УДК 519.21

В. В. Конаровський (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИСТЕМА ДИФУЗІЙНИХ ЧАСТИНОК ІЗ СКЛЕЮВАННЯМ ЗМІННОЇ МАСИ*

A mathematical model of an infinite system of diffusion particles with interaction, whose masses influence on the diffusion coefficient, is constructed. The particles start with some stationary distribution of masses, move independently until meeting, then stick and their masses are summarized, after which the diffusion coefficient changes inversely proportional to the square root of mass. It is shown that the mass, which is transported by the particles, is also stationary distributed.

Сконструирована математическая модель бесконечной системы диффузионных частиц со взаимодействием, имеющих массу, которая влияет на коэффициент диффузии. Частицы начинают движение с некоторого стационарного распределения массы, движутся независимо до момента встречи, а затем склеиваются и их масса суммируется, после чего коэффициент диффузии изменяется обратно пропорционально корню квадратному массы. Показано, что масса, которая переносится частицами, также имеет стационарное распределение.

Дану роботу присвячено побудові математичної моделі сукупності взаємодіючих дифузійних частинок на прямій. Основною відмінністю розглядуваної системи є наявність маси у частинок, що впливає на коефіцієнт дифузії. Частинки при зіткненні склеюються, і їхня маса сумується, після чого коефіцієнт дифузії змінюється обернено пропорційно кореню квадратному маси. Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\mu = \sum_{k\in Z} a_k \delta_{x_k}$ *— стаціонарна точкова міра на* R *з скінченною кількістю атомів на кожному відрізку і* $\mu \neq 0$*. Тоді існує система процесів* $\{x(k,t);\ k\in Z,\ t\ge 0\}$*, яка задовольняє наступні умови:*

1) $x(k,\cdot)-x_k$ *— неперервний квадратично інтегровний локальний мартингал відносно*

$$(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0} = \left(\sigma\left(x(k,s);\ s\le t,\ k\in Z\right)\right)_{t\ge 0};$$

2) $x(k,0)=x_k,\ k\in Z$;

3) $x(k,t)\le x(k+1,t)\quad \forall k\in Z\quad \forall t\ge 0$;

4) $\langle x(k,\cdot)-x_k\rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{m(k,s)}\quad \forall t\ge 0$, *де*

$$m(k,t) = \sum_{i\in|A(k,t)|} a_i,\quad A(k,t)=\{j\in Z: \exists s\le t,\ x(k,s)=x(j,s)\};$$

5) *сумісна характеристика*

$$\langle x(l,\cdot)-x_l,\ x(k,\cdot)-x_k\rangle_t I_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0,$$

де

$$\tau_{l,k} = \inf\{t: x(l,t)=x(k,t)\}.$$

Тут μ — початковий розподіл маси частинок. Умова 1 означає, що частинки мають дифузію, яка змінюється згідно з умовою 4. А саме, після склеювання

*Частково підтримано Російсько-Українським грантом „Асимптотична поведінка стохастичних потоків" (етап 2 „Граничні теореми для потоків із сингулярностями" від 26.03.09 р., № 184).

© В. В. КОНАРОВСЬКИЙ, 2010

маса частинок сумується і дифузія змінюється обернено пропорційно кореню квадратному маси. Умови 2 та 3 відповідають за старт і упорядкованість частинок під час руху, а умова 5 вказує на незалежну поведінку частинок до моменту зіткнення. Зауважимо, в умовах 1 – 5 не вказано, що частинки після зіткнення склеюються. Цю властивість одержимо потім як наслідок. При доведенні теореми будемо використовувати мартингальні методи.

Схожі моделі із взаємодією розглядалися у роботах інших авторів (див., наприклад, [1 – 5]). У роботі [1] побудовано потік, який можна інтерпретувати як опис сумісного руху броунівських частинок на R, що стартували з кожної точки прямої і рухаються незалежно до моменту зустрічі, а потім склеюються і рухаються разом. Іншими словами, будується система процесів $\{x(u, t);\ u \in R,\ t \geq 0\}$, яка задовольняє наступні умови:

1) $x(u, \cdot)$ — неперервний квадратично інтегровний локальний мартингал відносно

$$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} = \left(\sigma(x(u, s);\ s \leq t,\ u \in R)\right)_{t \geq 0};$$

2) $x(u, 0) = u,\ u \in R$;

3) $x(u, t) \leq x(v, t)\quad \forall\, u,\ v \in R,\ u < v,\ \forall\, t \geq 0$;

4) $\langle x(u, \cdot)\rangle_t = t\quad \forall\, t \geq 0$;

5) сумісна характеристика

$$\langle x(u, \cdot), x(v, \cdot)\rangle_t I_{\{t < \sigma_{u,v}\}} = 0,$$

де

$$\sigma_{u,v} = \inf\{t : x(u, t) = x(v, t)\}.$$

Як видно з умови 4, дифузія частинок не змінюється. У статті [3] розглянуто випадки скінченної і нескінченної кількості частинок, що мають масу і швидкість. Їх рух підпорядковується законам збереження маси та інерції. Наведено мірозначні рівняння для розподілу маси та інерції. Доведено існування слабких розв'язків цих рівнянь. У даній моделі частинки мають масу і швидкість, ми ж припускаємо, що швидкість дорівнює нескінченності (дифузійний випадок). У роботі [5] розглянуто емпіричний розподіл сукупності N процесів із взаємодією при фіксованому t. Показано, що при деяких умовах щільність граничної міри, яка утворюється при $N \to \infty$, є розв'язком деякого еволюційного рівняння.

Як вже зазначалось, ми розглядаємо модель дифузійних частинок, які стартували з деякої випадкової точкової міри і рухаються незалежно до моменту зіткнення. Потім частинки склеюються, сумуючи масу, і рухаються разом. Проблемою побудови такої математичної моделі при злiченній кількості точок старту є те, що рух кожної скінченної системи частинок не може бути описаний без урахування впливу інших. Якщо в якості розподілу маси початкового моменту використати міру Лебега на прямій, то виникає ще одна проблема, а саме: в початковий момент частинки повинні почати рух з нескінченно малою масою, а отже, з нескінченно великою дифузією. Для розв'язання останньої проблеми ми пропонуємо відступити на як завгодно малий проміжок часу t_0 і припустити, що для довільного відрізка всі частинки, які з нього стартували, склеїлись у скінченну кількість, а потім будувати сукупність процесів, що описує дану модель на $[t_0, +\infty)$. Природно вважати, що у цьому випадку стартом повинна бути випадкова точкова міра, яка не змінює своїх імовірнісних характеристик при зсуві, тобто стаціонарна.

Робота складається з кількох етапів. У першому за допомогою мартингальних методів побудовано сукупність процесів, яка описує сумісний рух частинок, що стартували з σ-скінченної детермінованої точкової міри, рухаються незалежно до моменту зустрічі, а потім склеюються, змінюючи свою дифузію, і рухаються разом. Наведено достатні умови, які потрібно накласти на початкову міру для існування такої сукупності. У другому пункті досліджено деякі властивості стаціонарних точкових мір, оскільки далі саме вони будуть стартом. На завершення побудовано систему процесів, яка описує рух частинок, що склеюються і змінюють свою масу, розподілом маси яких у початковий момент є стаціонарна міра.

1. Vypadok determinovanoj miry.

Теорема **2.** *Нехай послідовності дійсних чисел* $\{x_k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ *та* $\{a_k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ *задовольняють наступні умови:*

1°) $x_k < x_{k+1}$, $a_k > 0$ $\forall k\in\mathbb{Z}$;

2°) *існують послідовність* $\{n_i;\ i\in\mathbb{Z}\}$ *і стала* $C>0$ *такі, що для будь-якого* $i\in\mathbb{Z}$ $a_{n_i+1}\wedge a_{n_i}\ge C$, $x_{n_i+1}-x_{n_i}\ge C$, $n_0=0$.

Тоді існує система випадкових процесів $\{x(k,t);\ k\in\mathbb{Z},\ t\ge 0\}$ *така, що:*

1) $x(k,\cdot)$ — *неперервний квадратично інтегровний локальний мартингал відносно*

$$(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0} = \big(\sigma(x(k,s);\ s\le t,\ u\in\mathbb{Z})\big)_{t\ge 0};$$

2) $x(k,0)=x_k$, $k\in\mathbb{Z}$;

3) $x(k,t)\le x(k+1,t)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$ $\forall t\ge 0$;

4) $\langle x(k,\cdot)\rangle_t = \int_0^t \frac{ds}{m(k,s)}$ $\forall t\ge 0$,

де

$$m(k,t) = \sum_{i\in|A(k,t)|} a_i,\quad A(k,t)=\{j\in\mathbb{Z}: \exists s\le t,\ x(k,s)=x(j,s)\};$$

5) *сумісна характеристика*

$$\langle x(l,\cdot),x(k,\cdot)\rangle_t I_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0,$$

де

$$\tau_{l,k} = \inf\{t: x(l,t)=x(k,t)\}.$$

Умови 1 – 5 *однозначно визначають розподіл* $(\ldots, x(-n,\cdot),\ldots, x(n,\cdot),\ldots)$ *у просторі* $\big((C(\mathbb{R}^+))^\infty, \mathcal{B}\big((C(\mathbb{R}^+))^\infty\big)\big)$.

Доведення складається з кількох частин. Спочатку побудуємо скінченну сукупність процесів $\{x_n(k,t);\ k=\overline{-n,n},\ t\in[0,1]\}$, яка задовольняє умови 1 – 5. Далі перейдемо до границі при $n\to+\infty$, а після цього продовжимо граничні процеси з $[0,1]$ на всю півпряму. І насамкінець покажемо, що умови 1 – 5 однозначно визначають розподіли шуканої системи.

На деякому ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{F},P)$ розглянемо сукупність незалежних вінерівських процесів $\{w_k(t);\ k\in\mathbb{Z},\ t\ge 0\}$. Із цієї сукупності для кожного $n\in\mathbb{N}$ побудуємо систему процесів $\{x_n(k,t);\ k=\overline{-n,n},\ t\in[0,1]\}$.

Нехай $\tau^{(0)} = 0$, $S^{(0)} = \left\{\{i\};\ i = \overline{-n, n}\right\}$ і $w_k^{(0)}(t) = x_k + \frac{1}{\sqrt{a_k}} w_k(t)$, $k = \overline{-n, n}$, $t \in [0, 1]$. За індукцією побудуємо систему процесів $\left\{w_k^{(p)};\ k = \overline{-n, n}\right\}$, $p = \overline{1, 2n}$. Розглянемо для $k = \overline{-n, n-1}$

$$\tau_k^{(p)} = \inf\left\{t : w_k^{(p-1)}(t) = w_{k+1}^{(p-1)}(t)\right\} \wedge 1.$$

Покладемо

$$\tau^{(p)} = \inf\left\{\tau_k^{(p)} > \tau^{(p-1)};\ k = \overline{-n, n-1}\right\} \wedge 1.$$

Розглянемо $S^{(p)}$ — клас підмножин множини $\{-n, \ldots, n\}$, який має наступні властивості:

1) якщо $l \le i \le k$, то $i \in A$ $\forall A \in S^{(p)}$ $\forall k, l \in A$;

2) $w_l^{(p-1)}\left(\tau^{(p)}\right) = w_k^{(p-1)}\left(\tau^{(p)}\right)$ $\forall A \in S^{(p)}$ $\forall k, l \in A$;

3) $w_l^{(p-1)}\left(\tau^{(p)}\right) \ne w_k^{(p-1)}\left(\tau^{(p)}\right)$ $\forall A \in S^{(p)}$ $\forall k \in A$, $l \in \{-n, \ldots, n\}/A$.

Для $k \in A \in S^{(p)}$ візьмемо

$$w_k^{(p)}(t) = \begin{cases} w_k^{(p-1)}(t), & 0 \le t \le \tau^{(p)}, \\ w_j^{(p-1)}\left(\tau^{(p)}\right)\left(1 - \dfrac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}\right) + \dfrac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}} w_j^{(p-1)}(t), & \tau^{(p)} < t \le 1, \end{cases}$$

де $j \in A$ і

$$|j| = \begin{cases} \min\left\{|i|;\ i \in A\right\}, & A \cap \{n_i, n_i + 1;\ i \in Z\} = \varnothing, \\ \min\left\{|n_i|, |n_i + 1|;\ n_i, n_i + 1 \in A\right\}, & A \cap \{n_i, n_i + 1;\ i \in Z\} \ne \varnothing, \end{cases}$$

$m_2 = \sum_{i \in A} a_i$, $m_1 = \sum_{i \in B} a_i$, де $B \in S^{(p-1)}$, $j \in B$.

Покладемо $x_n(k, \cdot) = w_k^{(2n)}$.

Зауваження 1. Позначимо правило, за яким системі $\left\{w_k;\ k = \overline{-n, n}\right\}$ ставиться у відповідність система $\left\{x_n(k, \cdot);\ k = \overline{-n, n}\right\}$, через $F_n^{n_i}$. Тоді $F_n^{n_i}$ — вимірне відображення простору $(C_n, \mathcal{B}_n)$ в $(C_n, \mathcal{B}_n)$, де $C_n = \left\{f \in C\left([0,1], R^{2n+1}\right):\ f(0) = (x_{-n}, \ldots, x_n)\right\}$ і $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}\left(C\left([0, 1], R^{2n+1}\right)\right) \cap C_n$.

Наведемо одну властивість відображення $F_n^{n_i}$, $n \in N$, з якої буде випливати існування границі послідовності $\{x_n(k, \cdot)\}_{n \ge k}$, $k \in Z$, при $n \to +\infty$.

Лема 1. *Нехай* $\{f_k;\ k \in Z\} \subset C[0, 1]$ і $f_k(0) = x_k$. *Позначимо*

$$\left(g_{-n}^{(n)}, \ldots, g_n^{(n)}\right) = F_n^{n_i}\left(f_{-n}, \ldots, f_n\right), \quad n \in N.$$

1. *Якщо для деякого* $m \in N$ *існують* $C > 0$ і $\delta > 0$ *такі, що*

$$\max\left\{\max_{t\in[0,1]} f_k(t);\ k\in\left\{n_i,\ n_j+1;\ i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,m-1}\right\}\right\} < C,$$

$$\min_{t\in[0,1]} f_{n_m+1}(t) > C+\delta,$$

то для довільних $l > n_m$ і $k=\overline{-l,\ n_m}$

$$\max_{t\in[0,1]} g_k^{(l)}(t) \le \max_{t\in[0,1]} g_{n_m}^{(l)}(t) < C, \qquad \min_{t\in[0,1]} g_{n_m+1}^{(l)}(t) > C+\delta.$$

2. *Якщо для деякого* $-m\in N$ *існують* $C<0$ *і* $\delta<0$ *такі, що*

$$\min\left\{\min_{t\in[0,1]} f_k(t);\ k\in\left\{n_i,\ n_j+1;\ i=\overline{m+1,0},\ j=\overline{m,0}\right\}\right\} > C,$$

$$\max_{t\in[0,1]} f_{n_m}(t) < C+\delta,$$

то для довільних $l > -n_m$ *і* $k=\overline{n_m+1,\ l}$

$$\min_{t\in[0,1]} g_k^{(l)}(t) \ge \min_{t\in[0,1]} g_{n_m+1}^{(l)}(t) > C, \qquad \max_{t\in[0,1]} g_{n_m}^{(l)}(t) < C+\delta.$$

Доведення безпосередньо випливає із конструкції відображень $F_n^{n_j}$, $n\in N$.

Для кожного $k\in Z$ покажемо, що існує границя послідовності $\{x_n(k,\cdot)\}_{n\ge k}$, і візьмемо її в якості $x(k,\cdot)$. Для цього сформулюємо допоміжну лему.

Лема 2. *Нехай* $\{w_k;\ k\in N\}$ *— сукупність незалежних стандартних вінерівських процесів, послідовності дійсних чисел* $\{y_k;\ k\in N\}$ *та* $\{b_k;\ k\in N\}$ *такі, що:*

1) $y_k < y_{k+1}$ $\forall\, k\in N$;

2) *існує* $\delta>0$ *таке, що для будь-якого* $k\in N$ $b_k\ge\delta$, $y_{k+1}-y_k\ge\delta$.

Позначимо

$$\xi_k = \max_{t\in[0,1]}\left\{y_k + \frac{1}{\sqrt{b_k}}\,w_k(t)\right\},$$

$$\eta_k = \min_{t\in[0,1]}\left\{y_k + \frac{1}{\sqrt{b_k}}\,w_k(t)\right\}.$$

Тоді для довільного $\delta_1\in\left(0,\dfrac{\delta}{2}\right)$

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_{k=\overline{1,n}}\xi_k \le y_n+\frac{\delta}{2},\ \eta_{n+1} > y_n+\frac{\delta}{2}+\delta_1\right\}\right\} = 1.$$

Із лем 1, 2 випливає, що для довільного $k\in Z$

$$P\{\exists\, N\in N\ \forall\, n\ge N:\ x_n(k,\cdot)=x_N(k,\cdot)\} = 1,$$

тобто для кожного цілого k послідовність $\{x_n(k,\cdot)\}_{n\ge k}$ стабілізується з імовірністю 1. В якості $x(k,\cdot)$ візьмемо границю $\{x_n(k,\cdot)\}_{n\ge k}$.

Далі, з конструкції $x_n(k,\cdot)$ видно, що

$$x_n(k,t) = x_k + \int_0^t \frac{d\tilde{w}_k^{(n)}(s)}{\sqrt{m_n(k,s)}},$$

де $\left\{\tilde{w}_k^{(n)};\ k=\overline{-n,n}\right\}$ — сукупність стандартних вінерівських процесів таких, що

$$\left\langle \tilde{w}_l^{(n)}, \tilde{w}_k^{(n)}\right\rangle_t = I_{\left\{t\ge \tau_{l,k}^{(n)}\right\}}\left(t-\tau_{l,k}^{(n)}\right),$$

$$\tau_{l,k}^{(n)} = \inf\{t: x_n(l,t)=x_n(k,t)\}.$$

Як і для послідовності $\{x_n(k,\cdot)\}_{n\ge k}$, можна встановити рівність

$$P\left\{\exists\, N\in \mathbb{N}\ \forall\, n\ge N:\ \tilde{w}_k^{(n)}=\tilde{w}_k^{(N)}\right\} = 1.$$

Візьмемо в якості $\tilde{w}$ границю послідовності $\left\{\tilde{w}_k^{(n)}\right\}_{n\ge k}$.

Зрозуміло, що $\{\tilde{w}_k;\ k\in \mathbb{Z}\}$ — сукупність стандартних вінерівських процесів таких, що

$$\langle \tilde{w}_l, \tilde{w}_k\rangle_t = I_{\{t\ge \tau_{l,k}\}}(t-\tau_{l,k}).$$

Крім того,

$$x(k,t) = x_k + \int_0^t \frac{d\tilde{w}_k(s)}{\sqrt{m(k,s)}}.$$

Звідси випливає, що система $\{x(k,t);\ k\in \mathbb{Z},\ t\in[0,1]\}$ задовольняє умови 1 – 5.

Через $\{x^T(k,t);\ k\in \mathbb{Z},\ t\in[0,T]\}$ позначимо сукупність процесів, побудовану таким же способом, як і система $\{x(k,t);\ k\in \mathbb{Z},\ t\in[0,1]\}$. Зауважимо, що

$$x^{T_1}(k,t) = x^{T_2}(k,t) \quad \forall\, k\in \mathbb{Z},\quad t\le T_1\wedge T_2.$$

Звідси випливає, що $x(k,\cdot)$ можна продовжити з $[0,1]$ на $\mathbb{R}^+$.

Доведемо другу частину теореми 2. Нехай $\{y(k,t);\ k\in \mathbb{Z},\ t\ge 0\}$ задовольняє умови 1 – 5, тоді за теоремою Дуба [6] існує сукупність вінерівських процесів $\{w_k';\ k\in \mathbb{Z}\}$ така, що

$$y(k,t) = x_k + \int_0^t \frac{dw_k'(s)}{\sqrt{m(k,s)}}$$

і

$$\langle w_l', w_k'\rangle_t = I_{\{t\ge \tau_{l,k}\}}(t-\tau_{l,k}).$$

Очевидно, що

$$\big(x(l,t) - x(k,t)\big)\, I_{\{t \ge \tau_{l,t}\}} \;=\; 0.$$

Далі із системи $\{w'_k;\ k \in Z\}$ можна побудувати сукупність стандартних незалежних вінерівських процесів $\{w_k;\ k \in Z\}$ таких, що

$$y(k,\cdot) \;=\; \lim_{n\to\infty} y_n(k,\cdot),$$

де

$$\big(y_n(-n,\cdot),\, \ldots,\, y_n(n,\cdot)\big) \;=\; F_n^{\{n_i\}}\big(w_{-n},\, \ldots,\, w_n\big).$$

Другу частину теореми доведено.

2. Стаціонарні точкові міри. У даному пункті дослідимо деякі властивості стаціонарних точкових мір. Детальний опис цього об'єкту можна знайти, наприклад, у [7].

Означення 1. *Точковою мірою на* R *називатимемо міру* $\mu = \sum_{k\in I} a_k \delta_{x_k}$, *де* $a_k > 0$, $x_k \in R$, $x_l \ne x_k$ *при* $l \ne k$ *і* $I \subseteq Z$.

Поряд з μ будемо розглядати міру $\mu^* = \sum_{k\in I} \delta_{x_k}$.

Нехай $\mathcal{N}$ — множина таких точкових мір μ на R, що $\mu^*(B) < \infty$ для довільної обмеженої множини $B \in \mathcal{B}(R)$.

Означення 2. *Стаціонарною точковою мірою* μ *на* R *називатимемо відображення*

$$\mu : \mathcal{B}(R) \times \Omega \to R^+ \cup \{\infty\},$$

яке має наступні властивості:

1) *для будь-якого* $B \in \mathcal{B}(R)$ $\mu(B,\cdot)$ — *випадкова величина;*

2) $\mu(\cdot,\omega) \in \mathcal{N}$ $\forall \omega \in \Omega$;

3) *для будь-яких* $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(R)$ *і* $h \in R$

$$(\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)) \overset{d}{=} (\mu(B_1 + h), \ldots, \mu(B_n + h)).$$

Зауваження 2. В означенні 2 умова 3 еквівалентна умові:

3') для довільних неперетинних напіввідкритих інтервалів $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(R)$ і для довільного $h \in R$ має місце

$$(\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)) \overset{d}{=} (\mu(B_1 + h), \ldots, \mu(B_n + h)).$$

Наведемо приклади стаціонарних мір.

1. Нехай $\{x(u,\cdot);\ u \in R\}$ — потік Арратья. Візьмемо $\mu_t(B) = \lambda(B_t)$, де $B_t = \{u : x(u,t) \in B\}$ і λ — міра Лебега на R. Тоді μ_t — стаціонарна точкова міра.

Доведення того, що μ_t задовольняє умови 1, 2 означення 2, можна знайти, наприклад, у [8]. Перевіримо виконання умови 3.

Нехай $\{x(u,t);\ u \in R,\ t \ge 0\}$ — потік Арратья. Тоді для довільного h $\{y(u,t);\ u \in R,\ t \ge 0\}$ також потік Арратья, де $y(u,t) = x(u-h,t) + h$. Візьмемо $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(R)$ і розглянемо

$$(\mu_t(B_1), \ldots, \mu_t(B_n)) = (\lambda\{u : x(u,t) \in B_1\}, \ldots, \lambda\{u : x(u,t) \in B_n\}) =$$

$$= (\lambda\{u : x(u,t) + h \in B_1 + h\}, \ldots, \lambda\{u : x(u,t) + h \in B_n + h\}) =$$

$$= (\lambda\{u : y(u+h,t) \in B_1 + h\}, \ldots, \lambda\{u : y(u+h,t) \in B_n + h\}) =$$

$$= (\lambda\{u - h : y(u,t) \in B_1 + h\}, \ldots, \lambda\{u - h : y(u,t) \in B_n + h\}) =$$

$$= (\lambda\{u : y(u,t) \in B_1 + h\}, \ldots, \lambda\{u : y(u,t) \in B_n + h\}) \overset{d}{=}$$

$$\overset{d}{=} (\mu_t(B_1 + h), \ldots, \mu_t(B_n + h)).$$

2. Нехай μ — міра, яка задовольняє наступні умови:

1) $\mu(B)$ — пуассонівська випадкова величина з інтенсивністю $\lambda(B)$;

2) випадкові величини $\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)$ незалежні в сукупності для довільної неперетинної системи множин $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Тоді μ — стаціонарна міра. (Існування міри з даними властивостями встановлено, наприклад, у [9].)

Далі доведемо лему, з якої буде випливати існування сукупності частинок із склеюванням змінної маси, розподілом мас у початковий момент яких є стаціонарна міра.

Лема 3. *Нехай* $\mu = \sum_{k \in I} a_k \delta_{x_k}$ *— стаціонарна точкова міра така, що* $\mu \neq 0$ *майже напевно, для довільних* $l, k \in I$ *з того, що* $l < k$ *і* $l \le i \le k$, *випливає* $x_l < x_k$ *та* $i \in I$. *Тоді з імовірністю 1* $I = \mathbb{Z}$ *і послідовності* $\{x_k;\, k \in \mathbb{Z}\}$ *та* $\{a_k;\, k \in \mathbb{Z}\}$ *задовольняють умови* 1°, 2° *теореми 2.*

Доведення. Нехай

$$C_n^{(m)} = [mn, m(n+1)).$$

Розглянемо

$$X_N^{(m)}(n) = \mu\left(C_n^{(m)}\right) \prod_{k : x_k \in C_n^{(m)}} I_{\left\{a_k \ge \frac{1}{N}\right\}} I_{\left\{\mu^*\left(C_n^{(m)}\right) > 1\right\}}.$$

$X_N^{(m)}(n)$ можна записати у вигляді

$$X_N^{(m)}(n) = \lim_{k \to \infty} I\left\{\sum_{G \in \mathcal{A}_k\left(C_n^{(m)}\right)} I_{\{\mu(G) > 0\}} > 1\right\} \times$$

$$\times \left(\sum_{G \in \mathcal{A}_k\left(C_n^{(m)}\right)} \mu(G)\right) \prod_{G \in \mathcal{A}_k\left(C_n^{(m)}\right)} \left(I_{\left\{\mu(G) \ge \frac{1}{N}\right\}} + I_{\{\mu(G) = 0\}}\right),$$

де $\mathcal{A}_k([a,b))$ — скінченне вкладене розбиття $[a,b)$ відкритими справа півінтервалами, таке, що

$$\max_{A \in \mathcal{A}_k([a,b))} \operatorname{diam} A \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Звідси легко бачити, що $X_N^{(m)}$ — стаціонарний процес у вузькому розумінні.

З $X_N^{(m)}$ утворимо новий стаціонарний процес

$$Y_N^{(m)}(n) \;=\; X_N^{(m)}(n)\, I_{\left\{X_N^{(m)}(n)\le N\right\}}.$$

Далі, оскільки $\mathbf{E}Y_N^{(m)}(n) < \infty$, то за теоремою Біркгофа – Хінчина [10]

$$\lim_{K-M\to\infty}\frac{1}{K-M}\sum_{n=M+1}^{K} Y_N^{(m)}(n) \;=\; \mathbf{E}\left(Y_N^{(m)}(n)\,\middle|\, S_{Y_N^{(m)}}\right),$$

де

$$S_{Y_N^{(m)}} \;=\; \left(Y_N^{(m)}\right)^{-1}(S), \quad S = \left\{B\in\mathcal{B}(R^\infty) : T^{-1}(B) = B\right\}$$

і T — оператор зсуву в R^∞.

Позначимо $\xi_N^{(m)} = \mathbf{E}\left(Y_N^{(m)}(n)\,\middle|\, S_{Y_N^{(m)}}\right)$ і розглянемо $B_N^{(m)} = \left\{\xi_N^{(m)} = 0\right\}$ та $A_N^{(m)} = \Omega / B_N^{(m)}$.

Оскільки на $A_N^{(m)}$ існує послідовність цілих чисел $\{n_j;\ j\in Z\}$ така, що $N \ge Y_N^{(m)}(n_j) \ge \dfrac{1}{N}$, то з конструкції $Y_N^{(m)}$ видно, що умови 1°, 2° теореми 2 на $A_N^{(m)}$ виконуються.

Покажемо, що

$$P\left\{\bigcup_{m,\,N=1}^{\infty} A_N^{(m)}\right\} \;=\; 1,$$

а це рівносильно тому, що

$$P\left\{\bigcap_{m,\,N=1}^{\infty} B_N^{(m)}\right\} \;=\; 0.$$

Нехай це не так. Розглянемо

$$\int_{B_N^{(m)}} Y_N^{(m)}(n)\, P(d\omega) \;=\; \int_{B_N^{(m)}} \xi_N^{(m)}(n)\, P(d\omega) \;=\; 0.$$

Звідси $Y_N^{(n)}(n) = 0$ на $B_N^{(m)}$. Отже, $Y_N^{(m)}(n) = 0$ для довільних n, m і N на $\bigcap_{m,\,N=1}^{\infty} B_N^{(m)}$. А це означає, що або на R^+, або на R^- є рівно одна точка, у якій зосереджена міра μ $\left(\text{на } \bigcap_{m,\,N=1}^{\infty} B_N^{(m)}\right)$.

Візьмемо

$$Y(n) \;=\; \mu^*\big([n,\, n+1)\big), \quad n\in Z.$$

Згідно з зауваженням, наведеним вище, знайдуться $\alpha > 0$ і $n\in Z$ такі, що

$$\alpha = P\{Y(n)=1,\, Y(m)=0,\, n\neq m\}.$$

Оскільки μ — стаціонарна міра, то μ^* також стаціонарна, а отже, Y — стаціонарний процес у вузькому розумінні. Звідси

$$\alpha = P\{Y(n)=1,\, Y(m)=0,\, n\neq m\} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} P\{Y(-m)=0, \dots, Y(n)=1, \dots, Y(m)=0\} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} P\{Y(-m+1)=0, \dots, Y(n+1)=1, \dots, Y(m+1)=0\} =$$

$$= P\{Y(n+1)=1,\, Y(m+1)=0,\, n\neq m\},$$

що неможливо. Отримали суперечність з припущенням, що й доводить лему.

3. Випадок стаціонарної міри. *Доведення теореми 1.* Нехай μ — стаціонарна точкова міра, задана на ймовірнісному просторі $(\Omega', \mathcal{F}', P')$. Візьмемо на деякому іншому ймовірнісному просторі $(\Omega'', \mathcal{F}'', P'')$ зліченну сукупність незалежних вінерівських процесів $\{w_k;\, k\in\mathbb{Z}\}$. Для кожного фіксованого $\omega'\in\Omega'$ за лемою 3 послідовності $\{x_k(\omega');\, k\in\mathbb{Z}\}$ та $\{a_k(\omega');\, k\in\mathbb{Z}\}$ задовольняють умови 1°, 2° теореми 2. За цією ж теоремою існує сукупність процесів із склеюванням з початковим розподілом $\mu(\omega') = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(\omega')\,\delta_{x_k(\omega')}$. Позначимо її через $X = \{x(k,t,\omega',\omega'');\, k\in\mathbb{Z},\, t\geq 0\}$. Покажемо, що система X є шуканою.

Як і в п. 1, можна показати, що $x(k,\cdot)$ — вінерівський процес для довільного $k\in\mathbb{Z}$. Перевіримо, що $x(k,\cdot)-x_k$ — квадратично інтегровний локальний мартингал.

Нехай

$$\sigma_n^{(k)} = \inf\{t : |x(k,t)-x_k| \geq n\} \wedge n.$$

Оскільки $x(k,\cdot)-x_k$ — неперервний процес, узгоджений з $(\mathcal{F}_t) = (\sigma(a_k, x_k, w_k(s);\, s\leq t,\, k\in\mathbb{Z}))$, то $\sigma_n^{(k)}$ — марковський момент відносно $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. За теоремою про перетворення вільного вибору [11] для довільного $\omega'\in\Omega'$ $x\left(k, \cdot \wedge \sigma_n^{(k)}, \omega'\right) - x_k(\omega')$ — квадратично інтегровний мартингал з характеристикою

$$\langle x(k,\cdot,\omega') - x_k(\omega')\rangle_t = \int_0^{t\wedge\sigma_n^{(k)}(\omega')} \frac{ds}{m(k,s,\omega')}.$$

Покажемо, що $x\left(k, \cdot\wedge\sigma_n^{(k)}\right) - x_k$ — квадратично інтегровний мартингал на $\Omega'\times\Omega''$. Для цього достатньо перевірити, що

$$\int_{A'\times A''} \left(x\left(k, t\wedge\sigma_n^{(k)}\right) - x_k\right) dP'\otimes P'' = \int_{A'\times A''} \left(x\left(k, s\wedge\sigma_n^{(k)}\right) - x_k\right) dP'\otimes P'',$$

де $s\leq t$, $A'\in\sigma\{a_k, x_k;\, k\in\mathbb{Z}\}$ і $A''\in\sigma\{w_k(r);\, r\leq s\}$.

Отже,

$$\int_{A'\times A''}\left(x\left(k, t\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right)dP'\otimes P'' = \int_{A'}dP'\int_{A''}\left(x\left(k, t\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right)dP'' =$$

$$= \int_{A'}dP'\int_{A''}\left(x\left(k, s\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right)dP'' = \int_{A'\times A''}\left(x\left(k, s\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right)dP'\otimes P''.$$

Далі розглянемо

$$M_n(k,t) = \left(x\left(k, t\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right)^2 - \int_0^{t\wedge\sigma_n^{(k)}}\frac{ds}{m(k,s)}.$$

Проводячи аналогічні міркування для M_n, переконуємося, що M_n — квадратично інтегровний мартингал. Звідси за теоремою Дуба – Мейєра [6]

$$\left\langle x(k,\cdot)-x_k\right\rangle_t = \int_0^{t\wedge\sigma_n^{(k)}}\frac{ds}{m(k,s)}.$$

Залишилося показати, що

$$\left\langle x(l,\cdot)-x_l,\ x(k,\cdot)-x_k\right\rangle_t I_{\{t<\tau_{l,k}\}} = 0.$$

Позначимо

$$\tau_n = \tau_{l,k}\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}.$$

Візьмемо

$$M_n(t) = \left(x(l, t\wedge\tau_n)-x_l\right)\left(x(k, t\wedge\tau_n)-x_k\right).$$

Легко бачити, що M_n — квадратично інтегровний мартингал. За теоремою Дуба – Мейєра

$$\left(x\left(l, t\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_l\right)\left(x\left(k, t\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right) =$$

$$= \widetilde{M}_n(t) + \left\langle x\left(l,\cdot\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_l,\ x\left(k,\cdot\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right\rangle_t.$$

Підставимо в останню рівність замість t $t\wedge\tau_{l,k}$:

$$\left(x(l, t\wedge\tau_n)-x_l\right)\left(x(k, t\wedge\tau_n)-x_k\right) =$$

$$= \widetilde{M}_n(t\wedge\tau_n) + \left\langle x\left(l,\cdot\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_l,\ x\left(k,\cdot\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right\rangle_{t\wedge\tau_n}.$$

За теоремою про перетворення вільного вибору $\widetilde{M}_n(\cdot\wedge\tau_n)$ — мартингал, а отже, $M_n = \widetilde{M}_n(\cdot\wedge\tau_n)$. Звідси

$$\left\langle x\left(l,\cdot\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_l,\ x\left(k,\cdot\wedge\sigma_n^{(l)}\wedge\sigma_n^{(k)}\right)-x_k\right\rangle_{t\wedge\tau_n} = 0.$$

Тоді

$$\left\langle x(l,\cdot)-x_l,\ x(k,\cdot)-x_k\right\rangle_{t\wedge\tau_n} = 0.$$

Теорему доведено.

Зауваження 3. За другою частиною теорем 2 розподіл побудованої сукупності процесів $(\ldots, x(-n,\cdot), \ldots, x(n,\cdot), \ldots)$ не залежить від вибору системи вінерівських процесів $\{w_k;\ k\in \mathbb{Z}\}$.

Доведемо, що розподіл процесів $(\ldots, x(-n,\cdot), \ldots, x(n,\cdot), \ldots)$ залежить лише від розподілу стаціонарної міри μ. Нехай міри μ та ν задовольняють умови теореми 1 і такі, що $\mu \overset{d}{=} \nu$, тобто для довільного набору борелівських множин $B_1, \ldots, B_n$

$$(\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)) \overset{d}{=} (\nu(B_1), \ldots, \nu(B_n)).$$

Побудуємо, як і в останньому доведенні, системи процесів $\{x(k,t);\ k\in\mathbb{Z},\ t\ge 0\}$ і $\{y(k,t);\ k\in\mathbb{Z},\ t\ge 0\}$, для яких μ та ν — початкові розподіли відповідно. Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Випадкові елементи* $(\ldots, x(-n,\cdot), \ldots, x(n,\cdot), \ldots)$ *і* $(\ldots, y(-n,\cdot), \ldots, y(n,\cdot), \ldots)$ *однаково розподілені.*

Доведення. Використаємо позначення з доведення теореми 1. Достатньо показати [12], що майже для кожного фіксованого ω'' розподіли $(\ldots, x(-n,\cdot,\omega''), \ldots, x(n,\cdot,\omega''), \ldots)$ та $(\ldots, y(-n,\cdot,\omega''), \ldots, y(n,\cdot,\omega''), \ldots)$ збігаються. Для доведення цього достатньо встановити існування послідовності сукупності процесів $\left\{\{x_{m_j}(k,t);\ k\in\overline{-m_j, m_j},\ t\in[0,T]\}\right\}_{j\ge 0}$ і $\left\{\{y_{m_j}(k,t);\ k\in\overline{-m_j, m_j},\ t\in[0,T]\}\right\}_{j\ge 0}$, які задовольняють наступні умови (при фіксованому ω''):

1) $\left(x_{m_j}(-m_j,\cdot), \ldots, x_{m_j}(m_j,\cdot)\right)$ та $\left(y_{m_j}(-m_j,\cdot), \ldots, y_{m_j}(m_j,\cdot)\right)$ однаково розподілені у просторі $\left((C([0,T]))^{m_j}, \mathcal{B}\left((C([0,T]))^{m_j}\right)\right)$;

2) для будь-яких $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$

$$\left(x_{m_j}(k_1,\cdot), \ldots, x_{m_j}(k_m,\cdot)\right) \to \left(x(k_1,\cdot), \ldots, x(k_m,\cdot)\right),$$

$$\left(y_{m_j}(k_1,\cdot), \ldots, y_{m_j}(k_m,\cdot)\right) \to \left(y(k_1,\cdot), \ldots, y(k_m,\cdot)\right) \quad \text{при} \quad j\to\infty$$

у рівномірній топології простору $(C([0,T]))^m$.

Для кожного $n\in N$ побудуємо сукупність процесів $\left\{x_{n2^n}(k,t);\ k=\overline{-n2^n, n2^n},\ t\in[0,T]\right\}$ з системи неперервних функцій $\{w_k(\omega'');\ k\in\mathbb{Z}\}$. Тут $\{w_k;\ k\in\mathbb{Z}\}$ — сукупність незалежних стандартних вінерівських процесів, з якої побудовано $\{x(k,t);\ k\in\mathbb{Z},\ t\ge 0\}$ і $\{y(k,t);\ k\in\mathbb{Z},\ t\ge 0\}$. Введемо позначення

$$\Delta_k^n = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right),$$

$$\tilde{a}_k^{(n)} = \mu\left(\Delta_k^n\right),$$

$$\tilde{x}_k^{(n)} = \frac{k}{2^n}, \quad k = \overline{-n2^n, n2^n}.$$

Далі вилучимо з множин $\left\{\tilde{a}_k^{(n)}; k = \overline{-n2^n, n2^n}\right\}$ та $\left\{\tilde{x}_k^{(n)}; k = \overline{-n2^n, n2^n}\right\}$ ті номери k, для яких $\tilde{a}_k^{(n)} = 0$, і якщо після цього залишилась парна кількість елементів, то ще вилучимо найбільший номер. Перепозначивши елементи, які залишились, отримаємо послідовності $\left\{a_k^{(n)}; k = \overline{-l, l}\right\}$ і $\left\{x_k^{(n)}; k = \overline{-l, l}\right\}$. Для зручності візьмемо

$$a_k^{(n)} = 1, \quad k \in \left\{-n2^n, \ldots, n2^n\right\}/\{-l, \ldots, l\},$$

$$x_i^{(n)} = x_{i-1}^{(n)} + 1, \quad i = \overline{l+1, n2^n},$$

$$x_j^{(n)} = x_{j+1}^{(n)} - 1, \quad j = \overline{-n2^n, -l-1}.$$

З послідовностей $\left\{a_k^{(n)}; k = \overline{-n2^n, n2^n}\right\}$, $\left\{x_k^{(n)}; k = \overline{-n2^n, n2^n}\right\}$ і $\left\{w_k(\omega''); k \in Z\right\}$, як і при доведенні теореми 2, побудуємо $\left\{x_{n2^n}(k, t); k = \overline{-n2^n, n2^n}, t \in [0, T]\right\}$. Тобто візьмемо

$$\left(x_{n2^n}\left(-n2^n, \cdot\right), \ldots, x_{n2^n}\left(n2^n, \cdot\right)\right) = F_{n2^n}^{n_j}\left(w_{n2^n}(\omega''), \ldots, w_{n2^n}(\omega'')\right),$$

де $F_{n2^n}^{n_j}$ — відображення, побудоване в теоремі 2.

Аналогічно побудуємо сукупність процесів $\left\{y_{n2^n}(k, t); k = \overline{-n2^n, n2^n}, t \in [0, T]\right\}$.

Оскільки

$$\left(\mu\left(\Delta_{-n}^n\right), \ldots, \mu\left(\Delta_n^n\right)\right) \overset{d}{=} \left(\nu\left(\Delta_{-n}^n\right), \ldots, \nu\left(\Delta_n^n\right)\right) \quad \forall n \in N,$$

то умова 1 виконується.

Зауважимо, що за лемами 2 і 3 для достатньо великих номерів n знайдеться N таке, що $\left(x_{n2^n}(k_1, \cdot), \ldots, x_{n2^n}(k_m, \cdot)\right)$ залежить лише від наборів $\left\{w_k(\omega''); k = \overline{-N, N}\right\}$, $\left\{a_k^{(n)}; k = \overline{-N, N}\right\}$ та $\left\{x_k^{(n)}; k = \overline{-N, N}\right\}$. Далі, оскільки на кожному відрізку міра μ має скінченну кількість атомів і для побудови $\left\{x_{n2^n}(k, t); k = \overline{-n2^n, n2^n}, t \in [0, T]\right\}$ ми використовували вінерівські траєкторії, то послідовність $\left(x_{n2^n}(k_1, \cdot), \ldots, x_{n2^n}(k_m, \cdot)\right)$ буде збігатись до $\left(x(k_1, \cdot), \ldots, x(k_m, \cdot)\right)$ при $n \to \infty$.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Для довільного* $t \geq 0$ *міра* $\mu_t = \sum_{k \in Z} a_k \delta_{x(k,t)}$ *є стаціонарною.*

З наслідку видно, що ймовірнісний розподіл міри μ_t не залежить від зсуву на довільне число $h \in \mathbb{R}$, тобто $\mu_t \overset{d}{=} \mu_t(\cdot + h)$.

Автор висловлює подяку професору Дороговцеву А. А. за поставлену задачу і допомогу в написанні статті.

1. *Arratia R. A.* Brownian motion on the line: PhD dissertation. – Wiskonsin, Madison, 1979.
2. *Le Jan Y., Raimond O.* Flows, coalescence and noise // Ann. Probab. – 2004. – **32**, № 2. – P. 1247 – 1315.
3. *Weinan E., Rykov Yu. G., Sinai Ya. G.* Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Communs Math. Phys. – 1996. – **177**. – P. 349 – 380.
4. *Dorogovtsev A. A.* One Brownian stochastic flow // Theory Stochast. Process. – 2004. – **10**, № 3 – 4. – P. 21 – 25.
5. *Malyshev V., Manita A.* Asymptotic behaviour in the time synchronization model // Adv. Math. Sci. – 2006. – **217**. – P. 101 – 115.
6. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
7. *Керстан Й., Маттес К., Мекке Й.* Безгранично делимые точечные процессы: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
8. *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.
9. *Kurtz T.* Lectures on stochastic analysis. – Madison: Univ. Wisconsin, 2001.
10. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2005. – 408 с.
11. *Ватанабе С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / Под ред. А. Н. Ширяева: Пер. с англ. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
12. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 292 с.

Одержано 06.05.09,
після доопрацювання — 25.09.09