quad i=\overline{1,n}. \tag{1.12}$$

Далее, для каждого $i \in \{1,\ldots,n\}$ такого, что имеет место (1.10), выберем произвольным образом постоянную $c_i^0 \neq 0$ и положим $c_i^0 = 0$, если (1.10) не выполняется. В силу такого выбора этих постоянных и условий (1.7), (1.8) существуют числа $x'' \in [x',\omega[$ и ε_{01} такие, что для функций $\overline{A}_i$, $i=\overline{1,n}$, определяемых (начиная с $i=n$) рекуррентными соотношениями

$$\overline{A}_i(x,c_i^0,\ldots,c_n^0) =$$

$$= |c_i^0|E_i(a,x) + |F_i(x)| + \varepsilon_{01}|G_{i1}(x)| + \sum_{j=i+1}^{n}\left|J_{\beta_{ij},x}(\overline{A}_j|p_{ij}|, p_{ii})\right|, \quad i=\overline{1,n},$$

выполняются неравенства

$$\overline{A}_i(x,c_i^0,\ldots,c_n^0) < b_0(1-q), \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad x \in [x'',\omega[. \tag{1.13}$$

Для числа $\varepsilon_{01} > 0$ подберем с учетом (1.3) число $x_0 \in [x'',\omega[$ так, чтобы на множестве Ω_{x_0b}

$$\left|Y_{i1}(x,y_1,\ldots,n)\right| < \varepsilon_{01}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{1.14}$$

Теперь определим рекуррентными соотношениями (начиная с $i=n$) функции A_i, B_i, $i=\overline{1,n}$, положив

$$A_i(x,c_i^0,\ldots,c_n^0) =$$

$$= \left|c_i^0|E_i(a,x) + |F_i(x)\right| + \varepsilon_{01}\left|\overline{G}_{i1}(x)\right| + \sum_{j=i+1}^{n}\left|J_{\overline{\beta}_{ij},x}(A_j|p_{ij}|, p_{ii})\right|,$$

[1] Здесь и всюду в дальнейшем считаем, что $\sum_{i=k}^{m} a_i = 0$ при $m < k$.

$$B_i(x) = n\varepsilon_{02}\left|\overline{G}_{i2}(x)\right| + \sum_{j=1}^{i-1}\left|\overline{P}_{ij}(x)\right| + \sum_{j=i+1}^{n}\left|J_{\overline{\beta}_{ij},x}(B_j|p_{ij}|, p_{ii})\right|, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\overline{G}_{im}$, $\overline{P}_{ij}$ — функции, полученные из G_{im}, P_{ij} заменой пределов интегрирования γ_{im}, β_{ij} соответственно на $\overline{\gamma}_{im}$, $\overline{\beta}_{ij}$, каждый из которых равен либо x_0, либо ω, причем он выбирается равным x_0, если до этого был равен a, и остается равным ω — в противном случае (при этом пределы интегрирования α_i в функциях F_i оставляем неизменными). Поскольку $a \le x' \le x'' \le x_0 < \omega$ и выполняются неравенства (1.11), (1.13), заведомо будут выполняться и неравенства

$$A_i(x, c_i^0, \ldots, c_n^0) < b_0(1-q), \quad B_i(x) < q, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad x \in [x_0, \omega[. \quad (1.15)$$

Кроме того, на множестве $\Omega_{x_0 b_0}$ имеют место неравенства (1.12), (1.14).

Установив эти факты, покажем, что система дифференциальных уравнений имеет хотя бы одно решение, определенное на промежутке $[x_0, \omega[$ и исчезающее при $x \uparrow \omega$, причем таких решений, заданных на $[x_0, \omega[$, существует k-параметрическое семейство, если среди функций $E_i(a, x)$ имеется k функций, предел которых при $x \uparrow \omega$ равен нулю.

Пусть $C_{\mathrm{loc}}([x_0, \omega[\,; \mathbf{R}^n)$ — пространство непрерывных вектор-функций $y = (y_i)_{i=1}^n \colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}^n$ с топологией равномерной сходимости на замкнутых отрезках из $[x_0, \omega[$, а S — подмножество тех из них, для которых

$$|y_i(x)| \le b_0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad x \in [x_0, \omega[.$$

Выбрав произвольным образом постоянные c_i, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющие неравенствам $0 \le |c_i| \le |c_i^0|$, рассмотрим оператор $\Phi = (\Phi_i)_{i=1}^n \colon S \longrightarrow C_{\mathrm{loc}}([x_0, \omega[\,; \mathbf{R}^n)$, определенный (снизу вверх) рекуррентными соотношениями

$$\Phi_i(y)(x) = c_i E_i(a, x) + F_i(x) + \sum_{j=1}^{i-1} J_{\overline{\beta}_{ij},x}\left(p_{ij} y_j, p_{ii}\right) +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n} J_{\overline{\beta}_{ij},x}\left(p_{ij}\Phi_j(y), p_{ii}\right) + \sum_{m=1}^{2} J_{\overline{\gamma}_{im},x}\big(g_{im}\overline{Y}_{im}(y), p_{ii}\big), \quad i = \overline{1,n}, \quad (1.16)$$

где

$$\overline{Y}_{im}(y)(x) = Y_{im}\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big).$$

Приняв во внимание введенные обозначения, условия (1.12), (1.14) и (1.15), для любого $y \in S$ последовательно, начиная с $i = n$, получим при $x \in [x_0, \omega[$ следующие оценки:

$$\left|\Phi_n(y)(x)\right| \le A_n(x, c_n^0) + b_0 B_n(x) < b_0,$$

. . . .

$$\left|\Phi_1(y)(x)\right| \le A_1(x, c_1^0, \ldots, c_n^0) + b_0 B_1(x) < b_0.$$

Отсюда следует, что $\Phi(S) \subset S$.

Далее, установим непрерывность оператора Φ.

Пусть $y^k = (y_{jk})_{j=1}^n \in S$, $k = 0, 1, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to+\infty} y^k(x) = y^0(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0, \omega[$. Тогда, очевидно, что и $\lim\limits_{k\to+\infty} \overline{Y}_{im}(y^k)(x) = \overline{Y}_{im}(y^0)(x)$, $i = \overline{1,n}$, равномерно на любом конечном отрезке промежутка $[x_0, \omega[$.

Покажем, что при каждом фиксированном $i \in \{1, \ldots, n\}$ для любых $\varepsilon > 0$ и $x_* \in]x_0, \omega[$ существует натуральное число K_i такое, что

$$\left|\Phi_i(y^k)(x) - \Phi_i(y^0)(x)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > K_i \quad \text{и} \quad x \in [x_0, x_*]. \tag{1.17}$$

Отсюда и будет следовать, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \Phi(y^k)(x) = \Phi(y^0)(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0, \omega[$, т. е. оператор Φ будет непрерывным.

Доказательство будем проводить последовательно, снизу вверх, начиная с $i = n$. При этом будем учитывать, что для некоторого $M > 0$ выполняются в силу условий (1.7) и (1.8) неравенства

$$\left|\overline{P}_{ij}(x)\right| < M, \quad i, j = \overline{1,n},$$
$$\left|\overline{G}_{im}(x)\right| < M, \quad i = \overline{1,n}, \quad m = 1, 2, \quad \text{при} \quad x \in [x_0, \omega[.$$

Выберем произвольным образом $\varepsilon > 0$ и $x_* \in]x_0, \omega[$. В силу (1.16) имеем

$$\left|\Phi_n(y^k)(x) - \Phi_n(y^0)(x)\right| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{n-1} \left| J_{\overline{\beta}_{nj},x}\left(|p_{nj}||y_{jk} - y_{j0}|, p_{nn}\right)\right| +$$
$$+ \sum_{m=1}^{2} \left| J_{\overline{\gamma}_{nm},x}\left(|g_{nm}| \left|\overline{Y}_{nm}(y^k) - \overline{Y}_{nm}(y^0)\right|, p_{nn}\right)\right|.$$

Докажем сначала существование такого натурального $K_{n1}(\varepsilon)$, что

$$\left| J_{\overline{\gamma}_{n1},x}\left(|g_{n1}| \left|\overline{Y}_{n1}(y^k) - \overline{Y}_{n1}(y^0)\right|,\ p_{nn}\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad k > K_{n1} \quad \text{и} \quad x \in [x_0, x_*]. \tag{1.18}$$

При этом рассмотрим два возможных случая: $\overline{\gamma}_{n1} = x_0$ и $\overline{\gamma}_{n1} = \omega$.

В случае, когда $\overline{\gamma}_{n1} = x_0$, выбираем, учитывая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \tilde{Y}_{n1}(y^k)(x) = \tilde{Y}_{n1}(y^0)(x)$ равномерно на любом конечном отрезке промежутка $[x_0, \omega[$, натуральное число $K_{n1}(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\overline{Y}_{n1}(y^k)(x) - \overline{Y}_{n1}(y^0)(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3\,M} \quad \text{при} \quad k > K_{n1} \quad \text{и} \quad x \in [x_0, x_*].$$

При таком выборе K_{n1} получим

$$\left| J_{x_0,x}\left(|g_{n1}| \left|\overline{Y}_{n1}(y^k) - \overline{Y}_{n1}(y^0)\right|, p_{nn}\right)\right| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3\,M}\left|\overline{G}_{n1}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad k > K_{n1} \quad \text{и} \quad x \in [x_0, x_*].$$

Если $\overline{\gamma}_{n1} = \omega$, то сначала выбираем число $x_1 \in]x_*, \omega[$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{x_1}^{\omega} |g_{n1}(\tau)| E_n(\tau, x_0)\, d\tau \le \frac{\varepsilon}{12\, \varepsilon_{01}\, M} \int\limits_{x_*}^{\omega} |g_{n1}(\tau)| E_n(\tau, x_0)\, d\tau,$$

а затем, учитывая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \tilde{Y}_{n1}(y^k)(x) = \tilde{Y}_{n1}(y^0)(x)$ равномерно на любом конечном отрезке промежутка $[x_0, \omega[$, подбираем натуральное число $K_{n1}(\varepsilon)$ так, чтобы

$$|\overline{Y}_{n1}(y^k)(x) - \overline{Y}_{n1}(y^0)(x)| < \frac{\varepsilon}{6\, M} \quad \text{при} \quad k > K_{n1} \quad \text{и} \quad x \in [x_0, x_1].$$

Тогда при $k > K_{n1}$ и $x \in [x_0, x_*]$ с учетом неравенства (1.14) будем иметь

$$\Big| J_{\omega,x}\left(|g_{n1}| \left| \overline{Y}_{n1}(y^k) - \overline{Y}_{n1}(y^0) \right|,\, p_{nn} \right) \Big| =$$

$$= E_n(x_0, x) \left(\int\limits_{x}^{x_1} + \int\limits_{x_1}^{\omega} \right) |g_{n1}(\tau)| E_n(\tau, x_0) \big| \overline{Y}_{n1}(y^k)(\tau) - \overline{Y}_{n1}(y^0)(\tau) \big|\, d\tau \le$$

$$\le E_n(x_0, x) \left(\frac{\varepsilon}{6\, M} \int\limits_{x}^{x_1} |g_{n1}(\tau)| E_n(\tau, x_0)\, d\tau + 2\varepsilon_{01} \int\limits_{x_1}^{\omega} |g_{n1}(\tau)| E_n(\tau, x_0)\, d\tau \right) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{6\, M} E_n(x_0, x) \left(\int\limits_{x}^{x_1} |g_{n1}(\tau)| E_n(\tau, x_0)\, d\tau + \int\limits_{x_*}^{\omega} |g_{n1}(\tau)| E_n(\tau, x_0)\, d\tau \right) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3\, M} E_n(x_0, x) \int\limits_{x}^{\omega} |g_{n1}(\tau)| E_n(\tau, x_0)\, d\tau =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3\, M} \left| J_{\omega,x}\left(|g_{n1}|, p_{nn} \right) \right| = \frac{\varepsilon}{3\, M} |G_{n1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее точно таким же образом с использованием неравенства (1.12) доказываем существование натурального числа $K_{n2}(\varepsilon)$ такого, что

$$\Big| J_{\overline{\gamma}_{n2},x}\left(|g_{n2}| \left| \overline{Y}_{n1}(y^k) - \overline{Y}_{n1}(y^0) \right|,\, p_{nn} \right) \Big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad k > K_{n2} \quad \text{и} \quad x \in [x_0, x_*],$$

а также натуральных $K_{n3j}(\varepsilon)$, $j = \overline{1, n-1}$, таких, что

$$\Big| J_{\overline{\beta}_{nj},x}\left(|p_{nj}| |y_{jk} - y_{j0}|, p_{nn} \right) \Big| < \frac{\varepsilon}{3(n-1)},$$

$$j = \overline{1, n-1}, \quad \text{при} \quad k > K_{n3j} \quad \text{и} \quad x \in [x_0, x_*].$$

В силу полученных неравенств

$$\big| \Phi_n(y^k)(x) - \Phi_n(y^0)(x) \big| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{при} \quad k > K_n \quad \text{и} \quad x \in [x_0, x_*],$$

где $K_n = \max\{K_{n1}, K_{n2}, K_{n31}, \ldots, K_{n3n-1}\}$. Значит, $\lim\limits_{k\to+\infty} \Phi_n(y^k)(x) = \Phi_n(y^0)(x)$ равномерно по x на любом замкнутом отрезке промежутка $[x_0, \omega[$.

Установив этот факт, выбираем опять произвольным образом числа $\varepsilon > 0$, $x_* > x_0$ и аналогично предыдущему доказываем существование натурального числа $K_{n-1}(\varepsilon)$ такого, что при $k > K_{n-1}$ и $x \in [x_0, x_*]$

$$\left|\Phi_{n-1}(y^k)(x) - \Phi_{n-1}(y^0)(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n-2} \left| J_{\overline{\beta}_{n-1j},x} \left(|p_{n-1j}||y_{jk} - y_{j0}|, p_{n-1n-1}\right)\right| +$$

$$+ \left| J_{\overline{\beta}_{n-1n},x} \left(p_{n-1n} \left|\Phi_n(y^k) - \Phi_n(y^0)\right|, p_{n-1n-1}\right)\right| +$$

$$+ \sum_{m=1}^{2} \left| J_{\overline{\gamma}_{n-1m},x} \left(|g_{n-1m}| \left|\overline{Y}_{n-1m}(y^k) - \overline{Y}_{n-1m}(y^0)\right|, p_{n-1n-1}\right)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

т. е. имеет место (1.17) при $i = n-1$.

Продолжая этот процесс далее, приходим к выводу о справедливости приведенного утверждения при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тем самым непрерывность оператора Φ установлена.

Пусть теперь $y \in S$. Тогда в силу (1.16)

$$(\Phi_i(y)(x))' = f_i(x) + \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}(x) y_j(x) + \sum_{j=i}^{n} p_{ij}(x)\Phi_j(y)(x) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{2} g_{im}(x)\overline{Y}_{im}(y)(x), \quad i = \overline{1,n}.$$

Отсюда с учетом условий $\Phi(S) \subset S$, (1.12) и (1.14) следует, что

$$\left|(\Phi_i(y)(x))'\right| \le |f_i(x)| + b_0 \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(x)| +$$

$$+\varepsilon_{01}|g_{i1}(x)| + nb_0\varepsilon_{02}|g_{i2}(x)|, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad x \in [x_0, \omega[.$$

Поэтому в силу непрерывности функций $f_i, p_{ij}, g_{im} \colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,n}$, $m = 1, 2$, для любого отрезка $[x_*, x^*] \subset [x_0, \omega[$ существует постоянная $K > 0$, не зависящая от y, такая, что $\left|(\Phi_i(y)(x))'\right| \le K$ при $x \in [x_*, x^*]$. Из этих неравенств следует, что функции из множества $\Phi(S)$ являются равностепенно непрерывными на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0, \omega[$. Поскольку, кроме того, множество S является замкнутым и выпуклым, в силу теоремы Шаудера – Тихонова (см. [12, с. 9]) существует $y \in S$ такое, что $y = \Phi(y)$. Данная вектор-функция $y \colon [x_0, \omega[\to$ $\to \mathbf{R}^n_{b_0}$, очевидно, является решением системы уравнений (1.1).

Покажем, что это решение стремится к нулю при $x \uparrow \omega$. Допустим противное. Тогда $\max\limits_{1\le i\le n} \left\{ \limsup\limits_{x\uparrow\omega} |y_i(x)| \right\} = \limsup\limits_{x\uparrow\omega} |y_l(x)| = c_0 > 0$, $c_0 \le b_0$), и поэтому для некоторой возрастающей последовательности $\{x_k\}$, $x_k \in [x_0, \omega[$, сходящейся к ω, $\lim\limits_{k\to+\infty} |y_l(x_k)| = c_0$. Учитывая два этих предельных соотношения, выбираем для числа $\varepsilon \in (0, c_0(1-q)/(1+q))$ номер $N(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\begin{aligned} \left|y_l(x_k)\right| &> c_0 - \varepsilon \quad \text{при} \quad k \ge N, \\ \left|y_i(x)\right| &< c_0 + \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad x \in [x_N, \omega[. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Далее, в соотношениях, полученных из (1.16) заменой $\Phi_i(y)$ на y_i, $i = \overline{1,n}$, каждый интеграл, у которого нижний предел интегрирования либо $\overline{\beta}_{ij}$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$, либо $\overline{\gamma}_{im}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $m \in \{1,2\}$, равен x_0, запишем в виде суммы двух интегралов $\int_{x_0}^{x_N} + \int_{x_N}^{x}$. Поскольку при их наличии в силу второй группы условий (1.7) и условий (1.8) выполняется условие (1.10), с учетом неравенств $|y_i(x)| \leq b_0$, $i = \overline{1,n}$, при $x \in [x_0, \omega[$, (1.11) и второго из неравенств (1.19) получим

$$|y_i(x)| \leq A_{i1}(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) + (c_0 + \varepsilon) B_{i1}(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad x \in [x_N, \omega[, \tag{1.20}$$

где

$$A_{i1}(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) =$$

$$= C_i E_i(a,x) + |F_i(x)| + \left| J_{\tilde{\gamma}_{i1},x}\left(|g_{i1}||\overline{Y}_{i1}|, p_{ii} \right) \right| + \sum_{j=i+1}^{n} \left| J_{\tilde{\beta}_{ij}}\left(A_{j1}|p_{ij}|, p_{ii} \right) \right|,$$

$$B_{i1}(x) = n\varepsilon_{02} \left| J_{\tilde{\gamma}_{i2},x}\left(|g_{i2}|, p_{ii} \right) \right| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \left| J_{\tilde{\beta}_{ij},x}\left(|p_{ij}|, p_{ii} \right) \right| + \sum_{j=i+1}^{n} \left| J_{\tilde{\beta}_{ij},x}\left(B_{j1}|p_{ij}|, p_{ii} \right) \right|,$$

$C_i > 0$ в случае, когда выполняется условие (1.10) и $C_i = 0$ — в противном случае, каждый из пределов интегрирования $\tilde{\beta}_{ij}$, $i,j = \overline{1,n}$, $j \neq i$, и $\tilde{\gamma}_{im}$, $i = \overline{1,n}$, $m = 1,2$, равен либо x_N, либо ω, причем он равен x_N, если до этого соответствующий ему предел интегрирования $\overline{\beta}_{ij}$ или $\overline{\gamma}_{im}$ был равен x_0.

Здесь в силу (1.3), первой группы условий (1.7) и приведенной ниже леммы 1.1 все функции A_{i1}, $i = \overline{1,n}$, при указанных значениях C_i, $i = \overline{1,n}$, стремятся к нулю при $x \uparrow \omega$.

Кроме того, поскольку $x_N \geq x_0$, а числа x_0 и $\varepsilon_{02} > 0$ ранее были выбраны таким образом, чтобы выполнялись неравенства $B_i(x) < q$, $i = \overline{1,n}$, при $x \in [x_0, \omega[$, тем более будут выполняться и неравенства $B_{i1}(x) < q$, $i = \overline{1,n}$, при $x \in [x_N, \omega[$. Поэтому из (1.20) получим

$$|y_i(x)| < A_{i1}(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) + (c_0 + \varepsilon) q, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad x \in [x_N, \omega[. \tag{1.21}$$

Отсюда с учетом первого из неравенств (1.19) имеем

$$c_0(1-q) - \varepsilon(1+q) < A_{l1}(x_k) \quad \text{при} \quad k > N.$$

Однако это невозможно, так как здесь слева в силу выбора числа ε стоит положительное число, а правая часть неравенства стремится к нулю при $k \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что решение уравнения $y = \Phi(y)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Наконец, заметим, что полученное решение зависит от постоянных c_i, $i = \overline{1,n}$, которые выбирались произвольными, но удовлетворяющими неравенствам $0 \leq |c_i| \leq |c_i^0|$, $i = \overline{1,n}$, где $c_i^0 \neq 0$ при выполнении условия (1.10) и $c_i^0 = 0$ — в противном случае. Значит, если среди функций $E_i(a,x)$, $i=\overline{1,n}$, имеется k функций, предел которых при $x\uparrow\omega$ равен нулю, то получаем, согласно установленному выше, k-параметрическое семейство решений, определенных на промежутке $[x_0,\omega[$ и стремящихся к нулю при $x\uparrow\omega$.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.1.** Из доказательства теоремы ясно, что если на множестве $\Omega_{x_0b_0}$ выполняются условия (1.12), (1.14) и при некоторых $q\in]0,1[$ и $c_i^0\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, неравенства (1.15) (вместо условий (1.7)–(1.9)), то система дифференциальных уравнений (1.1) имеет хотя бы одно, определенное на промежутке $[x_0,\omega[$, ограниченное решение, причем таких решений существует k-параметрическое семейство в случае, когда среди постоянных c_i^0, $i=\overline{1,n}$, имеется k постоянных, отличных от нуля.

***Замечание* 1.2.** Условия (1.4) заведомо выполняются, если функции Y_{i2}, $i=\overline{1,n}$, имеют непрерывные на множестве Ω_{ab} частные производные первого порядка по переменным $y_1,\ldots,y_n$ и $\dfrac{\partial Y_{i2}(y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_k}\longrightarrow 0$, $i,k=\overline{1,n}$, при $|y_1|+\ldots+|y_n|\longrightarrow 0$ равномерно по $x\in[a,\omega[$.

***Замечание* 1.3.** Для выполнения условий (1.9) достаточно, например, чтобы $P_{ij}^0=0$ при $1\le j<i\le n$. В этом случае все $B_i^0=0$, $i=\overline{1,n}$, и наглядно проявляется почти треугольный вид системы (1.1).

Приведем теперь ряд утверждений о свойствах интегральных выражений вида (1.5), где $p,q\colon[a,\omega[\longrightarrow\mathbf{R}$ — непрерывные функции, $-\infty<a<\omega\le+\infty$, и α — либо число из промежутка $[a,\omega[$, либо ω, которые могут быть использованы для установления условий (1.7), (1.8) и (1.15). Некоторые из такого типа утверждений при $\omega=+\infty$ установлены в [3, 11–13].

Лемма 1.1. *Пусть в* (1.5) *функция q неотрицательна и предел интегрирования α равен a, если $|J_{\omega,a}(q,p)|=+\infty$, и ω — в противном случае. Тогда для любых непрерывных функций ξ_1, $\xi_2\colon[a,\omega[\longrightarrow\mathbf{R}$, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{x\to\omega}\xi_1(x)=\xi_1^0=\mathrm{const},\qquad \lim_{x\uparrow\omega}\int\limits_a^x\xi_2(s)\,ds=\mathrm{const},\tag{1.22}$$

имеет место соотношение $J_{\alpha,x}(q\,\xi_1,p+\xi_2)=[\xi_1^0+o(1)]J_{\alpha,x}(q,p)$ при $x\uparrow\omega$.

Доказательство этой леммы проводится по схеме, которая была использована в случае $\omega=+\infty$ при доказательстве предложения 6 из монографии Бурбаки [15] (гл. V, § 3).

Лемма 1.2. *Пусть $\displaystyle\int_a^\omega|q(x)|\,dx<+\infty$, а функция p такова, что либо*

$$\sup\left\{\int\limits_\tau^x p(s)\,ds\colon\quad a\le\tau\le x<\omega\right\}<+\infty\quad \textit{и}\quad \lim_{x\uparrow\omega}\int\limits_a^x p(s)\,ds=-\infty,\tag{1.23}$$

либо

$$\inf\left\{\int\limits_x^\tau p(s)\,ds\colon\quad a\le x\le\tau<\omega\right\}>-\infty.\tag{1.24}$$

Тогда при выполнении условий (1.23) $\lim\limits_{x\uparrow\omega} J_{a,x}(q,p) = 0$, *а при выполнении условия* (1.24) $\lim\limits_{x\uparrow\omega} J_{\omega,x}(q,p) = 0$.

Справедливость первого утверждения этой леммы устанавливается аналогично тому, как при $\omega = +\infty$ доказывалась лемма 6.1 из монографии [9, с. 176], а второго — с использованием оценки

$$|J_{\omega,x}(q,p)| \le |J_{\omega,x}(|q|,p)| \le C \int\limits_x^\omega |q(\tau)|\, d\tau, \quad \text{где} \quad C > 0.$$

***Замечание* 1.4.** Одно из условий (1.23) или (1.24) заведомо выполнено в случае, когда функция p представима в виде $p(x) = p_0(x) + p_1(x)$, где функции $p_0, p_1\colon [a,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, $\int_a^\omega p_1(s)\, ds$ сходится (возможно, условно) и функция p_0 является знакопостоянной в некоторой левой окрестности ω, т. е. существует $x_0 \in [a,\omega[$ такое, что при $x \in [x_0,\omega[$ либо $p_0(x) \le 0$, либо $p_0(x) \ge 0$.

Лемма 1.3. *Пусть*

$$p(x) \ne 0 \quad \text{и} \quad \left|\frac{q(x)}{p(x)}\right| \le M \quad \text{при} \quad x \in [a,\omega[,$$

где M — некоторая положительная постоянная. Пусть, кроме того, α выбрано следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} a, & \text{если} \quad p(x) < 0, \\ \omega, & \text{если} \quad p(x) > 0. \end{cases}$$

Тогда $|J_{\alpha,x}(q,p)| \le M$ *при* $x \in [a,\omega[$.

Доказательство. При указанном выборе предела интегрирования α и $x \in [a,\omega[$ имеем

$$|J_{\alpha,x}(q,p)| \le M|J_{\alpha,x}(p,p)| = M\left[1 - \exp\left(\int\limits_\alpha^x p(s)\, ds\right)\right] \le M.$$

Лемма 1.4. *Пусть в интегральном выражении* (1.5) *функции p и q представимы в виде*

$$p(x) = p_0(x) + p_1(x), \qquad q(x) = q_0(x) + q_1(x), \tag{1.25}$$

где $p_i, q_i\colon [a,\omega[\longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 0,1$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$p_0(x) \ne 0, \qquad \int\limits_a^\omega p_0(s)\, ds = \pm\infty, \qquad \lim_{x\uparrow\omega}\int\limits_a^x p_1(s)\, ds = \mathrm{const}, \tag{1.26}$$

$$\lim_{x\uparrow\omega}\frac{q_0(x)}{p_0(x)} = l_0 = \mathrm{const}, \qquad \int\limits_a^\omega |q_1(s)|\, ds < +\infty. \tag{1.27}$$

Пусть, кроме того, α выбрано следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} a, & \text{\textit{если}} \quad p_0(x) < 0, \\ \\ \omega, & \text{\textit{если}} \quad p_0(x) > 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

Тогда $\lim\limits_{x \uparrow \omega} J_{\alpha,x}(q,p) = -l_0$.

Доказательство. При указанном выборе пределов интегрирования в силу условий на функцию p_0 имеет место соотношение $J_{\alpha,x}(p_0,p_0) = -1 + o(1)$ при $x \uparrow \uparrow \omega$. Поэтому, учитывая условия (1.26) и первое из условий (1.27), с использованием леммы 1.1 получаем

$$J_{\alpha,x}(q_0,p) = J_{\alpha,x}(q_0,p_0+p_1) = [l_0 + o(1)]J_{\alpha,x}(p_0,p_0) = -l_0 + o(1) \quad \text{при} \quad x \uparrow \omega.$$

В силу условий (1.26)

$$\inf \left\{ \int\limits_x^\tau p(s)\,ds \colon \ a \le x \le \tau < \omega \right\} > -\infty \quad \text{при} \quad p_0(x) > 0$$

и

$$\sup \left\{ \int\limits_\tau^x p(s)\,ds \colon \ a \le \tau \le x < \omega \right\} < +\infty,$$

$$\lim_{x \uparrow \omega} \int\limits_a^x p(s)\,ds = -\infty \quad \text{при} \quad p_0(x) < 0.$$

Тогда в силу второго из условий (1.27) согласно лемме 1.2 имеем

$$J_{\alpha,x}(q_1,p) = o(1) \quad \text{при} \quad x \uparrow \omega.$$

Из установленных соотношений следует, что $J_{\alpha,x}(q,p) = J_{\alpha,x}(q_0,p) + J_{\alpha,x}(q_1,p) = = -l_0 + o(1)$ при $x \uparrow \omega$.

Лемма 1.5. *Пусть функции* p *и* q *представимы в виде* (1.25), *где* $p_i, q_i \colon [a,\omega[\longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 0,1,$ — *непрерывные функции, удовлетворяющие условиям* (1.26), *второму из условий* (1.27) *и условию*

$$\limsup_{x \uparrow \omega} \left| \frac{q_0(x)}{p_0(x)} \right| = M = \text{const}\,. \tag{1.29}$$

Тогда если α *выбрано, как в* (1.28), *то* $\limsup\limits_{x \uparrow \omega} |J_{\alpha,x}(q,p)| \le M$.

Доказательство. В силу условий (1.25), (1.26) и второго из условий (1.27) при указанном выборе предела интегрирования α на основании леммы 1.2 имеем

$$\lim_{x \uparrow \omega} J_{\alpha,x}(q_1,p) = 0. \tag{1.30}$$

Кроме того, с учетом леммы 1.1 находим

$$|J_{\alpha,\,x}(q_0,p)| \le |J_{\alpha,\,x}(|q_0|,p)| = |1 + \delta(x)||J_{\alpha,x}(|q_0|,p_0)|,$$

где $\delta \colon [a,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $x \uparrow \omega$.

Выберем теперь произвольным образом число $\varepsilon > 0$. Для этого ε в силу условия (1.29) и стремления δ к нулю при $x \uparrow \omega$ существует $x_0 \in [a, \omega[$ такое, что

$$\left|\frac{q_0(x)}{p_0(x)}\right| \le M + \varepsilon, \quad |\delta(x)| < 1 \quad \text{при} \quad x \in [x_0, \omega[.$$

Подобрав таким образом число x_0, с использованием леммы 1.3 при $x \in [x_0, \omega[$ получим

$$|J_{\alpha,\,x}(q_0, p)| \le [1 + \delta(t)] |J_{\omega,x}(|q_0|, p_0)| \le (M + \varepsilon)[1 + \delta(x)] \quad \text{в случае} \quad p_0(x) > 0$$

и

$$|J_{\alpha,x}(q_0,\, p)| \le \big[1 + \delta(x)\big] \left(J_{x_0,\,a}(|q_0|, p_0) \exp\left(\int\limits_a^x p_0(s)\, ds \right) + M + \varepsilon \right)$$

$$\text{в случае} \quad p_0(x) < 0.$$

Отсюда с учетом второго из условий (1.26) следует, что $\limsup\limits_{x\uparrow\omega} |J_{\alpha,x}(q_0, p)| \le$ $\le (M + \varepsilon)$, и поэтому, учитывая (1.30), имеем

$$\limsup_{x\uparrow\omega} |J_{\alpha,\,x}(q, p)| \le \limsup_{x\uparrow\omega} |J_{\alpha,\,x}(q_0, p)| + \limsup_{x\uparrow\omega} |J_{\alpha,\,x}(q_1, p)| \le (M + \varepsilon).$$

Значит, в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ $\limsup\limits_{x\uparrow\omega} |J_{\alpha,\,x}(q, p)| \le M$.

Лемма 1.6. *Пусть $\omega = +\infty$ и для некоторого числа $l > 0$ существуют постоянные $d > 0$, $Q > 0$ и $P \ge 0$ такие, что при любом $x \in [a, +\infty[$*

$$\int\limits_x^{x+l} |q(s)|\, ds \le Q \tag{1.31}$$

и выполняются либо условия

$$\int\limits_x^{x+l} p(s)\, ds \le -d, \qquad \max\left\{ \int\limits_x^{\tau} p(s)\, ds\colon\ x \le \tau \le x + l \right\} \le P, \tag{1.32}$$

либо условия

$$\int\limits_x^{x+l} p(s)\, ds \ge d, \qquad \min\left\{ \int\limits_x^{\tau} p(s)\, ds\colon\ x \le \tau \le x + l \right\} \ge -P. \tag{1.33}$$

Тогда

$$|J_{\alpha,\,x}(q, p)| \le Q e^P \left(1 - e^{-d}\right)^{-1} \quad \textit{при} \quad x \ge a,$$

где α выбрано следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} a, & \textit{если выполняются условия } (1.32), \\ +\infty, & \textit{если выполняются условия } (1.33). \end{cases}$$

Доказательство. Предположим сначала, что выполняются условия (1.32). Тогда для любого фиксированного $x \in [a, +\infty[$ имеет место неравенство

$$|J_{a,x}(q,p)| \leq \int\limits_{a}^{x-nl} |q(\tau)|e^{\int_\tau^x p(s)\,ds}\,d\tau + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x-kl}^{x-(k-1)l} |q(\tau)|e^{\int_\tau^x p(s)\,ds}\,d\tau, \qquad (1.34)$$

где $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ такое, что $a+nl < x \leq a+(n+1)l$.

В силу условий (1.31) и (1.32)

$$\int\limits_{a}^{x-nl} |q(\tau)|e^{\int_\tau^x p(s)\,ds}\,d\tau = \int\limits_{a}^{x-nl} |q(\tau)|e^{\int_\tau^{x-nl} p(s)\,ds + \int_{x-nl}^{x} p(s)\,ds}\,d\tau \leq$$

$$\leq e^P e^{-nd} \int\limits_{a}^{x-nl} |q(\tau)|\,d\tau \leq Qe^P e^{-nd}$$

и при любом $k \in \{1,\ldots,n\}$

$$\int\limits_{x-kl}^{x-(k-1)l} |q(\tau)|e^{\int_\tau^x p(s)\,ds}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{x-kl}^{x-(k-1)l} |q(\tau)|e^{\int_\tau^{x-(k-1)l} p(s)\,ds + \int_{x-(k-1)l}^{t} p(s)\,ds}\,d\tau \leq Qe^P e^{-(k-1)d}.$$

Поэтому из (1.34) следует, что

$$\left|J_{a,x}(q,p)\right| \leq Qe^P \sum_{k=0}^{n} e^{-kd} < Qe^P \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kd} = Qe^P\left(1-e^{-d}\right)^{-1} \quad \text{при} \quad x \geq a.$$

Пусть теперь при любом $x \in [a,+\infty[$ выполняются условия (1.33). Тогда

$$\left|J_{+\infty,\,x}(q,p)\right| \leq \int\limits_{x}^{+\infty} |q(\tau)|e^{-\int_x^\tau p(s)\,ds}\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{x+kl}^{x+(k+1)l} |q(\tau)|e^{-\int_x^\tau p(s)\,ds}\,d\tau \quad \text{при} \quad x \geq a.$$

Отсюда с учетом того, что при любом $k \in \{0,1,\ldots\}$ в силу (1.31) и (1.33)

$$\int\limits_{x+kl}^{x+(k+1)l} |q(\tau)|e^{-\int_x^\tau p(s)\,ds}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{x+kl}^{x+(k+1)l} |q(\tau)|e^{-\int_x^{x+kl} p(s)\,ds - \int_{x+kl}^{\tau} p(s)\,ds}\,d\tau \leq Qe^P e^{-kd},$$

получаем

$$\left|J_{+\infty,\,x}(q,p)\right| \leq Qe^P \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kd} = Qe^P(1-e^{-d})^{-1} \quad \text{при} \quad x \geq a.$$

***Замечание* 1.5.** Одно из условий (1.32) или (1.33) заведомо выполнено, например, в случае, когда $l = 2\pi$ и $p(t) = \varepsilon + \sin t$, где $\varepsilon \neq 0$.

***Замечание* 1.6.** В частном случае, когда $p(t) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, из леммы 1.6 вытекает лемма 2 из монографии [16, c. 102] (Ch. IV, § 2).

С использованием леммы 1.6 по схеме доказательства леммы 1.5 может быть установлено также следующее утверждение.

Лемма 1.7. *Пусть* $\omega = +\infty$, *функции* p *и* q *представимы в виде* (1.25), *функции* $p_i,\ q_i\colon\ [a, +\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1$, *непрерывны,* p_1, q_1 *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{x\to+\infty}\int\limits_a^x p_1(s)\,ds = \mathrm{const}, \qquad \int\limits_a^{+\infty} |q_1(s)|\,ds < +\infty,$$

а p_0, q_0 *таковы, что для некоторого числа* $l > 0$

$$\limsup_{x\to+\infty}\int\limits_x^{x+l} |q_0(s)|\,ds = Q = \mathrm{const}$$

и выполняются либо условия

$$\begin{gathered}\limsup_{x\to+\infty}\int\limits_x^{x+l} p_0(s)\,ds = -d,\\ \limsup_{x\to+\infty}\left(\max\left\{\int\limits_x^{\tau} p_0(s)\,ds\colon\ x \le \tau \le x+l\right\}\right) = P,\end{gathered} \tag{1.35}$$

либо условия

$$\begin{gathered}\liminf_{x\to+\infty}\int\limits_x^{x+l} p_0(s)\,ds = d,\\ \liminf_{x\to+\infty}\left(\min\left\{\int\limits_x^{\tau} p_0(s)\,ds\colon\ x \le \tau \le x+l\right\}\right) = -P,\end{gathered} \tag{1.36}$$

где $d > 0$ *и* $P \ge 0$. *Тогда*

$$\limsup_{x\to+\infty}|J_{\alpha,\,x}(q,p)| \le Qe^{P}\left(1 - e^{-d}\right)^{-1},$$

где

$$\alpha = \begin{cases} a, & \textit{если выполняются условия } (1.35),\\ +\infty, & \textit{если выполняются условия } (1.36).\end{cases}$$

Приведенные выше леммы позволяют с использованием теоремы 1.1 получить удобные для применения признаки существования исчезающих в ω решений системы дифференциальных уравнений (1.1) в терминах ее коэффициентов.

Например, в силу лемм 1.2 и 1.5 из теоремы 1.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть функции* Y_{im}, $i=\overline{1,n}$, $m=1,2$, *удовлетворяют условиям* (1.3) *и* (1.4), *функции* g_{im}, p_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, $m=1,2$, *представимы в виде*

$$g_{im}(x)=\sum_{\nu=1}^{2} g_{\nu im}(x), \qquad p_{ij}(x)=\sum_{\nu=1}^{2} p_{\nu ij}(x), \quad i,j=\overline{1,n}, \quad m=1,2,$$

где $g_{\nu im}, p_{\nu ij}\colon [a,\omega[\, \longrightarrow \mathbf{R}$, $\nu=1,2$, $i,j=\overline{1,n}$, $m=1,2$, — *непрерывные функции, и выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $i\in\{1,\ldots,n\}$

$$\int_a^\omega |\,f_i(x)\,|\,dx<+\infty, \qquad \int_a^\omega |g_{2im}(x)\,|\,dx<+\infty, \quad m=1,2, \tag{1.37}$$

$$\lim_{x\uparrow\omega}\int_a^x p_{2ii}(\tau)\,d\tau=\mathrm{const}, \qquad \int_a^\omega |\,p_{2ij}(x)\,|\,dx<+\infty, \quad j\neq i, \quad j=\overline{1,n}; \tag{1.38}$$

2) *для некоторого множества* $\mathfrak{M}\subset\{1,\ldots,n\}$ (*возможно, пустого*) *при любом* $i\in\mathfrak{M}$

$$p_{1ii}(x)\neq 0 \ \text{в некоторой левой окрестности} \ \ \omega, \qquad \left|\int_a^\omega p_{1ii}(x)\,dx\right|=+\infty, \tag{1.39}$$

$$\limsup_{x\uparrow\omega}|g_{1im}(x)/p_{1ii}(x)|<+\infty, \quad m=1,2, \tag{1.40}$$

$$\limsup_{x\uparrow\omega}|p_{1ij}(x)/p_{1ii}(x)|=P^0_{ij}=\mathrm{const}, \quad j\neq i, \quad j=\overline{1,n}, \tag{1.41}$$

а при любом $i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\mathfrak{M}$

$$g_{1im}(x)\equiv 0, \quad m=1,2, \quad p_{1ij}(x)\equiv 0, \quad j=\overline{1,n}. \tag{1.42}$$

Пусть, кроме того, постоянные B^0_i, $i=\overline{1,n}$, *определяемые* (*начиная с* $i=n$) *рекуррентными соотношениями*

$$B^0_i=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\left|P^0_{ij}\right|+\sum_{j=i+1}^{n}B^0_j\left|P^0_{ij}\right|, & \text{если} \quad i\in\mathfrak{M},\\ 0, & \text{если} \quad i\notin\mathfrak{M},\end{cases} \qquad i=\overline{1,n}, \tag{1.43}$$

удовлетворяют неравенствам $B^0_i<1$ *при всех* $i\in\mathfrak{M}$. *Тогда система дифференциальных уравнений* (1.1) *имеет по крайней мере одно решение* $(y_i)_{i=1}^n\colon [x_0,\omega[\,\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $x_0\in[a,\omega[$, *стремящееся к нулю при* $x\uparrow\omega$, *причем таких решений существует* k*-параметрическое семейство, если среди функций* p_{1ii}, $i\in\mathfrak{M}$, *имеется* k *функций, которые являются отрицательными в некоторой левой окрестности* ω.

2. Приложения основных результатов. Теорему 1.2 можно эффективно использовать для получения признаков существования исчезающих в точке ω решений систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dv_i}{dx} = h_i(x)\Bigg[q_i(x) + f_i(x, v_1, \ldots, v_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [a_{ij} + b_{ij}(x)] v_j + V_i(x, v_1, \ldots, v_n)\Bigg], \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

в которых $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, n}$, $h_i, q_i, b_{ij} \colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, n}$, — непрерывные функции и f_i, $V_i \colon [x_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_c \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x \to \omega} f_i(x, v_1, \ldots, v_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_c, \tag{2.2}$$

$$\lim_{|v_1| + \ldots + |v_n| \to 0} \frac{V_i(x, v_1, \ldots, v_n)}{|v_1| + \ldots + |v_n|} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0, \omega[, \tag{2.3}$$

где

$$-\infty < x_0 < \omega \leq +\infty, \qquad \mathbb{R}^n_c = \big\{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \colon\ |v_1| + \ldots + |v_n| \leq c, \ \ c > 0\big\}.$$

Прежде всего нетрудно заметить, что из теоремы 1.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть для каждого* $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\int_{x_0}^{\omega} |h_i(x) q_i(x)|\, dx < +\infty, \qquad \lim_{x \uparrow \omega} \int_{x_0}^{x} h_i(s) b_{ii}(s)\, ds = \text{const}, \tag{2.4}$$

$$\int_{x_0}^{\omega} |h_i(x) b_{ij}(x)|\, dx < +\infty \quad \textit{при} \quad j \neq i, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.5}$$

и для некоторого множества $\mathfrak{M} \subset \{1, \ldots, n\}$ (*возможно, пустого*) *при любом* $i \in \mathfrak{M}$ *выполняются условия*

$$a_{ii} h_i(x) \neq 0 \quad \textit{при} \quad x \in [x_0, \omega[, \qquad \int_{x_0}^{\omega} h_i(x)\, dx = \pm\infty, \tag{2.6}$$

а при любом $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \mathfrak{M}$ — *условия*

$$\int_{x_0}^{\omega} |h_i(x)|\, dx < +\infty. \tag{2.7}$$

Пусть, кроме того, постоянные B_i^0, $i = \overline{1, n}$, *определяемые* (*начиная с* $i = n$) *рекуррентными соотношениями*

$$B_i^0 = \begin{cases} \dfrac{1}{|a_{ii}|} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} B_j^0 |a_{ij}| \right), & \textit{если} \quad i \in \mathfrak{M}, \\ 0, & \textit{если} \quad i \notin \mathfrak{M}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.8}$$

удовлетворяют неравенствам $B_i^0 < 1$ *при всех* $i \in \mathfrak{M}$. *Тогда система дифференциальных уравнений* (2.1) *имеет по крайней мере одно решение* $(v_i)_{i=1}^n \colon [x_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x_1 \in [x_0, \omega[$, *стремящееся к нулю при* $x \uparrow \omega$, *причем таких решений существует* m*-параметрическое семейство, если среди функций* $a_{ii} h_i(x)$, $i \in \mathfrak{M}$, *имеется* m *функций, которые являются отрицательными на промежутке* $[x_0, \omega[$.

В следующих двух теоремах результаты из § 2 работы [12] распространяются на системы дифференциальных уравнений (2.1).

Теорема 2.2. *Пусть* $h_i(x) \equiv h(x)$, $i = \overline{1, n}$, *где* $h \colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — *непрерывная функция такая, что*

$$h(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in [x_0, \omega[, \qquad \int\limits_{x_0}^{\omega} h(x)\, dx = \pm\infty,$$

$$\int\limits_{x_0}^{\omega} |h(x) q_i(x)|\, dx < +\infty, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{x_0}^{\omega} |h(x) b_{ij}(x)|\, dx < +\infty, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Пусть, кроме того, матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений* (2.1) *имеет хотя бы одно решение* $(v_i)_{i=1}^n \colon [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}_c^n$, $x_1 \in [x_0, \omega[$, *стремящееся к нулю при* $x \uparrow \omega$, *причем таких решений существует* m*-параметрическое семейство, если среди собственных значений матрицы* A *имеется* m *собственных значений* (*с учетом кратных*), *действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции* h *на промежутке* $[x_0, \omega[$.

Теорема 2.3. *Пусть* $h_i(x) \equiv h(x)$, $i = \overline{1, n}$, $h \colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая условиям* (2.9), *матрица* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *имеет собственные значения с нулевой действительной частью и* r — *максимальная из степеней элементарных делителей, соответствующих этим собственным значениям. Пусть для некоторого* $\varepsilon > 0$ *вместо* (2.2) *и* (2.3) *выполняются условия*

$$\lim_{x \uparrow \omega} \tau^{r+\varepsilon}(x) f_i\big(x, v_1/\tau^{\varepsilon}(x), \ldots, v_n/\tau^{\varepsilon}(x)\big) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}_c^n,$$

$$\lim_{|v_1| + \ldots + |v_n| \to 0} \frac{\tau^{r+\varepsilon}(x) V_i\left(x, v_1/\tau^{\varepsilon}(x), \ldots, v_n/\tau^{\varepsilon}(x)\right)}{|v_1| + \ldots + |v_n|} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\text{равномерно по} \quad x \in [x_1, \omega[,$$

где

$$\tau(x) = \int\limits_{x_0}^{x} |h(s)|\, ds, \quad x_1 \in]x_0, \omega[.$$

Пусть, кроме того, выполняются условия

$$\int\limits_{x_0}^{\omega} \tau^{r+\varepsilon-1}(x)|h(x)q_i(x)|\,dx < +\infty, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\int\limits_{x_0}^{\omega} \tau^{r-1}(x)|h(x)b_{ij}(x)|\,dx < +\infty, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) *имеет хотя бы одно решение* $(v_i)_{i=1}^n \colon [x_2,\omega[\, \longrightarrow \mathbb{R}_c^n$, $x_2 \in [x_1,\omega[$, *удовлетворяющее асимптотическим соотношениям*

$$v_i(x) = o\left(\tau^{-\varepsilon}(x)\right), \quad i = \overline{1,n}, \quad \textit{при} \quad x \uparrow \omega,$$

причем таких решений существует m-параметрическое семейство, если среди собственных значений матрицы A имеется m собственных значений (*с учетом кратных*), *действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0,\omega[$.*

Доказательства этих двух теорем в части приведения системы (2.1) к почти треугольному виду полностью повторяют доказательства теорем 2.1 и 2.2 из работы [12], но в конце доказательств здесь, в отличие от [12], используется теорема 1.2.

Теорема 2.4. *Пусть для некоторого $s \in \{1,\dots,n-1\}$ выполняются условия*:

1) *при $i = \overline{1,s}$ функции $h_i(x) \equiv h(x)$, где $h\colon [x_0,\omega[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что наряду с* (2.9)

$$\begin{aligned} &\int\limits_{x_0}^{\omega} |h(x)q_i(x)|\,dx < +\infty, \quad i = \overline{1,s},\\ &\int\limits_{x_0}^{\omega} |h(x)b_{ij}(x)|\,dx < +\infty, \quad i = \overline{1,s}, \quad j = \overline{1,n}; \end{aligned} \tag{2.10}$$

2) *при $i = \overline{s+1,n}$ выполняются условия* (2.4) *и* (2.5);

3) *для некоторого множества $\mathfrak{M}_1 \in \{s+1,\dots,n\}$* (*возможно, пустого*) *при любом $i \in \mathfrak{M}_1$ выполняются условия* (2.6), *а при $i \in \{s+1,\dots,n\} \setminus \mathfrak{M}_1$ — условия* (2.7);

4) *матрица $A_s = (a_{ij})_{i,j=1}^s$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью и $a_{ij} = 0$ при $i \in \mathfrak{M}_1$, $j = \overline{1,i-1}$.*

Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) *имеет по крайней мере одно решение $(v_i)_{i=1}^n \colon [x_1,\omega[\, \longrightarrow \mathbf{R}_c^n$, $x_1 \in [x_0,\omega[$, стремящееся к нулю при $x \uparrow \omega$, причем таких решений существует $(m+l)$-параметрическое семейство, если среди собственных значений* (*с учетом кратных*) *матрицы A_s имеется m собственных значений, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0,\omega[$, и среди функций $a_{ii}h_i(x)$, где $i \in \mathfrak{M}_1$, имеется l функций, для которых выполняется неравенство $a_{ii}h_i(x) < 0$ при $x \in [x_0,\omega[$.*

Доказательство. Поскольку матрица $A_s = (a_{ij})_{i,j=1}^s$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, то, как было показано в [12] при доказательстве теоремы 2.1, существуют постоянная невырожденная матрица $T \in \mathbf{R}^{s\times s}$ и ограниченная вместе с обратной непрерывно дифференцируемая матрица $L\colon [a,+\infty[\, \longrightarrow \mathbf{R}^{s\times s}$ такие, что

$$L^{-1}(x)T^{-1}A_sTL(x) - L^{-1}(x)L'(x) = \tilde{A}_s,$$

где $\tilde{A}_s = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^s$ — верхняя треугольная матрица, у которой на главной диагонали расположены отличные от нуля действительные части всех собственных значений (с учетом кратных) матрицы A_s, на двух первых диагоналях над главной стоят элементы

$$\tilde{a}_{ii+1} = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } 1, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, s-1, \qquad \tilde{a}_{ii+2} = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } 1, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, s-2,$$

и все остальные элементы равны нулю. Поэтому, применяя к системе (2.1) преобразование

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TL(x) & O_1 \\ O_2 & E_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где E_{n-s} — единичная матрица размерности $(n-s) \times (n-s)$, O_1 и O_2 — нулевые матрицы размерностей $s \times (n-s)$ и $(n-s) \times s$ соответственно, получаем с учетом (2.2), (2.3), условий теоремы и вида матрицы $\tilde{A}_s$ систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{v}_i}{dx} = h(x)\Bigg[\tilde{q}_i(x) + \tilde{f}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) + \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{b}_{ij}(x)\tilde{v}_j + \sum_{j=i}^{s} [\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij}(x)]\tilde{v}_j +$$
$$+ \sum_{j=s+1}^{n} [a_{ij} + b_{ij}(x)]\tilde{v}_j + \tilde{V}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)\Bigg], \quad i = \overline{1, s},$$
$$\tag{2.12}$$
$$\frac{d\tilde{v}_i}{dx} = h_i(x)\Bigg[q_i(x) + \tilde{f}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) + \sum_{j=1}^{s} [\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij}(x)]\tilde{v}_j +$$
$$+ \sum_{j=s+1}^{n} [a_{ij} + b_{ij}(x)]\tilde{v}_j + \tilde{V}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)\Bigg], \quad i = \overline{s+1, n},$$

в которой функции $\tilde{f}_i$, $\tilde{V}_i \colon [x_0, \omega[\times \mathbb{R}_b^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $0 < b \le c$, $\tilde{q}_i \colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, s}$, $\tilde{b}_{ij} \colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \uparrow \omega} \tilde{f}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{равномерно по} \quad (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) \in \mathbb{R}_b^n, \tag{2.13}$$

$$\lim_{|\tilde{v}_1| + \ldots + |\tilde{v}_n| \to 0} \frac{\tilde{V}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)}{|\tilde{v}_1| + \ldots + |\tilde{v}_n|} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0, \omega[, \tag{2.14}$$

$$\int_{x_0}^{\omega} |h(x)\tilde{q}_i(x)|\, dx < +\infty, \quad i = \overline{1, s}, \qquad \int_{x_0}^{\omega} |h(x)\tilde{b}_{ij}(x)|\, dx < +\infty, \quad i, j = \overline{1, s},$$

$$\int\limits_{x_0}^{\omega} |h_i(x)\tilde{b}_{ij}|\,dx < +\infty, \quad i = \overline{s+1,n}, \quad j = \overline{1,s},$$

$\tilde{a}_{ij}$, $i = \overline{s+1,n}$, $j = \overline{1,s}$, — вещественные постоянные, равные нулю при $i \in \mathfrak{M}_1$ (функции q_i, $i = \overline{s+1,n}$, b_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{s+1,n}$, и постоянные a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{s+1,n}$, здесь те же, что и в системе (2.1)).

Отсюда с учетом условий теоремы и структуры матрицы $\tilde{A}_s = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^{s}$ следует, что для системы дифференциальных уравнений (2.12) выполнены все условия теоремы 2.1 с множеством $\mathfrak{M} = \{1,\ldots,s\} \cup \mathfrak{M}_1$. При этом все постоянные B_i^0, определяемые рекуррентными соотношениями (2.8), здесь равны нулю. Поэтому система дифференциальных уравнений (2.12) имеет хотя бы одно решение $(\tilde{v}_i)_{i=1}^{n} \colon [x_1,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x_1 \in [x_0,\omega[$, стремящееся к нулю при $x \uparrow \omega$, причем таких решений существует r-параметрическое семейство, если среди функций $\tilde{a}_{ii}h(x)$, $i = \overline{1,s}$, и $a_{ii}h_i(x)$, $i \in \mathfrak{M}_1$, имеется r функций, которые являются отрицательными на промежутке $[x_0,\omega[$, что, очевидно, выполняется в случае, когда $r = m + l$, где m — число собственных значений матрицы A_s (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0,\omega[$, и l — число отрицательных на $[x_0,\omega[$ функций $a_{ii}h_i(x)$, где $i \in \mathfrak{M}_1$. Всем таким решениям системы (2.12) в силу замены (2.11) соответствуют стремящиеся к нулю при $x \uparrow \omega$ решения системы дифференциальных уравнений (2.1).

Теорема доказана.

***Замечание* 2.1.** Принимая во внимание теорему 1.2, заметим, что теоремы 2.1, 2.2 и 2.4 остаются справедливыми и в случае, когда при каждой из функций f_i, V_i, $i = \overline{1,n}$, стоит множитель вида $g_{im} = c_{im} + d_{im}(x)$, $m \in \{1,2\}$, где c_{im} — вещественная постоянная и $d_{im} \colon [x_0,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая такому же условию, что и функция q_i.

Теперь из множества систем вида (2.1) выделим следующий, наиболее часто возникающий при изучении асимптотических свойств решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков, класс систем дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{dv_i}{dx} = h(x)\Bigg[q_i(x) + f_i(x,v_1,\ldots,v_n) + \\
+ \sum_{j=1}^{n}[a_{ij} + b_{ij}(x)]v_j + V_i(x,v_1,\ldots,v_n)\Bigg], \quad i = \overline{1,n-1}, \\
\frac{dv_n}{dx} = h_n(x)\Bigg[q_n(x) + f_n(x,v_1,\ldots,v_n) + \\
+ \sum_{j=1}^{n}[a_{nj} + b_{nj}(x)]v_j + V_n(x,v_1,\ldots,v_n)\Bigg],
\end{gathered} \tag{2.15}$$

где функции $h, h_n \colon [x_0,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, а остальные — такие же, как в (2.1).

В дальнейшем будем говорить, что выполнено условие S_{n-1}, если наряду с (2.2) и (2.3) выполняются условия (2.10) при $s = n-1$ и условия (2.4), (2.5) при $i = n$.

В силу теоремы 2.4 для системы (2.15) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Пусть выполнено условие S_{n-1} и функции h, h_n таковы, что*

$$h(x)h_n(x) \neq 0 \quad \textit{при} \quad x \in [x_0, \omega[,$$

$$\int\limits_{x_0}^{\omega} h(x)\,dx = \pm\infty, \qquad \int\limits_{x_0}^{\omega} h_n(x)\,dx = \pm\infty.$$

Пусть, кроме того, матрица $A_{n-1} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, $a_{nn} \neq 0$ и $a_{nj} = 0$ при $j = \overline{1, n-1}$. Тогда система дифференциальных уравнений (2.15) *имеет по крайней мере одно решение $(v_i)_{i=1}^{n}\colon [x_1, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}_c^n$, $x_1 \in [x_0, \omega[$, стремящееся к нулю при $x \uparrow \omega$, причем при наличии у матрицы A_{n-1} m собственных значений* (*с учетом кратных*), *действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0, \omega[$, таких решений существует $(m+1)$-параметрическое семейство в случае, когда функция $a_{nn}h_n(x)$ отрицательна на $[x_0, \omega[$, и m-параметрическое семейство — в противном случае.*

В работе [17] указаны важного типа преобразования, позволяющие доводить системы дифференциальных уравнений до почти треугольного вида. В частности, они эффективно использовались при установлении основных результатов работ [1 – 10].

Приведем несколько результатов для систем (2.15), которые устанавливаются с использованием такого типа преобразований и теоремы 2.5.

Теорема 2.6. *Пусть h, $h_n\colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции такие, что*

$$h(x)h_n(x) \neq 0 \quad \textit{при} \quad x \in [x_0, \omega[, \qquad \int\limits_{x_0}^{\omega} h_n(x)\,dx = \pm\infty, \tag{2.16}$$

$$\lim_{x\uparrow\omega} \frac{h_n(x)}{h(x)} = 0, \qquad \lim_{x\uparrow\omega} h_n^{-1}(x)\left(\frac{h_n(x)}{h(x)}\right)' = 0. \tag{2.17}$$

Пусть выполнено условие S_{n-1} и

$$\int\limits_{x_0}^{\omega} \left|\frac{b_{nn}(x)}{h(x)}\right| h_n^2(x)\,dx < +\infty. \tag{2.18}$$

Пусть, кроме того, матрицы $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ и $A_{n-1} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ таковы, что $\det A_n \neq 0$, а A_{n-1} не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений (2.15) *имеет по крайней мере одно решение $(v_i)_{i=1}^{n}\colon [x_1, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}_c^n$, $x_1 \in [x_0, \omega[$, стремящееся к нулю при $x \uparrow \omega$. Более того, если матрица A_{n-1} имеет m собственных значений* (*с учетом кратных*), *действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0, \omega[$, то при выполнении неравенства $h(x)(\det A_n)(\det A_{n-1}) > 0$ у системы* (2.15) *существует m-параметрическое, а при выполнении неравенства $h_n(x)(\det A_n)(\det A_{n-1}) < 0$ — $(m+1)$-параметрическое семейство исчезающих в ω решений.*

Доказательство. Применим к системе (2.15) преобразование

$$v_i = \tilde{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad v_n = \tilde{v}_n + \frac{h_n(x)}{h(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{v}_k, \tag{2.19}$$

выбрав в качестве h_k^0, $k = \overline{1, n-1}$, существующее в силу условия $\det A_{n-1} \neq 0$ единственное решение системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{kj} h_k = a_{nj}, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Учитывая вид этих решений, нетрудно проверить, что

$$a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{kn} h_k^0 = \frac{\det A_n}{\det A_{n-1}}.$$

При таком выборе постоянных h_k^0, $k = \overline{1, n-1}$, в результате преобразования (2.19) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d\tilde{v}_i}{dx} = h(x)\Bigg[\tilde{q}_i(x) + \tilde{f}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) + \\ + \sum_{j=1}^{n} [\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij}(x)]\tilde{v}_j + \tilde{V}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)\Bigg], \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{d\tilde{v}_n}{dx} = h_n(x)\Bigg[\tilde{q}_n(x) + \tilde{f}_n(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) + \\ + \sum_{j=1}^{n} [\tilde{a}_{nj} + \tilde{b}_{nj}(x)]\tilde{v}_j + \tilde{V}_n(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)\Bigg], \end{gathered} \tag{2.20}$$

в которой

$$\tilde{q}_i(x) = q_i(x), \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad \tilde{q}_n(x) = q_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 q_k(x),$$

$$\tilde{f}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) = f_i\left(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{v}_n + \frac{h_n(x)}{h(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{v}_k\right) +$$

$$+ \frac{a_{in} h_n(x)}{h(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{v}_k, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{f}_n(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) = f_n\left(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{v}_n + \frac{h_n(x)}{h(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{v}_k\right) +$$

$$+ \frac{a_{nn} h_n(x)}{h(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{v}_k - \left(\frac{h_n(x)}{h(x)}\right)' \frac{1}{h_n(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{v}_k -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{f}_k(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n), \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\tilde{a}_{nj} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \qquad \tilde{a}_{nn} = \frac{\det A_n}{\det A_{n-1}},$$

$$\tilde{b}_{ij}(x) = b_{ij}(x) + \frac{h_j^0\, b_{in}(x) h_n(x)}{h(x)}, \quad i, j = \overline{1, n-1}, \quad \tilde{b}_{in}(x) = b_{in}(x), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{b}_{nj} = b_{nj} + \frac{h_j^0\, b_{nn}(x) h_n(x)}{h(x)} - \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{b}_{kj}(x), \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{b}_{nn}(x) = b_{nn}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 b_{kn}(x),$$

$$\tilde{V}_i(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) = V_i\left(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{v}_n + \frac{h_n(x)}{h(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{v}_k\right), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{V}_n(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) = V_n\left(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{v}_n + \frac{h_n(x)}{h(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{v}_k\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} h_k^0 \tilde{V}_k(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n).$$

Здесь в силу (2.2), (2.3) и (2.17) выполняются условия (2.13) и (2.14). В силу (2.16) – (2.18) и условия S_{n-1}

$$\int_{x_0}^{\omega} |h(x)\tilde{q}_i(x)|\, dx < +\infty, \qquad \int_{x_0}^{\omega} |h(x)\tilde{b}_{ij}(x)|\, dx < +\infty, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.21}$$

$$\int_{x_0}^{\omega} |h_n(x)\tilde{q}_n(x)|\, dx < +\infty, \qquad \int_{x_0}^{\omega} |h_n(x)\tilde{b}_{nj}(x)|\, dx < +\infty, \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{2.22}$$

и

$$\lim_{x \uparrow \omega} \int_{x_0}^{x} h_n(\tau)\tilde{b}_{nn}(\tau)\, d\tau = \mathrm{const}\,. \tag{2.23}$$

Матрица $\tilde{A}_{n-1} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^{n-1} = A_{n-1}$ и поэтому не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Кроме того, $\tilde{a}_{nj} = 0$ при $j = \overline{1, n-1}$ и $\tilde{a}_{nn} \neq 0$.

Значит, для системы (2.20) выполнены все условия теоремы 2.5. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (2.20) имеет по крайней мере одно решение $(\tilde{v}_i)_{i=1}^n \colon [x_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}_c^n$, $x_1 \in [x_0, \omega[$, стремящееся к нулю при $x \uparrow \omega$. Более того, если матрица A_{n-1} имеет m собственных значений (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0, \omega[$, то в случае выполнения неравенства $h_n(x)(\det A_n)(\det A_{n-1}) < 0$

при $x \in [x_0, \omega]$ таких решений у системы (2.20) существует $(m+1)$-параметрическое семейство, а в случае неравенства $h_n(x)(\det A)(\det A_{n-1}) > 0$ — m-параметрическое семейство. Отсюда с учетом замены (2.19) вытекает справедливость утверждения теоремы.

Теорема 2.7. *Пусть $h, h_n\colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции такие, что*

$$h(x)h_n(x) \neq 0 \quad \textit{при} \quad x \in [x_0, \omega[,$$

$$\int\limits_{x_0}^{\omega} h_n(x)\, dx = \pm\infty, \qquad \lim_{x \uparrow \omega} \frac{h_n(x)}{h(x)} = 0. \tag{2.24}$$

Пусть выполнено условие S_{n-1} с дополнением, что $\int_{x_0}^{\omega} |h_n(x) b_{nn}(x)|\, dx < +\infty$, функции

$$\frac{h(x)}{h_n(x)} f_i(x, v_1, \ldots, v_n), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \textit{ограничены на} \quad [x_0, \omega[\times \mathbb{R}_c^n \tag{2.25}$$

и

$$\lim_{|v_1| + \ldots + |v_n| \to 0} \frac{\dfrac{h(x)}{h_n(x)} V_i(x, v_1, \ldots, v_n)}{|v_1| + \ldots + |v_n|} = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n-1, \quad \textit{равномерно по} \quad x \in [x_0, \omega[. \tag{2.26}$$

Пусть, кроме того, матрица $A_{n-1} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \neq 0. \tag{2.27}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.15) *имеет хотя бы одно решение $(v_i)_{i=1}^n\colon [x_1, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}_c^n$, $x_1 \in [x_0, \omega[$, стремящееся к нулю при $x \uparrow \omega$. Более того, если матрица A_{n-1} имеет m собственных значений* (*с учетом кратных*), *действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0, \omega[$, то при выполнении неравенства $h_n(x) \sum_{j=1}^{n} a_{nj} > 0$ у системы* (2.15) *существует m-параметрическое, а при выполнении неравенства $h_n(x) \sum_{j=1}^{n} a_{nj} < 0$ — $(m+1)$-параметрическое семейство исчезающих в ω решений.*

Доказательство. Применим к системе (2.15) преобразование

$$v_i = \tilde{v}_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad v_n = \tilde{v}_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k(x) \tilde{v}_k, \tag{2.28}$$

выбрав в качестве функций $h_k\colon [x_*, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, $k = \overline{1, n-1}$, $x_* \in [x_0, \omega[$, исчезающее в ω решение системы дифференциальных уравнений

$$h'_k = -h(x)\left[\sum_{i=1}^{n-1}(a_{ik}+b_{ik}(x))h_i + h_k\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}+b_{in}(x))h_i\right]+$$

$$+h_n(x)\big[a_{nk}+b_{nk}(x)+(a_{nn}+b_{nn}(x))h_k\big],\quad k=\overline{1,n-1}, \tag{2.29}$$

существующее на основании теоремы 2.1 и замечания 2.1, так как матрица A_{n-1} не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, выполняются условия S_{n-1}, (2.24) и первое из условий (2.26). При этом заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n-1}h'_k(x) = \left[h_n(x)(a_{nn}+b_{nn}(x)) - h(x)\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)(a_{kn}+b_{kn}(x))\right]\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)-1\right)+h_n(x)\sum_{k=1}^{n}[a_{nk}+b_{nk}(x)]-$$

$$-h(x)\sum_{i=1}^{n-1}h_i(x)\sum_{k=1}^{n}\big[a_{ik}+b_{ik}(x)\big].$$

В силу этого соотношения, выбора функций h_k, $k=\overline{1,n-1}$, и условий (2.25)–(2.27) в результате преобразования (2.28) получим систему дифференциальных уравнений вида (2.20), в которой

$$\tilde q_i(x)=q_i(x),\quad i=\overline{1,n-1},\qquad \tilde a_{ij}=a_{ij},\quad i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{1,n},$$

$$\tilde b_{ij}(x)=b_{ij}(x)+b_{in}(x)h_j(x),\quad i,j=\overline{1,n-1},\qquad \tilde b_{in}(x)=b_{in}(x),\quad i=\overline{1,n-1},$$

$$\tilde f_i(x,\tilde v_1,\ldots,\tilde v_n)=f_i\left(x,\tilde v_1,\ldots,\tilde v_{n-1},\tilde v_n+\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)\tilde v_k\right)+$$

$$+\,a_{in}\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)\tilde v_k,\quad i=\overline{1,n-1},$$

$$\tilde V_i(x,\tilde v_1,\ldots,\tilde v_n)=V_i\left(x,\tilde v_1,\ldots,\tilde v_{n-1},\tilde v_n+\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)\tilde v_k\right),\quad i=\overline{1,n-1},$$

$$\tilde q_n(x)=q_n(x)-\frac{h(x)}{h_n(x)}\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)q_k(x),$$

$$\tilde f_n(x,\tilde v_1,\ldots,\tilde v_n)=f_n\left(x,\tilde v_1,\ldots,\tilde v_{n-1},\tilde v_n+\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)\tilde v_k\right)-$$

$$-\frac{h(x)}{h_n(x)}\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)\tilde f_k(x,\tilde v_1,\ldots,\tilde v_n)-$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{n-1}h_i(x)\left(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\right)\right]\left(\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)-1\right)^{-1}\tilde v_n,$$

$$\tilde{a}_{nj} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \qquad \tilde{a}_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}, \qquad \tilde{b}_{nj}(x) = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{b}_{nn}(x) = \left(\frac{1}{h_n(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k'(x) - \sum_{k=1}^{n} b_{nk}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{h(x)}{h_n(x)} \sum_{i=1}^{n-1} h_i(x) \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(x) \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} h_k(x) - 1 \right)^{-1},$$

$$\tilde{V}_n(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) = V_n \left(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{v}_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k(x) \tilde{v}_k \right) -$$

$$- \frac{h(x)}{h_n(x)} \sum_{k=1}^{n-1} h_k(x) \tilde{V}_k(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n).$$

Здесь в силу условия S_{n-1} с дополнением, что $\int_{x_0}^{\omega} |h_n(x) b_{nn}(x)| \, dx < +\infty$, стремления к нулю при $x \uparrow \omega$ функций h_k, $k = \overline{1, n-1}$, а также условий (2.24) и (2.25) выполняются наряду с (2.13) и (2.14) условия (2.21) – (2.23). Кроме того, матрица $\tilde{A}_{n-1} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^{n-1} = A_{n-1}$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, $\tilde{a}_{nj} = 0$ при $j = \overline{1, n-1}$ и $\tilde{a}_{nn} \neq 0$. Тем самым показано, что для системы (2.20) выполнены все условия теоремы 2.5. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (2.20) имеет по крайней мере одно решение $(\tilde{v}_i)_{i=1}^{n} \colon [x_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}_c^n$, $x_1 \in [x_*, \omega[$, стремящееся к нулю при $x \uparrow \omega$, причем в случае, когда матрица A_{n-1} имеет m собственных значений (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0, \omega[$, у системы (2.20) при выполнении неравенства $h_n(x) \sum_{k=1}^{n} a_{nk} > 0$ существует m-параметрическое семейство, а при выполнении неравенства $h_n(x) \sum_{k=1}^{n} a_{nk} < 0$ — $(m+1)$-параметрическое семейство таких решений. Всем этим решениям в силу замены (2.28) соответствуют решения системы дифференциальных уравнений (2.15), стремящиеся к нулю при $x \uparrow \omega$.

Теорема доказана.

***Замечание* 2.2.** Из доказательства данной теоремы ясно, что условия (2.25) и (2.26) могут быть сняты в случае, когда система дифференциальных уравнений (2.29) имеет стремящееся к нулю решение $(h_k)_{k=1}^{n-1}$, для которого

$$\limsup_{x \uparrow \omega} \left| \frac{h(x) h_k(x)}{h_n(x)} \right| < +\infty, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 2.8. *Пусть $h, h_n \colon [x_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции такие, что*

$$h(x) h_n(x) \neq 0 \quad \textit{при} \quad x \in [x_0, \omega[, \qquad \int_{x_0}^{\omega} h(x) \, dx = \pm\infty, \quad \lim_{x \uparrow \omega} \frac{h(x)}{h_n(x)} = 0. \tag{2.30}$$

Пусть выполнено условие S_{n-1}, $a_{nn} \neq 0$ и матрица $\mathcal{A}_{n-1} = \left(a_{ij} - a_{in} a_{nj} a_{nn}^{-1} \right)_{i,j=1}^{n-1}$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью. Тогда систе-

ма дифференциальных уравнений (2.15) *имеет хотя бы одно решение* $(v)_{i=1}^n\colon [x_1,\omega[\ \longrightarrow \mathbf{R}_c^n$, $x_1 \in [x_0,\omega[$, *стремящееся к нулю при* $x\uparrow\omega$. *Более того, если матрица* $\mathcal{A}_{n-1}$ *имеет* m *собственных значений, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции* h *на промежутке* $[x_0,\omega[$, *то при выполнении неравенства* $a_{nn}h_n(x) > 0$ *у системы* (2.15) *существует* m*-параметрическое, а при выполнении неравенства* $a_{nn}h_n(x) < 0$ — $(m+1)$*-параметрическое семейство исчезающих в* ω *решений.*

Доказательство. Применим к системе (2.15) преобразование (2.28), выбрав в качестве функций $h_k\colon [x_*,\omega[\ \longrightarrow \mathbf{R}$, $x_*\in[x_0,\omega[$, непрерывно дифференцируемое решение системы дифференциальных уравнений (2.29), допускающее представления вида

$$h_k(x) = -a_{nk}a_{nn}^{-1} + o(1), \quad k=\overline{1,n-1}, \quad \text{при} \quad x\uparrow\omega. \tag{2.31}$$

Существование такого решения у этой системы легко установить, если после применения дополнительного преобразования $h_k = -a_{nk}a_{nn}^{-1} + \tilde{h}_k$, $k=\overline{1,n-1}$, воспользоваться теоремой 2.1 и учесть условия (2.30), S_{n-1}, $a_{nn}\neq 0$ и замечание 2.1.

При таком выборе функций h_k, $k=\overline{1,n-1}$, в результате преобразования (2.28) получим систему дифференциальных уравнений вида (2.20), в которой при $i = \overline{1,n-1}$

$$\tilde{q}_i(x) = q_i(x), \qquad \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{in}a_{nj}a_{nn}^{-1}, \quad j=\overline{1,n-1}, \quad \tilde{a}_{in} = a_{in},$$

$$\tilde{b}_{ij}(x) = b_{ij}(x) + b_{in}(x)h_j(x), \quad j=\overline{1,n-1}, \quad \tilde{b}_{in}(x) = b_{in}(x),$$

$$\tilde{f}_i(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n) = f_i\left(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_{n-1},\tilde{v}_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k(x)\tilde{v}_k\right) +$$

$$+ a_{in}\sum_{j=1}^{n-1}\left[h_j(x) + a_{nj}a_{nn}^{-1}\right]\tilde{v}_j,$$

$$\tilde{V}_i(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n) = V_i\left(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_{n-1},\tilde{v}_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k(x)\tilde{v}_k\right)$$

и

$$\tilde{q}_n(x) = q_n(x) - \frac{h(x)}{h_n(x)}\sum_{k=1}^{n-1} h_k(x)q_k(x), \quad \tilde{a}_{nj} = 0, \quad j=\overline{1,n-1}, \quad \tilde{a}_{nn} = a_{nn},$$

$$b_{nj}(x) = 0, \quad j=\overline{1,n-1}, \qquad \tilde{b}_{nn}(x) = b_{nn} - \frac{h(x)}{h_n(x)}\sum_{k=1}^{n-1} h_k(x)b_{kn}(x),$$

$$\tilde{f}_n(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n) = f_n\left(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_{n-1},\tilde{v}_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k(x)\tilde{v}_k\right) -$$

$$-\frac{h(x)}{h_n(x)}\sum_{k=1}^{n-1} h_k(x)\tilde{f}_k(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n),$$

$$\tilde{V}_n(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n)=V_n\left(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_{n-1},\tilde{v}_n+\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)\tilde{v}_k\right)-$$

$$-\frac{h(x)}{h_n(x)}\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)\tilde{V}_k(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n).$$

В силу условий S_{n-1}, (2.30) и (2.31) здесь наряду с (2.13) и (2.14) выполняются условия (2.21) – (2.23). Кроме того, матрица $\tilde{A}_{n-1}=(\tilde{a}_{ij}-a_{in}a_{nj}a_{nn}^{-1})_{i,j=1}^{n-1}=\mathcal{A}_{n-1}$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, $\tilde{a}_{nj}=0$ при $j=\overline{1,n-1}$ и $\tilde{a}_{nn}\neq 0$. Значит, для полученной системы дифференциальных уравнений вида (2.20) выполнены все условия теоремы 2.5. На основании этой теоремы система (2.20) имеет по крайней мере одно решение $(\tilde{v}_i)_{i=1}^n\colon [x_1,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}_c^n$, $x_1\in[x_*,\omega[$, стремящееся к нулю при $x\uparrow\omega$. Более того, если матрица $\mathcal{A}_{n-1}$ имеет m собственных значений (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку функции h на промежутке $[x_0,\omega[$, у системы (2.20) при выполнении неравенства $a_{nn}h_n(x)>0$ существует m-параметрическое семейство, а при выполнении неравенства $a_{nn}h_n(x)<0$ — $(m+1)$-параметрическое семейство таких решений. Каждому из этих решений в силу замены (2.28) соответствуют решения системы дифференциальных уравнений (2.15), стремящиеся к нулю при $x\uparrow\omega$.

Теорема доказана.

***Замечание* 2.3.** Теоремы 2.5 – 2.8 охватывают системы дифференциальных уравнений (2.15), содержащие два блока, соответствующие множителям $h(x)$ и $h_n(x)$, причем последний из них является одномерным. В работе [4] в случае, когда $\omega=+\infty$, функции f_i, $i=\overline{1,n}$, являются линейными относительно фазовых переменных, а V_i, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяют условию Липшица по этим переменным на множестве $[x_0,\omega[\times\mathbb{R}_c^n$, приведено без доказательства утверждение о существовании стремящихся к постоянному (в частности, нулевому) вектору при $x\to+\infty$ решений систем дифференциальных уравнений, содержащих четыре блока (не обязательно одномерных) с различными множителями $h_k(x)$, $k=\overline{1,4}$, которые непрерывны на $[x_0,+\infty[$ и удовлетворяют условиям

$$h_1(x)h_3(x)h_4(x)\neq 0\quad\text{при}\quad x\in[x_0,+\infty[,$$

$$\int_{x_0}^{+\infty}|h_k(x)|\,dx=+\infty,\quad k=1,3,4,$$

$$\int_{x_0}^{+\infty}|h_2(x)|\,dx<+\infty,\qquad h_3(x)=o(h_4(x))\quad\text{при}\quad x\to+\infty.$$

Методика доказательства этого утверждения, по-видимому, может быть распространена и на классы систем дифференциальных уравнений, исследуемых в настоящей работе.

1. *Костин А. В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена – Фаулера // Докл. АН СССР. – 1971. – **200**, № 1. – С. 28 – 31.
2. *Костин А. В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Там же. – 1976. – **231**, № 5. – С. 1059 – 1062.

3. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. – 1984. – **15**. – S. 215 – 236.
4. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 524 – 526.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Докл. расш. зас. сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа ТГУ. – 1988. – **3**, № 3. – С. 62 – 65.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **234**, № 2. – С. 258 – 260.
7. *Евтухов В. М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена – Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, № 2. – С. 269 – 273.
8. *Evtukhov V. M., Drik N. G.* Asymptotic beavior of solutions of a second order nonlinear differential equations // Georg. Math. J. – 1996. – **3**, № 2. – P. 101 – 120.
9. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 8. – С. 1105 – 1114.
10. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Там же. – 2008. – **44**, № 3. – С. 308 – 322.
11. *Костин А. В.* К вопросу о существовании у систем обыкновенных дифференциальных уравнений ограниченных частных решений и частных решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ // Там же. – 1965. – **1**, № 5. – С. 585 – 604.
12. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Там же. – 2003. – **39**, № 4. – С. 441 – 452.
13. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990.
14. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 10. – С. 1311 – 1323.
15. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965.
16. *Coppel W. A.* Stability and asymptotic behaviour of differential equations. – Boston, Heats and Company, 1965.
17. *Костин А. В.* Устойчивость и асимптотика почти треугольных систем: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1962. – 108 с.

Получено 20.05.09